







Bonnart inv. et del. Herisset Sculp.

Geometria plura præsidia præstat Architecturæ. Vitruv. L. 1. C. 1

LA THEORIE ET LA PRATIQUE
DE LA
COUPE DES PIERRES ET DES BOIS,

POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES
Et autres parties des Bâtimens Civils & Militaires,

OU

TRAITÉ DE STEREOTOMIE
A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE,

Par M. FREZIER, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis, Directeur des Fortifications de Bretagne.

Nouvelle Edition corrigée & augmentée.

TOME PREMIER.



A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur du Roy en ſon Artillerie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LIV.



DISCOURS PRELIMINAIRES.

PREMIER DISCOURS.

SUR L'UTILITÉ DE LA THÉORIE, Dans les Arts relatifs à l'Architecture.



JE me propose dans cet Ouvrage de donner la Théorie des Sections des Corps, autant qu'elle est nécessaire à la démonstration de l'usage qu'on en peut faire en Architecture pour la construction des voutes, & la *COUPE DES PIERRES ET DES BOIS*, ce que personne n'avoit encore fait; & parce que je prends une route différente de ceux qui ont traité de cette matiere, qui se sont tellement bornés à la Pratique, qu'ils semblent mépriser la Théorie, ou l'ignorer: je vais tâcher d'en établir l'utilité.

Vitruve, qu'on peut citer pour un bon connoisseur dans les Arts, parce qu'il est reconnu pour un fameux Architecte, & qu'il étoit de plus Ingénieur d'Auguste, y distinguoit deux choses (*) sçavoir, l'*Ouvrage* & le *Raisonnement*; l'une, dit-il, est

(*) *Ex duabus rebus singulas Artes esse compositas, ex* OPERE *& ejus* RATIOCINATIONE; *ex his autem unum proprium esse eorum, qui singulis rebus sunt exercitati id est operis effectus; alterum commune cum omnibus Doctis, id est* RATIOCINATIO.

a

l'affaire des Gens qui en ont fait apprentiſſage; l'autre eſt du reſſort des Sçavans. Tout le monde ne penſe pas auſſi juſte que lui; les hommes, pour la plus grande partie, connoiſſent ſi peu la nature des Arts, qu'ils croyent que l'on ne peut s'y rendre habile que par l'expérience; ils regardent la Théorie comme une occupation vaine, qui n'a pour objet que des chimeres, dont les Arts ne retirent aucun avantage. (*) On a vû, diſent-ils, de Grands Hommes dans l'Architecture Civile, & même dans le Militaire, qui ſe ſont diſtingués par leurs Ouvrages ſans être Géometres ni Algébriſtes, donc on peut ſe paſſer de ces Sciences pour devenir habile dans les Arts.

Pour répondre à ce faux raiſonnement, que bien des gens tâchent de faire valoir par l'intérêt qu'ils ont de l'établir; je dirai qu'abſolument parlant, à la réſerve de la nourriture, les hommes peuvent ſe paſſer de tout, même d'habits dans les Pays froids, témoins les anciens Gaulois, nos Ancêtres, & pluſieurs Nations de Sauvages; mais puiſque la Nature nous a deſtinés au travail, & que moyennant un peu d'application elle nous donne l'induſtrie d'ajouter une infinité d'agrémens & de commodités aux Ouvrages de ceux qui nous ont précédé, & de concilier la beauté & la ſolidité des Edifices, qui nous garantiſſent des injures de l'air & des inſultes de nos ennemis, il ſemble que ce n'eſt pas agir en hommes raiſonnables, que d'attendre que l'expérience nous faſſe ſentir nos beſoins; mais que nous devons réfléchir aux moyens de pourvoir à ceux qui peuvent nous arriver dans l'exécution de nos deſſeins, & de combiner ces moyens de tant de manieres différentes, que nous choiſiſſions toujours les plus ſûrs, les plus courts & les plus faciles, ce qui eſt réſervé à la ſeule Théorie.

Galli ſuper umbilicum erant nudi. Tite-Live. l. 22. §. 46.

Qu'on me permette ici une comparaiſon pour rendre cette vérité plus ſenſible; avant qu'on eût formé les grands chemins par des chauſſées droites, ſolides, & de largeur commode, on communiquoit comme aujourd'hui d'une Ville à une autre,

(*) Voyez les *Penſées critiques ſur les Mathématiques* par CARTAUD, qui oſe avancer que les Mathématiques ont peu contribué à la perfection des beaux Arts. *A Paris* 1734.

mais on demeuroit bien plus long-tems en chemin, on éprouvoit une plus longue fatigue, on étoit ſujet à demeurer embourbé, & ſouvent à s'égarer.

Avant qu'on eut conſulté la Géométrie & la Méchanique en Architecture, on faiſoit des voutes des mêmes matériaux qu'aujourd'hui ; mais on ne pouvoit s'aſſûrer de l'équilibre de l'effort de leur *Pouſſée*, & de la réſiſtance des *Piédroits* qu'il tend à renverſer ; de ſorte que ne ſçachant garder un milieu convenable entre le trop & le trop peu de leur épaiſſeur, on étoit ſujet à y conſommer une dépenſe ſuperflue en matériaux, ou à les voir s'écrouler par trop de foibleſſe : l'expérience nous en fournit encore aſſez ſouvent des exemples, à la honte de ceux qui ſe mêlent de conſtruction ſans connoiſſance de Géométrie ni de Méchanique, & au grand dommage de celui qui fait bâtir. On faiſoit auſſi des ceintres de différentes eſpeces, circulaires, ſurbaiſſés, ſurhauſſés & rampans ; mais on ignoroit quelle étoit la courbe qui leur convenoit le mieux dans les circonſtances des termes donnés. On rencontroit dans l'exécution des difficultés qu'on n'avoit pas prévû, & qu'on ne ſçavoit réſoudre que comme le nœud gordien, en démoliſſant & recoupant pluſieurs fois les parties de voutes qui ne quadroient pas, juſqu'à ce que l'œil fût moins offenſé de leur difformité, d'où il réſultoit beaucoup de perte de tems & de matériaux ; & parce que le tâtonnement n'a de ſuccès que par hazard, de tels ouvrages duroient peu, coutoient beaucoup de façon, & ſatisfaiſoient rarement la vûe & l'eſprit des Connoiſſeurs.

D'où vient donc que les Praticiens mépriſent la Théorie, & la comptent pour rien au prix de l'expérience qu'ils ne ceſſent de vanter ? J'en trouve deux raiſons : la premiere, c'eſt pour détourner la honte qu'ils ont de ne pouvoir rendre d'autre raiſon de leurs Ouvrages, que celle de l'imitation de ceux qui paſſent pour bons, & de la convenance qu'ils ont remarqué dans la pratique, ſentant bien qu'ils ne ſont pas aſſez éclairés pour remonter à la cauſe. Cette raiſon eſt tirée de la vanité du cœur humain ; l'homme pour s'élever ſur ſes égaux, affecte

de mépriser les choses qui lui manquent, & cherche à faire parade du peu qu'il possede; de-là vient, qu'on se méprise réciproquement dans le monde, & que la science, dont la beauté & l'utilité sont peu connues de la multitude, n'est pas élevée au rang qu'elle doit tenir au-dessus de la seule pratique; l'inattention & souvent le défaut de lumiere des gens en place, favorisent les faux jugemens que l'on porte sur le mérite de la routine; puisqu'on voit que la peine de travailler à acquérir des connoissances utiles aux besoins de la vie, ou à l'ornement de l'esprit, est ordinairement très-inutile pour la fortune; c'en seroit assez pour énerver toute émulation, arrêter les progrès des Arts, & rappeller la barbarie des siecles d'ignorance, si la Nature n'avoit pourvû à l'aveugle injustice des hommes. Elle a attaché à cette peine la récompense d'une satisfaction intérieure, (*) qui est seule capable de la soutenir contre les dédains d'une stupide indifférence, ou d'une présomptueuse ignorance. En effet, sans les attraits des sciences, & un certain amour de la Vertu, qu'est-ce qui pourroit engager un homme sensé à consacrer, ses veilles sans intérêt, au seul bien du Public, qui fourmille de gens plus disposés à la critique qu'à la reconnoissance, à relever les moindres fautes, qu'à leur faire grace en faveur de ce qui doit plus mériter leur attention & leur applaudissement?

(*) *Virtutum præmium in ipsis est, & rectè facti merces est fecisse.*

La seconde raison de ceux qui préferent la seule Pratique à la Théorie, peut être sincérement déduite du fond de leur ignorance, parce qu'ils lui attribuent les effets de la Théorie qui leur est inconnue. D'AVILER, fameux Auteur en Architecture, nous en fournit une preuve, & un exemple comique à la page 274. *La sévérité des Regles de Géométrie*, dit-il, *est inférieure à la Pratique, comme LA METHODE DES CHERCHES RALONGE'ES VAUT MIEUX QUE LES FIGURES GEOMETRIQUES, d'autant qu'en cet Art la Pratique est préférable à la Théorie.* On ne peut s'empêcher de rire d'une pareille décision, qui montre évidemment que le Juge n'entend pas l'état de la question, & qu'il veut fronder ce qu'il ne connoît pas; en effet, s'il avoit sçû que la *Cherche ralongée* tirée du plein ceintre, du

ſurhauſſé ou du ſurbaiſſé, étoit une ellipſe très-Géométrique ; il n'auroit pas tenu ce langage ridicule. La plupart des gens ſans Théorie parlent & penſent comme lui, parce que faute de principes ils n'arrivent qu'avec de grands efforts & une longue ſuite de pratique à quelques foibles connoiſſances des choſes qui ſont les plus aiſées à ceux qui ont de la Théorie ; de-là vient qu'ils font grand cas des moindres, & ſe croyent de grands hommes pour s'être frayé quelques routes un peu aiſées dans la Pratique, quoique ces prétendus Inventeurs ne puiſſent s'aſſûrer de la juſteſſe ni de la réuſſite de leurs opérations tâtonnées, dont ils ne voyent ni la différence des cas, ni la preuve ; de ſorte qu'ils croyent ſouvent avoir bien réuſſi, lors même qu'ils n'ont fait qu'approcher de la vérité, & qu'ils n'ont pas pris la voye la plus ſûre & la plus courte ; cependant parce qu'ils ne connoiſſent pas d'autre moyen pour y parvenir que l'expérience, ils ne penſent pas qu'il y ait de meilleur maître, appuyez ſur le proverbe qu'ils citent à tout propos, *Experientia rerum magiſtra.*

Je ne prétend pas ici diminuer le mérite de l'expérience, j'en connois la néceſſité en pluſieurs choſes ; par exemple, en Phyſique elle fait appercevoir des objets & des effets ſur leſquels on n'étoit pas prévenu par le raiſonnement ; perſonne ne doute qu'elle ne ſoit indiſpenſablement néceſſaire dans les Arts qui dépendent de l'habitude, & dans ceux qui ſont problématiques, comme la guerre ; mais elle l'eſt beaucoup moins dans ceux qui émanent des ſciences ; c'eſt un guide équivoque, comme le bâton d'un aveugle, qui ne lui ſert à ſe conduire que très-imparfaitement, en ce qu'il ne lui indique pas ſi bien les objets qu'il ne puiſſe prendre l'un pour l'autre, & ſe précipiter, ſi le cas y arrive.

Cette diſtinction indique ce que l'on doit penſer ſur la Science & l'expérience néceſſaire à un Ingénieur ; puiſque ſon Etat tient à la Guerre & aux Arts dépendans des Mathématiques ; ce ſeroit mal décider contre la Théorie que de citer des gens élevés aux dignités par les actions militaires, quoique bornés à une

ſimple routine de conſtruction; les récompenſes dûes à la valeur, n'annoncent qu'une partie du mérite d'un homme de guerre, laquelle ne ſuffit par pour un Ingénieur. Ceux de l'Antiquité étoient ſçavans; leurs merveilleuſes inventions dans les Sieges nous le prouvent aſſez; & quoique depuis la décadence des Romains, les Sciences ayent en quelque façon fait divorce avec la Guerre (car il n'eſt plus de ces hommes propres à être ſur le Trône de la Juſtice, & à la tête des Armées) cette ſéparation n'aura jamais lieu à l'égard des Ingénieurs, c'eſt chez eux que doit ſubſiſter cet ancien accord de la Science & de la Guerre; s'ils ont beſoin de la bravoure, du bon ſens & de l'expérience d'un Guerrier, ils ont encore beſoin de la ſcience d'un Mathématicien. Sans la Géométrie, la Méchanique & l'Hydraulique de quoi ſont-ils capables dans la conſtruction des Forteresses & Places de guerre, que d'imiter ce qu'ils ont vû, & copier ſouvent des fautes? Les traces de l'aveugle expérience ne ſont pas rares, il n'y a gueres de Ville où l'on n'en reconnoiſſe quelques-unes.

Neque enim ingenium ſine Diſciplina, aut Diſciplina ſine ingenio perfectum artificem poteſt efficere. Vitr.

J'avancerai de plus, que les Sciences néceſſaires à la conſtruction ne ſont pas inutiles à la Guerre; elles ouvrent l'eſprit, fourniſſent des moyens induſtrieux pour les manœuvres & les ouvrages néceſſaires à l'attaque & à la défenſe des Places, que la ſeule valeur ne ſçauroit exécuter ſans ce ſecours. ARCHIMEDE étoit un Mathématicien de pure ſpéculation, qui n'auroit pas daigné deſcendre à la Pratique, s'il n'avoit été engagé par les ſollicitations du Roi HIERON ſon parent, de faire uſage de ſes connoiſſances pour l'invention des Machines de guerre; cependant ſes coups d'eſſai furent ſi bien des coups de maître, qu'au Siege de Syracuſe il dérouta, par la force de la Théorie, toute l'expérience de ces Ingéniers Romains, qui avoient fait valoir avec de grands ſuccès leur habileté dans la conquête des Places les plus fortes; ſes nouvelles Machines eurent tant d'effet, qu'il intimida & rebuta l'Armée de Marcellus, au point que ce Général renonça aux approches & aux aſſauts, forcé de ſe réduire à chercher par la longueur du Siege, ce qu'il ne pouvoit

voit obtenir par la force contre l'ingénieuſe réſiſtance que lui faiſoit Archimede. On peut lui en attribuer tout l'honneur, car Plutarque dit, qu'il étoit l'unique Auteur de la défenſe, que les Syracuſains n'étoient que comme le corps & les membres, dont lui ſeul étoit l'ame qui mettoit tout en mouvement, ſans qu'on fit uſage d'autres armes que des ſiennes. Cependant ce grand homme, ajoute-t-il, ne ſe glorifioit point de ces heureuſes nouveautés, il ne les regardoit que comme des *jeux de la Géométrie*, qu'il eſtimoit ſi peu en comparaiſon de la Théorie, qu'il crut ſe faire plus d'honneur d'en laiſſer des Ecrits, que la deſcription de ces merveilleuſes Machines, dont l'invention & l'uſage lui avoient acquis tant de gloire & un ſi grand nom, qu'il paſſoit pour un homme *doué non de ſcience humaine*, *mais de ſageſſe toute Divine*. Diſons-le ſans déguiſer, la ſeule expérience ne fait que de ſerviles imitateurs, qui étant embarraſſés dans les moindres choſes, & n'ayant de reſſource que dans le recueil de leur porte-feuille, donnent comme des aveugles dans le faux pour les projets, l'exécution, & le toiſé.

Plutarque *in vita Marcelli.*

Je dirai cependant ſans vouloir favoriſer l'ignorance, qu'un Ingénieur doit ſe borner à l'étude de ce qui peut être utile à la pratique, ſans ſe livrer à de vaines curioſités, de peur qu'entrainé par l'amorce du plaiſir des Découvertes, plus capables de flatter ſa vanité que de le conduire à une plus grande perfection des Arts, il ne ſoit ſouvent diſtrait & tenté de négliger ſon devoir; il doit ſes premiers ſoins à la ſolidité & à la propreté des Ouvrages dont il eſt chargé, & éviter l'écueil du mépris que les hautes ſciences inſpirent pour des occupations qui ſont à la portée des eſprits les plus bornés; il lui ſuffit d'être en état d'entendre & de mettre à profit les ouvrages des Sçavans & des Académies des Sciences, qui ont quelque rapport aux Arts néceſſaires à la conſtruction des Places, remettant les études aux Hyvers & aux autres tems de loiſir que nous laiſſe le ſervice du Roi.

Satis abundè is videtur feciſſe, qui ex ſingulis Doctrinis Partes & RATIONES *earum mediocriter habet notas, eaſque quæ neceſſariæ ſunt ad Architecturam, ut ſi quid de his rebus & Artib. judicare & probare opus fuerit, ne deſtituatur vel deficiat.* Vitr. l. 1. c. 1.

Parmi les connoiſſances qui nous ſont néceſſaires, celle de la Coupe des Pierres, quoiqu'une des plus négligées, n'eſt pas

une des moins importantes. J'ai reconnu par ma propre expérience qu'elle étoit auſſi indiſpenſablement néceſſaire à un Ingénieur qu'à un Architecte, parce qu'il peut être envoyé comme moi dans des Colonies éloignées, & même dans des Provinces où l'on manque d'Ouvriers capables d'exécuter certaines parties des Fortifications, où il faut de l'intelligence dans *l'appareil.* L'épreuve que je venois d'en faire à mon ſecond retour de l'Amérique, me fit naître l'idée d'en compoſer un Traité; invité à cette entrepriſe, premierement par l'extrême rareté des Livres ſur cette matiere, ſecondement par la maniere imparfaite dont elle a été traitée juſqu'à préſent. J'en dreſſois le projet, lorſque j'appris qu'un Architecte en alloit publier un, en effet, quelques mois après, celui de M. de La Rue parut; mais comme il n'eſt fait, de même que celui du P. Derand, (qui étoit pour ainſi dire le ſeul) que pour conduire la main ſans éclairer l'eſprit, je reconnus qu'il n'étoit pas aſſez Méthodique pour remplir l'attente du public, qui ſouhaitoit depuis long-tems un Ouvrage plus Géométrique; j'en fus convaincu lorſque les perſonnes à qui j'avois communiqué mon plan, m'engagerent à y travailler & à le ſuivre, parce que la différence en eſt ſi grande, qu'on peut dire, que ce n'eſt pas multiplier les mêmes eſpeces de Livres. Ceux que je viens de citer ſont faits pour les Ouvriers, & celui-ci pour les gens qui les doivent conduire, comme les Ingénieurs & les Architectes, que l'on doit ſuppoſer initiés dans la Géométrie.

Je ſçai que la routine & une certaine Géométrie naturelle tiennent lieu de ſcience aux appareilleurs dans les cas ordinaires; mais j'ai éprouvé qu'elle leur devenoit inutile dans ceux qui ne ſont pas énoncés dans les Livres, comme je le ferai remarquer lorſqu'il en ſera queſtion, & qu'ils ſeroient arrêtés tout court, ſi l'Ingénieur n'étoit en état d'y ſuppléer. Il doit donc prévenir la honteuſe néceſſité de ſe livrer à l'ignorance des plus expérimentés, qui n'en viennent à bout qu'à force de tâtonner & de démolir pluſieurs fois, finiſſant enfin par quelque difformité ou défaut de ſolidité. Ces cas ne ſont pas ſi rares qu'on ſe l'ima-

gine, puiſqu'ils me ſont arrivés; il n'eſt pas non plus extraordinaire d'en trouver des veſtiges, non-ſeulement dans les racordemens des vieux ouvrages avec des nouveaux, mais encore dans ceux qui ſont faits de ſuite.

Je ſuppoſerai, ſi l'on veut, que les Entrepreneurs fourniſſent de bons Appareilleurs; ne convient'il pas à la dignité d'Ingénieur, d'être en état de connoître & d'examiner ce qu'ils font, pour ordonner & décider de la meilleure conſtruction, & ne pas ſouffrir des fautes qu'ils peuvent faire malicieuſement, ou pour faire ſervir des pierres de rebut, ou pour s'épargner un peu plus de ſoin ? D'ailleurs cette matiere eſt aſſez intéreſſante pout mériter l'attention d'une juſte curioſité; on en pourra juger par ce qui ſuit.

SECOND DISCOURS.

Expoſition & diviſion du ſujet dont il s'agit.

L'IDE'E que l'on a atttaché au nom de la *Coupe des Pierres*, n'eſt pas ce qui ſe préſente d'abord à l'eſprit; ce mot ne ſignifie pas préciſément l'ouvrage de l'Artiſan qui taille la Pierre, mais la Science du Mathématicien qui le conduit dans le deſſein qu'il a de former une voute, ou un corps d'une certaine figure par l'aſſemblage de pluſieurs petites parties. Il faut en effet plus d'induſtrie qu'on ne penſe, pour qu'elles ſoient faites de façon que, quoique d'inégales figures & grandeurs, elles concourent chacune en particulier à former exactement une ſurface réguliere ou régulierement irréguliere, & qu'elles ſoient diſpoſées de maniere qu'elles ſe ſoutiennent en l'air, en s'appuyant réciproquement les unes ſur les autres, ſans autre liaiſon que celle de leur propre péſanteur; car les liaiſons de mortier ou de ciment doivent toujours être comptées pour rien. On voit par-là que cette Science tient ſes principes, premierement de la Géométrie, pour la connoiſance des lignes & ſurfaces courbes & droites & des corps ſolides qui doivent être diviſés.

Secondement de la Méchanique & de la Statique, pour mettre l'équilibre entre les portions des solides qui composent les voutes, en sorte qu'ils se soutiennent mutuellement sur les appuis qu'on leur fixe.

Notre dessein n'est pas ici de considérer les voutes comme un amas de corps pésans, qui font différens efforts les uns sur les autres : cette Théorie, quoique très-curieuse & très-utile, peut être réduite pour la pratique au petit nombre de propositions démontrées par Mrs. DE LA HIRE, PARENT, COUPLET & BELIDOR, touchant la poussée des voutes, à quoi l'on peut ajouter quelques observations sur les édifices qui subsistent depuis long-tems, quoiqu'un peu hors des regles du calcul, soit par la bonne qualité des matériaux qui font corps, lorsqu'on leur donne le tems de se lier, soit par la différente pésanteur de ceux des voutes & de leur piédroits, à quoi il faut avoir égard dans les calculs ; car si l'un est d'une pierre légere & l'autre d'une plus pesante, la poussée augmente ou diminue à l'égard des piédroits.

Nous ne considérons donc ici la Coupe des Pierres, que comme relative à la Géométrie, supposant seulement qu'un corps conique, piramidal, ou fait en coin, ne peut se faire un passage au-travers d'un trou, qui n'est pas si grand à son petit orifice que la base du corps qu'on y introduit. Cela supposé cette science se réduira :

1°. A connoître les lignes courbes formées par la division des solides, concaves & convexes coupés par des surfaces planes, ou par des surfaces courbes; c'est ce que l'on pourroit appeller d'un seul mot d'origine Grecque la *Tomomorphie*, ou *Figure des sections*, s'il étoit permis de forger des mots nouveaux pour éviter les périphrases.

2°. A décrire ces lignes courbes sur des surfaces planes, lorsqu'il est possible & nécessaire, ou sur des surfaces courbes lorsqu'elles ne peuvent s'adapter sur un plan dans toute leur étendue, ce que l'on pourroit appeller la *Tomographie*, ou *description des sections*.

3°. A trouver des moyens faciles pour repréfenter les folides & leurs divifions fur des furfaces planes, autant qu'il eft poffible de le faire ; or comme ils ne peuvent y être exprimés que très-imparfaitement, ces moyens fe réduifent, 1°. à la projection faite fur un plan par des lignes abaiffées parallelement entr'elles, & perpendiculairement au plan de la defcription, ce qu'on appelle fur un plan horifontal, *Ichnographie*, & fur un plan vertical, *Ortographie*. 2°. A la defcription des furfaces rangées féparément & dans toute leur étendue fur un plan, ce qu'on appelle *développement*, & qu'on pourroit appeller *Epipedographie*. 3°. A la defcription des angles des plans ou furfaces quelconques des folides entr'elles, ce qu'on pourroit appeller la *Goniographie*, *Defcription des angles*.

4°. A faire ufage de toutes ces fortes de repréfentations, pour parvenir à une fection des corps convenable à la conftruction des voutes, en appliquant les modeles des angles & des furfaces fur des folides le plus fouvent faits en parallelepipedes, pour les tailler & les réduire aux figures requifes, en abattant les parties excédentes, ce qui eft proprement l'Art de la *Coupe des Pierres & des Bois*, c'eft-à-dire, celui de faire des fections, qu'on pourroit appeller la *Tomotechnie*.

Ainfi en réfumant ces mots imaginés pour donner une idée nette & fimple du fujet dont il s'agit, nous traitons dans la premiere partie de cet Ouvrage, de la *Science*, & dans la feconde, de l'*Art* de la Stéréotomie, c'eft-à-dire, des fections des folides.

Nous divifons la premiere partie en deux Livres, l'un de la *Tomomorphie*, ou figures des fections, l'autre de la *Tomographie*, ou defcription des fections.

La feconde auffi en deux Livres, dont l'un eft la *Stéréographie*, ou defcription des folides, & l'autre de la *Tomotechnie*, ou l'Art de faire des fections.

Tels font les Sujets des quatre Livres de cet Ouvrage, fuivant l'ordre qui nous a paru le plus fimple & le plus naturel ; ce que nous tâcherons d'expliquer & de prouver par des démonf-

trations, qui ne ſuppoſent d'autre connoiſſance des parties des Mathématiques que celle de la Géométrie Elémentaire, telle qu'elle eſt dans Euclide & les Auteurs qui l'ont ſuivi.

Je ſçai qu'aujourd'hui la Géométrie Linéaire n'eſt plus gueres à la mode, & que pour ſe donner un air de Science, il faut faire parade de l'Analyſe ; cependant „ l'ancienne Géométrie, „ (dit un Sçavant) * quoique moins ſublime, moins piquan- „ te, même moins agréable, *eſt plus indiſpenſablement néceſſaire & „ plus ſenſiblement utile* ; c'eſt elle ſeule qui fournit à la nouvelle „ des fondemens ſolides „ particulierement dans la matiere dont il s'agit, où le calcul Algébrique ne pourroit être utile qu'entre les mains de ceux qui y ſont plus avancés que ne le ſont ordinairement la plûpart des gens qui ſe mêlent d'Architecture, pour qui nous avons entrepris cet Ouvrage. D'ailleurs elle conduit plus naturellement à la pratique des *Traits* de la coupe des ſolides, & fait ſelon moi plus d'impreſſion dans la mémoire, où les ſurfaces & les lignes ſe gravent plus profondément que les préceptes des formules Algébriques. Les Sçavans n'ont pas beſoin d'un petit Ouvrage, qui ne ſeroit qu'un jeu pour eux ; animés par l'ambition de la gloire des découvertes, ils ne s'occupent que des choſes difficiles, ſans s'embarraſſer de leur utilité dans les Arts ; ſur quoi M. de FONTENELLE fait cette judicieuſe remarque, que la Géométrie eſt aſſez étendue, mais qu'elle n'eſt pas aſſez appliquée aux uſages. Or puiſqu'ils n'ont pas traité notre matiere, j'ai crû rendre ſervice à ceux qui en ſont curieux, de leur en donner les principes dans un recueil compris dans le premier Tome, qui eſt ſuffiſant pour leur épargner la longue, ennuyeuſe & peu inſtructive lecture des grands Volumes in-folio, où elle eſt plus embroüillée par le détail de la pratique que par le fond de la difficulté ; ils en pourront tirer d'eux-mêmes la ſolution des Problêmes qu'on appelle *les Traits* de la Coupe des Pierres ; cependant en faveur de ceux qui aiment les ouvrages faits, nous y avons ajouté leur conſtruction dans la quatrieme partie, qui contiendra beaucoup plus de matiere en moins de Volume que les Livres du P. De-

* Fontenelle, Eloge d'Ozanam, *Mém. de l'Acad.*

Hiſtoire de l'Acad.

RAND & de M. DE LA RUE ; j'eſpere auſſi que la lecture en ſera plus agréable, parce qu'on y trouvera les démonſtrations, qui ne ſeront qu'une application des Théorêmes & des Problêmes contenus dans les trois premiers Livres. Au reſte, je n'ai recherché d'autre agrément dans la diction que celui du raiſonnement. Dans ce genre d'écrire on doit être plus occupé des choſes que des mots ; un Lecteur raiſonnable n'exige que de la netteté & une diction intelligible ; c'eſt à quoi je me ſuis le plus attaché. Peut-être n'aurai-je pas toujours réuſſi, dans un long Ouvrage il ſe gliſſe toujours quelque faute ; je le prie auſſi de pardonner celles de l'impreſſion, qui n'a pas été faite ſous mes yeux.

Il me reſte à donner quelque choſe à la curioſité que l'on peut avoir touchant l'origine de la Coupe des Pierres, ſur laquelle je vais expoſer mes conjectures pour conclure ce Diſcours Pré-l[illegible]aire.

TROISIEME DISCOURS.

De l'origine de la Coupe des Pierres, & de l'uſage qu'on en doit faire.

LE Bois eſt la matiere la plus naturelle & la plus commode pour la conſtruction des Bâtimens néceſſaires à l'habitation des hommes ; mais le déſir commun à tous ceux qui font des édifices conſidérables, d'en établir la durée pour un longtems, l'idée que les ouvrages de bois ſont ſujets à tomber en caducité par la pourriture, & la crainte qu'ils ne ſoient ravagés par les incendies, ont fait préférer les Pierres au Bois, où on a pû les lui ſubſtituer. Dans cette vûe on n'a ménagé ni la peine ni les grandes dépenſes pour les arracher des entrailles de la terre, les tranſporter & les tailler.

La néceſſité a auſſi forcé les hommes dans pluſieurs contrées, d'employer des Pierres au lieu de Bois, parce que la nature

leur a fourni plus de Carrieres que de Forêts. Cependant la maniere de bâtir avec des arbres a paru si naturelle, qu'on a regardé comme une beauté l'imitation de cette structure. C'est de-là que nous est venu l'usage des Colonnes dans l'Architecture antique, & celui des piliers ronds & des *Perches* dans la Gothique.

Pour rendre cette imitation plus parfaite, les Anciens faisoient leurs Colonnes, autant qu'ils pouvoient, d'une seule piece, comme sont les troncs des arbres; ils en usoient de même pour leurs Architraves, qu'ils substituoient aux principales poutres que les colonnes devoient porter. Il reste des vestiges des édifices des Egyptiens, des Grecs, & des Romains, qui font voir qu'ils y employoient des Pierres d'une grandeur énorme.

Dans les derniers siecles on a abandonné ces manieres de bâtir, trop difficiles par l'immensité des poids qu'il falloit transporter, & par la dépense des sommes extraordinaires qu'elles consommoient; on leur a préferé l'assemblage de plusieurs Pierres d'une grosseur plus maniable, & sans s'écarter du goût des Anciens, on a continué d'imiter les troncs d'arbres par des colonnes, mais on les a fait de *Tambours*, c'est-à-dire, de tranches de cylindre. On a de même imité les poutres par des Architraves; mais on les a fait de *claveaux*, qui se soutiennent en l'air, comme si le tout n'étoit que d'une piece continue. Cependant comme cette situation est trop forcée, & que la poussée en est grande, les Architectes les ont appuyées par des arcades, qui leur ont paru plus solides; & quoique par cette construction les colonnes & les architraves deviennent inutiles, ils les employent toujours pour ornement. Ce goût est aujourd'hui le goût dominant dans l'Europe, imité de quelques Monumens de l'Antiquité Romaine, que l'on a repris pour modele après un long intervalle d'un goût d'Architecture toute différente.

Les proportions des colonnes Antiques avoient paru dans les Gaules & dans d'autres endroits de l'Europe, trop massives & trop courtes, on leur substituoit des groupes de perches extrêmement longues & menues, & la difficulté d'imiter avec des

Pierres

Pierres : la ſituation horiſontale des poutres avoit fait rejetter les architraves, à la place deſquelles on faiſoit paſſer d'une perche à ſon oppoſée, des arcs de pierre ſaillans ſous les voutes, qui ſe croiſoient & ſe raſſembloient de différentes façons, imitant en cela les tonnelles en berceau, que l'on fait de branches d'arbres pliées en rond d'un côté à l'autre.

Le contour même des berceaux cylindriques leur ayant paru auſſi trop peſant, c'eſt-à-dire, faiſant trop d'effort pour écarter les murs, les Architectes de ces tems faiſoient leurs ceintres par deux arcs de cercles égaux, mais de différens centres, dans le deſſein d'en tenir les pentes plus rapides, & par ce moyen de diminuer de cet effort en les rendant auſſi plus minces & plus légeres : ils les traverſoient encore par d'autres parties de voutes, qui formoient quantité d'angles ſaillans, dont les arrêtes étoient cachées & fortifiées par des *nervures d'ogives*, des *arcs doubleaux*, des *tiercerons*, & des *formerets*, dont ils formoient une infinité de compartimens, aboutiſſans ſouvent à des culs de lampes ſuſpendus en l'air. Toutes ces naiſſances entrelaſſées, & les interſections des moulures demandoient une grande intelligence dans l'Art de la Coupe des Pierres ; d'où je conjecture, que c'eſt à l'Architecture *Gothique* que nous devons rapporter l'origine, ou du moins l'adoleſcence de cet Art. Ma raiſon eſt, qu'outre qu'il ne nous reſte pas de Monumens antiques où il ait été mis en en uſage, que pour des traits aſſez ſimples, c'eſt que dans l'énumération que VITRUVE fait des connoiſſances néceſſaires à un Architecte, il ne parle point de celle de *la Coupe des Pierres* ; en effet, la noble ſimplicité de l'Architecture des Anciens n'exerçoit pas beaucoup le ſçavoir-faire des Appareilleurs, qui n'avoient preſque que des voutes cylindriques ou ſphériques à conduire. La formation au contraire d'un grand nombre de figures biſarres & difficiles, qui ſe préſentoient à tous momens dans l'Architecture Gothique, leur a donné lieu d'en imaginer d'autres, pour tirer parti de l'irrégularité des emplacemens des Bâtimens, ou ſuppléer au défaut de place. Les angles, par exemple, qui ne paroiſſent pas des lieux propres

à y pratiquer des portes, n'ont pas empêché qu'on n'y ait vouté des paſſages ſans les émouſſer, ce qui paroît du premier abord contraire à la ſolidité; on a fait porter en l'air des cabinets ſur des *trompes* pour laiſſer une place libre au-deſſous; on a ſoutenu des eſcaliers d'une infinité de façons, & l'on a imaginé tant de choſes inconnues aux anciens, qu'on a trouvé aſſez de matiere pour en compoſer des Livres.

PHILIBERT DE LORME, Aumônier d'HENRI II, eſt, dit-on, le premier qui en ait écrit, non pas exprès, mais par occaſion dans ſon Traité d'Architecture, qu'il publia en 1567; on voit que cette date neſt pas fort ancienne; MATHURIN JOUSSE produiſit quelques Traits dans ſon Livre intitulé *Secrets d'Architecture*, imprimé à la Fleche en 1642. le P. DERAND, l'année ſuivante, mit cet Art dans toute ſon étendue pour les Ouvriers; BOSSE, (la même année) donna un ſiſtême tout différent, qu'il tenoit de DESARGUES, lequel, par ſon obſcurité & la nouveauté de ſon langage, ne fut pas goûté. Enfin M. DE LA RUE, en 1728, a redonné une partie des traits du P. DERAND, avec quelques autres nouveaux. Tous ces Auteurs n'ont produit qu'une ſimple pratique dénuée de toutes preuves. Le P. DECHALLES en 1672 fut le premier, & a été le ſeul juſqu'à préſent, qui y ait ajouté des démonſtrations; mais ſon Traité *de Lapidum ſectione*, inſéré dans ſon grand cours de Mathématique en Latin, n'eſt preſque qu'un extrait du P. DERAND, dont il a quelquefois copié juſqu'aux fautes, comme nous le ferons voir dans ſon lieu. Il paroit d'ailleurs avoir totalement ignoré la Théorie des courbes à double courbure, qui réſultent très-fréquemment de la rencontre des ſurfaces de différentes voutes, aux arrêtes de leurs enfourchemens.

Après avoir vû tous ces différens Ouvrages, il m'a paru qu'il reſtoit encore quelque choſe de mieux à faire.

Premierement, qu'il étoit à propos de donner une connoiſſance exacte de la nature des lignes courbes qui ſe forment aux arrêtes des voutes, tant à leurs faces qu'à l'interſection des doëles, de celles qui ſont compoſées de pluſieurs parties qui ſe croiſent,

pour sçavoir les tracer sur des plans lorsqu'il est possible, ou sur des surfaces courbes, lorsque ces lignes sont à double courbure, en quoi consiste la *premiere nouveauté* de ce Traité.

La seconde sera la correction des erreurs de plusieurs des anciens traits.

La troisieme, celle de la construction de plusieurs traits changés, & de quelques-uns qui n'ont pas encore paru.

Je puis compter pour quatrieme nouveauté, les démonstrations des traits, parce que le P. DECHALLES ne m'a précedé qu'en Latin, mais non pas en François, de sorte que pour me servir de l'expression de JOUSSE, les *Secrets d'Architecture* y sont tout-à-fait dévoilés.

La nouveauté de cet Art & les difficultés qu'il contient, engageoient les Architectes des deux derniers siecles à chercher des occasions de faire parade de leur science, persuadés que rien ne pouvoit mieux les rendre recommandables, que ces Ouvrages hardis où l'on ne pouvoir s'empêcher d'admirer la Coupe des Pierres; de sorte qu'ils affectoient d'en faire même sans nécessité. J'ai vû le tiers d'une tour quarrée, qu'on pouvoit faire porter de fond, soutenue par la seule coupe d'une plate-bande rampante, qui en élevoit un angle en l'air, & beaucoup de semblables témérités.

Les Architectes de notre tems ne trouvant plus tant de raison de se faire admirer par une science devenue plus commune, ou peut-être devenus plus sages, ont banni toutes ces hardiesses bisarres, qui n'ont d'autre beauté que celle de leur exécution, & qui non-seulement ne contribuent en rien à la décoration des édifices, mais leur sont encore préjudiciables, en ce qu'elles en augmentent les efforts & la charge; en effet il ne convient de mettre en œuvre les traits de porte-à-faux, comme les trompes, que losqu'on y est absolument contraint, ou pour quelque dégagement, ou pour éviter la dépense & l'incommodité de prendre la place dès les fondemens.

J'ajouterai encore, qu'il faut plutôt consulter le bon goût que d'affecter de la rareté & de la difficulté dans les Ouvrages,

à quoi femblent pencher nos Architectes modernes, qui courent à la nouveauté : La rencontre & l'intefection de différenrentes voutes n'eft pas toujours d'un bon effet. Un arc de cloitre, par exemple, de ceintre circulaire peu concave, traverfé de lunettes, & furmonté d'un cul-de-four, tel qu'on en voit à une Chapelle de l'Eglife de St. Sulpice, ne fait pas fi bien qu'une voute moins compofée. Des lunettes cylindriques qui traverfent une portion de voute fphéroïde, ou voute de four furbaiffée, ne fe préfentent pas bien de près, parce que les arrêtes d'enfourchement paroiffent *déverfées*, c'eft-à-dire, penchées à droite & à gauche, comme on peut le remarquer à la même Eglife de St. Sulpice; cette difformité diminue, lorfque la lunette eft vûe de bas en haut, & de plus loin, comme à St. Roch; mais elle n'eft pas ôtée totalement, & on ne le peut par la nature de la courbe, qui n'eft pas dans un plan, comme on le verra dans le cours du premier Livre.

Enfin on peut encore remarquer, que les voutes fphériques traverfées par deux berceaux qui fe croifent, ont un air nud & imparfait, fi elles ne font divifées par une corniche horifontale, qui retranche le fegment de fphere, & le mette, pour ainfi dire, à part des panaches; on en apperçoit le befoin au Noviciat des Jefuites, à Paris. Il feroit trop long de rechercher de femblables concours de voutes, qui ne fatisfont pas le coup d'œil fans le fecours de quelque correctif, quoique faites folidement & dans les regles de la bonne conftruction.

Ces remarques font plus utiles à l'Architecture Civile qu'à la Militaire, où l'on femble négliger la beauté pour la folidité; il ne feroit pas cependant mauvais que les Ingénieurs fiffent une étude de l'Architecture Civile; elle leur eft néceffaire à la conftruction des Bâtimens Militaires, dont ils font chargés dans les Villes de Guerre, comme Cafernes, Magafins, Hôpitaux, Logemens de l'Etat-Major, & même quelquefois des Eglifes, des Forts & Citadelles, qui font de même efpece que les Bâtimens Civils, dont ils ne différent que de nom. Ils peuvent même, lorfque la Cour le juge à propos, prendre la conduite des Bâ-

timens Civils publics ; mais ils ne doivent jamais ſe mêler de ceux des Particuliers, de quelque qualité qu'ils puiſſent être. Premierement parce qu'étant Officiers du Roi, à ſa ſolde dans le repos comme dans le travail ; * il eſt de l'équité qu'ils diſpoſent du loiſir qu'ils peuvent avoir à s'inſtruire au Cabinet des Sciences qui leur ſont néceſſaires, & des faits Hiſtoriques des Sieges, qui peuvent leur fournir des idées propres à les mettre en état de ſervir utilement à différentes deſtinations. En ſecond lieu, parce que rien n'avillit tant les Ingénieurs, que ces ſortes d'occupations qui les font ſoupçonner de vûes d'intérêt, & les compromettent avec des Ouvriers ou Gens à gages, qui rejettent ſur l'Ingénieur les fautes émanées de leur ignorance, ou du caprice du Propriétaire ; les exemples fréquens qu'on en voit devroient corriger les gens trop officieux. Enfin parce qu'en ſe mêlant d'Architecture Civile, ils ſemblent ſortir de l'Etat Militaire & nourrir le dédain ; que les gens d'épée ont pour ceux qui ſe mêlent des Arts Méchaniques. Ce n'eſt pas qu'il n'y ait dans le ſervice des occupations peu nobles : l'Officier d'Infanterie doit deſcendre aux petits ſoins de la propreté des ſoldats & des caſernes, celui de Cavalerie à celle des écuries & des chevaux, celui de Marine au radoub & à la conſtruction des Vaiſſeaux, celui d'Artillerie aux charronages & aux forges, & l'Ingénieur à tous les Arts qui ont du rapport à celui de bâtir ; ces fonctions auroient par elles-mêmes quelque choſe de vil ſuivant le préjugé du monde, ſi l'on n'étoit convenu dans les regles de l'honneur, qu'il n'y a rien d'abject de tout ce qui concerne le ſervice du Roi dans l'Etat Militaire : les Ingénieurs doivent ſe renfermer dans ces bornes, & laiſſer l'Architecture Civile à ceux qui en font profeſſion.

* *Annua æra habes, annuam operam edet, an tu æquum cenſes, militia ſemeſtri ſolidum te ſtipendium accipere ?* Tite-Live, l. 5. n. 1.

TABLE DES TITRES DU PREMIER TOME.

DISCOURS PRELIMINAIRES.

1°. SUR l'utilité de la Théorie dans les Arts relatifs à l'Architecture. *Page* j
2°. L'expoſition du ſujet dont il s'agit. jx
3°. De l'origine de la Coupe des pierres, & de l'uſage qu'on en doit faire. xiij

LIVRE I.

De la figure des ſections des corps coupés par des plans, ou pénétrés par des ſolides. Pourquoi la connoiſſance en eſt néceſſaire dans l'Architecture. 1
De la figure des voutes en général rapportée à celle des corps réguliers. 4
Des variations accidentelles aux voutes, comparées à celles des ſections des corps.

PREMIERE PARTIE.

Des ſections des corps par des plans.
CHAP. I. *Des Sections de la ſphere.* 8
CHAP. II. *Des Sections des cones coupés par des Plans.* 10
Définitions des points & des lignes remarquables dans les ſections coniques. 13
Expoſition de quelques propriétés des lignes menées au-dedans & au dehors des ſections coniques, des abſciſſes & des ordonnnées. 16
Propriétés particulieres à l'ellipſe. 18
Des tangentes des ſections coniques. 19
De quelques différences de poſition des ſections coniques dans les cones ſcalenes. 20

THEOREME I. La section plane elliptique faite dans l'intervalle de deux cones concentriques & semblables, *comme entre les surfaces concaves & convexes d'un cone creux d'égale épaisseur*, est une couronne comprise par deux circonférences d'ellipses qui ne sont pas équidistantes, & qui ne peuvent être concentriques que dans les cones scalenes, lorsque la section est perpendiculaire à l'axe. 22

THEOR. II. Une section conique donnée peut être celle d'une infinité de cones différens. 25

CHAP. III. *Des sections des cylindres coupés par des plans.* 28

THEOR. III. La section plane des especes de cylindres qui ont pour base une parabole ou une hyperbole, est une section conique de même espece. 31

THEOR. IV. La section d'un cylindre creux dont l'épaisseur est par-tout égale, coupé par un plan qui n'est pas parallele à sa base, est une couronne d'ellipse comprise par deux ellipses semblables & concentriques, mais non pas équidistantes, excepté la section souscontraire dans les cylindres scalenes, où elle est une couronne de cercle. 33

CHAP. IV. *Des sections planes de quelques corps régulierement irréguliers.* 35

THEOR. V. La section d'un sphéroïde & d'un conoïde régulier, coupé par un plan perpendiculaire à son axe, est un cercle; & s'il lui est parallele ou oblique, elle est une ellipse. 36

THEOR. VI. La section d'un corps cylindrique annullaire, dont l'axe est courbe en forme de circonférence de cercle, & qui est coupée par un plan perpendiculaire à celui qui passe par l'axe courbe, est une ovale du quatrieme ordre. 39

Des sections du coin-conoïde coupé par des plans. 42

THEOR. VII. Si le coin-conoïde est coupé par un plan perpendiculaire à celui du parallelogramme par l'axe, & parallele à un de ses côtés, la section sera un triangle rectangle. 44

THEOR. VIII. Si le plan coupant le coin-conoïde est perpendiculaire au parallelogramme par l'axe, & parallele au cercle de la tête du coin, la section sera

une ellipse. 44
Application à l'usage, & remarque sur une faute d'appareil dans le trait d'un Auteur moderne. 54

SECONDE PARTIE DU PREMIER LIVRE.

DES sections faites à la surface des corps par la pénétration d'autres corps. 57
De la nature des sections solides par la pénétration mutuelle des spheres, cones & cylindres. 58
CHAP. V. *Des sections solides des spheres, & premierement de leurs variations.* 63
Notez qu'il y a faute dans le N°. de ces deux Théorêmes.
THEOR. VII. La courbe qui résulte de la section faite par la rencontre des surfaces de deux spheres qui se pénetrent, est la circonférence d'un cercle. 64
THEOR. VIII. La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cylindre droit, dont l'axe passe par le centre de la sphere, est un cercle. 65
THEOR. IX. La section faite par la rencontre d'une sphere & d'un cylindre scalene, dont l'axe passe par le centre de la sphere, est une ellipsimbre. 66
THEOR. X. La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cylindre droit qui la pénetre de toute sa circonférence, & dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere, est une ellipsimbre. 71
Remarque sur la différence des cas qui peuvent arriver dans les cylindres scalenes. 77
THEOR. XI. La section faite par la pénétration d'un cylindre qui n'entre dans la sphere que d'une partie de sa circonférence, est une ellipsimbre composée. 78
De la rencontre des surfaces des spheres avec celle des cones.
THEOR. XII. La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cone droit dont l'axe passe par le centre de la sphere, est un cercle. 82
THEOR. XIII. La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cone scalene dont l'axe passe par le centre de la sphere, est une ellipsoïdimbre,

lipsoïdimbre, ou un cercle si elle est sous-contraire. 83

THEOR. XIV. La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cone qui la pénetre de toute sa circonférence, & dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere, est une ellipsoïdimbre. Si le cone est scalene, elle peut être un cercle. 85

THEOR. XV. La section faite par la rencontre des surfaces de la sphere & d'un cone dont l'axe ne passe pas par le centre de cette sphere, & qui ne la pénetre pas de toute sa circonférence, est une courbe composée de deux portions d'ellipsoïdimbres ou d'autres courbes de même nature, appartenant au cercle, à la parabole, ou à l'hyperbole. 90

CHAP. VI. *Des sections faites par la pénétration des cylindres entr'eux & avec les cones.*

THEOR. XVI. La section faite par la pénétration des cylindres de même nature, égaux ou inégaux, dont les axes sont égaux en longueur, & paralleles entr'eux, est un parallelogramme. 94

THEOR. XVII. La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes se coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un diametre égal & semblablement posé sur un plan par leurs axes, est une ellipse; & si l'un des cylindres est droit & l'autre scalene, ou tous les deux scalenes & de bases égales, elle peut être un cercle. 95

THEOR. XVIII. La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres droits inégaux, dont les axes se coupent perpendiculairement, est un cicloïdimbre. 97

THEOR. XIX. La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres inégaux, dont les axes se coupent obliquement & qui se pénetrent, de sorte que l'un entre dans l'autre de toute sa circonférence, est une ellipsimbre. 102

THEOR. XX. La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres, dont l'un pénetre l'autre de toute sa circonférence, perpendiculairement ou obli-

quement à ses côtés, sans que leurs axes se rencontrent, est une ellipsoïdimbre. 105

THEOR. XXI. La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres, dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de sa circonférence, & dont les axes ne sont pas paralleles, est une ellipsimbre composée. 110

Des sections faites par la rencontre des surfaces des cones & des cylindres qui se pénetrent. 112

THEOR. XXII. La section faite par la rencontre des surfaces d'un cone & d'un cylindre droit, ou d'un cone & d'un cylindre scalene de même obliquité sur leurs bases, dont les axes se confondent, est un cercle. 113

THEOR. XXIII. La section faite par la rencontre des surfaces d'un cylindre & d'un cône qui ne sont pas de même nature, c'est-à-dire, dont l'un est droit & l'autre scalene, & dont les axes se confondent, est une ellipsoïdimbre. 114

THEOR. XXIV. La section faite par la pénétration d'un cylindre & d'un cone, dont les axes se coupent obliquement, peut être dans un seul cas une ellipse plane. 116

THEOR. XXV. La section faite par la rencontre des surfaces d'un cone & d'un cylindre qui se pénetrent, en sorte que les axes de ces deux corps se croisent ou soient paralleles entr'eux, est une ellipsimbre. 118

THEOR. XXVI. La section faite par la pénétration d'un cone dans un cylindre, est une ellipsoïdimbre. 121

CHAP. VII. *Des sections faites par la pénétration des cones entr'eux.* 126

THEOR. XXVII. Les sections faites par la pénétration de deux cones inégaux (s'ils sont droits) où les côtés semblables (s'ils sont scalenes) se coupent à distances égales de leurs sommet, sont des sections planes. 127

THEOR. XXVIII. La section faite par la pénétration des cones droits inégaux, dont les axes se confondent, ou des cones scalenes inégaux, dont les axes se confondent & sont également inclinés à leurs bases, est un cercle. 128

THEOR. XXIX. La fection faite par la pénétration de deux cones inégaux mais femblables, dont les axes & les cotés font paralleles entr'eux, eft un paraboloïdimbre. *Page* 129

THEOR. XXX. La fection faite par la rencontre des furfaces de deux cones qui fe pénetrent, dont les axes font paralleles, & dont les côtés d'un des triangles par l'axe, rencontrent celui de l'autre (prolongé s'il le faut) eft une ellipfoïdimbre. 130

THEOR. XXXI. La fection faite par la rencontre des furfaces de deux cones dont les axes fe coupent perpendiculairement ou obliquement, en forte que les côtés prolongés de l'un ou de l'autre, ne fe rencontrent pas au-deffus & au-deffous du fommet d'un d'entr'eux, eft une ellipfoïdimbre. 131

THEOR. XXXII. La fection faite par la rencontre des furfaces de deux cones, dont les axes fe coupent obliquement, & dont un côté d'un des triangles par l'axe rencontre les deux de l'autre triangle, qui eft dans le même plan, où un des côtés étant prolongé au-deffus de fon fommet, eft une hyperboloïdimbre dans l'un & l'autre cone. 132

THEOR. XXXIII. La fection faite par la rencontre des furfaces de deux cones dont les axes fe coupent obliquement, & dont un des côtés des triangles par l'axe eft parallele à un des côtés de l'autre triangle de la fection par l'axe de l'autre cone, eft une courbe équivalemment différente dans chaque cone; fçavoir, une hyperboloïdimbre dans l'un des cones, & une paraboloïdimbre dans l'autre, felon que l'un des deux cones furpaffe ou eft furpaffé par l'autre dans l'allignement de ces côtés. 133

CHAP. VIII. *Des fections faites à la furface des fphéroïdes pénétrés par des fpheres, cones ou cylindres.* 134

THEOR. XXXIV. La fection faite par la rencontre des furfaces d'un fphéroïde avec celle d'une fphere, d'un cylindre & d'un cone, qui le pénetrent ou qui en font pénétrés, de maniere que les axes de ces corps fe confondent, eft un cercle. 135

THEOR. XXXV. La fection faite par la rencontre d'une

ſphere & d'un ſphéroïde dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, eſt une eſpece d'ellipſoïdimbre, c'eſt-à-dire, une courbe à double courbure, dont on peut marquer quelque rapport conſtant à une ellipſe. 136

THEOR. XXXVI. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre droit & d'un ſphéroïde dont l'axe eſt perpendiculaire à celui d'un cylindre, eſt un cycloimbre. 139

THEOR. XXXVII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un ſphéroïde, dont les axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'ellipſimbre, & peut être une ellipſe dans certains cas. 141

THEOR. XXXVIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un ſphéroïde & d'un cone dont l'axe rencontre celui du ſphéroïde perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement une courbe à double courbure, telle qu'eſt l'ellipſoïdimbre; mais dans certains cas elle peut être une ellipſe plane. 142

LIVRE SECOND.

De la deſcription des Lignes courbes formées par la ſection des corps. 144

PREMIERE PARTIE.

De la deſcription des ſections planes ſur des plans. 145

CHAP. I. *De la deſcription du cercle.* 146

PROBLEME I. Par trois points donnés tracer un arc de cercle par pluſieurs autres points trouvés ſans le ſecous du centre. 147

CHAP. II. *De l'ellipſe premierement conſidérée comme étant faite.*

PROBL. II. Trouver 1°. le centre, 2°. les diametres conjugués, 3°. les axes, 4°. les foyers d'une ellipſe donnée. 155

PROB. III. Par un point donné mener une tangente à

une ellipse donnée. 156

De l'ellipse considérée comme à faire.

PROBL. IV. Un diametre quelconque & une ordonnée à ce diametre étant donnés, trouver son conjugué. 158

PROBL. V. Les diametres conjugués étant donnés, trouver les axes de l'ellipse. 159

PROBL. VI. Un axe & un point à la circonférence de l'ellipse étant donnés, trouver l'autre axe. 160

PROBL. VII. Les axes d'une ellipse étant donnés, la décrire par plusieurs points ou par un mouvement continu. 162

PROBL. VIII. Les diametres conjugués étant donnés, tracer l'ellipse par plusieurs points ou par un mouvement continu sans connoitre les axes ni les foyers. 170

PROBL. IX. Allonger ou racourcir les ellipses en telle raison qu'on voudra, en sorte qu'elles soient toujours les sections d'un même cylindre. 172

De la parabole.

PROBL. X. L'axe d'une parabole & un point à sa circonférence étant donnés, la tracer par plusieurs points & par un mouvement continu. 176

De l'Hyperbole.

PROBL. XI. Le centre, le sommet & un point au contour de l'hyperbole étant donnés, la décrire par plusieurs points & par un mouvement continu. 179

PROBL. XII. Etant donnés le centre, le sommet & une ordonnée à l'hyperbole, ou seulement un premier diametre & une ordonnée, trouver les asymptotes & la décrire par plusieurs points. 181

PROBL. XIII. Par cinq points donnés qui ne soient pas en ligne droite, tracer une section conique quelconque par un mouvement continu, sans en connoître les axes, les diametres, les centres ni les foyers. 183

PROBL. XIV. Deux touchantes avec les points d'attouchement à une section conique & la direction d'un seul diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe sans connoître le centre de la section, ni la grandeur d'aucun

diametre. 185

PROBL. XV. Trois tangentes à une ſection conique, & leur point d'attouchement étant donnés, trouver celle des ſections qui doit les toucher, & les lignes néceſſaires pour la décrire. 188

CHAP. III. *De la deſcription de quelques courbes uſuelles dans l'Architecture, leſquelles ne ſont pas des ſections coniques.*

PROBL. XVI. Tracer une ovale du quatrieme ordre, formée par la ſection plane d'un corps cylindrique, annullaire, horiſontal, ou rampant, c'eſt-à-dire, hélicoïde. 191

De la Spirale. 195

PROBL. XVII. Tracer la ſpirale la plus ſimple & la plus uniforme, qu'on appelle la ſpirale d'Archimede. *Ibid.*

PROBL. XVIII. Allonger ou racourcir le contour de la ſpirale en telle raiſon que l'on voudra. 197

Des Arcs rampans. 205

PROBL. XIX. Changer en arc rampant un arc de cerclè ou d'une courbe quelconque. *Ibid.*

Des courbes qui conviennent à ces ſortes de voutes & d'arcades qu'on appelle Arcs rampans. 208

PROBL. XX. La direction des piédroits, la ligne de rampe & celle de ſommité d'un arc rampant étant donnés, décrire la ſection conique qui doit lui ſervir de ceintre. 210

CHAP. IV. *De l'imitation des courbes régulieres par des compoſitions d'arcs de cercles.* 213

PROBL. XXI. Deux axes étant donnés, imiter une ellipſe par un aſſemblage de quatre arcs de cercles. 215

PROBL. XXII. Imiter par deux arcs de cercles les portions d'ellipſes faites ſur deux diametres qui ne ſont pas des axes conjugués, dont l'un eſt terminé par deux tangentes à ſes extrêmites, & dont le conjugué eſt déterminé par une troiſieme tangente donnée de poſition. 216

PROBL. XXIII. La différence de hauteur des impoſtes & l'intervalle horiſontal des piédroits d'un arc rampant étant donnés, tracer un ceintre compoſé d'autant d'arcs de cercles que l'on voudra, inégaux

en rayons, mais égaux en nombre de degrés, ou si l'on veut d'une partie de plus avec certaines circonstances. 221

PROBL. XXIV. Imiter la spirale par des portions d'arcs de cercle. 222

CHAP. V. *De la division des sections coniques par des lignes droites perpendiculaires à leurs axes.* 1°. Pour le cercle. 225

PROBL. XXV. Par un point donné tirer une perpendiculaire à un arc de cercle dont on ne connoît pas le centre. *Ibid.*

LEMME. La perpendiculaire sur le milieu de la corde d'un arc de section conique, autre que le cercle, & qui n'est pas un des axes, est oblique à cet arc. 227

PROBL. XXVI. Par un point donné à la circonférence d'une section conique, tirer une perpendiculaire à son arc. 228

PROBL. XXVII. Par un point donné hors de la circonférence d'une section conique, lui mener une perpendiculaire. 230

Pour les spirales.

PROBL. XXVIII. Par un point donné au contour de la spirale, tirer une perpendiculaire à son arc. 235

Des divisions de quelqu'autres courbes usuelles par des perpendiculaires à leurs arcs. 240

SECONDE PARTIE DU SECOND LIVRE.

CHAP. VI. *De la Description des sections des corps, qui ne doivent ou ne peuvent être décrites que sur des surfaces concaves ou convexes, & de la projection.* 242

THEOREME. Les projections des lignes courbes qui sont dans un plan perpendiculaire à un ou plusieurs autres plans de description, sont des lignes droites dont les divisions faites par des paralleles menées par plusieurs points de ces courbes, sont toujours en même proportion avec les abscisses coordonnées. 244

THEOR. La projection d'un cercle qui n'est pas paral-

lele à ſon plan de deſcription eſt une ellipſe, & au contraire celle de l'ellipſe peut être un cercle, & celle des ellipſes, paraboles, ou hyperboles eſt une courbe d'une même eſpece plus ou moins allongée. 246

De la deſcription du cercle ſur les ſurfaces concaves ou convexes de la ſphere, du cone, & du cylindre.

PROBL. XXIX. Par deux points donnés ſur la ſurface d'une ſphere décrire un cercle. 248

PROBL. XXX. Par un point donné ſur la ſurface d'un cylindre tracer un cercle. 252

PROBL. XXXI. Par un point donné à la ſurface d'un cone faire paſſer un cercle. 257

PROBL. XXXII. Etant donné un cone droit ſur une baſe elliptique, trouver la poſition d'un plan incliné ſur l'ellipſe, dont la ſection dans le cone ſoit un cercle. 262

De la deſcription de l'ellipſe ſur le cylindre & le cone.

PROBL. XXXIII. Le grand axe d'une ellipſe avec un point à la ſurface du cylindre, dont la diſtance à un des axes eſt connue, étant donnés, y tracer une ellipſe. 268

PROBL. XXXIV. Un point étant donné à la ſurface du cone qui ſoit à l'extrêmité du grand axe de l'ellipſe donné, ou d'une ordonnée connue, tracer l'ellipſe ſur la ſurface courbe du cone. 274

PROBL. XXXV. Un point étant donné à la ſurface d'un cone pour ſommet d'une parabole, décrire cette courbe ſur la ſurface concave ou convexe. 273

PROBL. XXXVI. Le premier axe d'une hyperbole & un point qui ſoit une de ſes extrêmités étant donnés à la ſurface du cone, tracer cette courbe ſur la ſurface concave ou convexe. 275

TROISIEME PARTIE DU SECOND LIVRE.

CHAP. VII. *Des ſections qui ne peuvent être décrites que ſur des ſurfaces courbes &, par le moyen de la projection, ſur des ſurfaces planes.*

PROBL. GENER. Trouver tant de points que l'on voudra du contour des courbes à double courbure, faites à la ſurface des ſpheres, cones, & cylindres qui ſe pénetrent mutuellement. 279

Du Cicloïmbre.

PROBL. XXXVII. Tracer un cicloïmbre ſur deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent à angle droit. 281

PROBL. XXXVIII. Tracer une ellipſimbre formée par la ſection d'une ſphere, pénetrée par un cylindre dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere. 284

PROBL. XXXIX. Les diametres de deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent, & l'inclinaiſon de leurs axes qui ſe rencontrent étant donnés, tracer l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 287

PROBL. XL. Les diametres de deux cylindres qui ſe pénetrent de toute leur circonférence, ſans que leurs axes ſe rencontrent, & l'inclinaiſon de leurs côtés entr'eux étant donnés, tracer l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 290

PROBL. XLI. La poſition d'un cylindre dans un cone qu'il pénetre étant donnée, décrire l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 293

Des ellipſimbres compoſées.

PROBL. XLII. Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration d'une ſphere & d'un cylindre dont la circonférence n'entre qu'en partie dans la ſphere. 301

PROBL. XLIII. Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration de deux cylindres, dont la circonférence de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre. 303

Des ellipsoïdimbres.

PROBL. XLIV. Tracer une ellipsoïdimbre formée par la pénétration de la sphere & du cone dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere. 306

PROBL. XLV. Décrire une ellipsoïdimbre formée par la pénétration du cone dans le cylindre, à la rencontre de leurs surfaces. 307

PROBL. XLVI. Décrire une ellipsoïdimbre formée par l'intersection des surfaces de deux cones dont les axes se coupent. 309

PROBL. XLVII. Tracer une ellipsoïdimbre composée sur les surfaces du cone & de la sphere qui se pénetrent. 309

De la description des hélices & limaces. 310

PROBL. XLVIII. Tracer une hélice sur un corps cylindrique. 311

PKOBL. XLIX. Tracer une limace sur un cone ou sur une sphere ou sphéroïde. 313

LIVRE TROISIEME.

DE la description de la division des solides. 315

De l'arrangement des desseins dans l'épure. 317

CH. I. *De la projection en général.* 318

CH. II. *De l'Ichnographie* ou *du Plan.* 322

Des différences respectives des ceintres. *Ibid.*

De l'arc droit. 324

Regles du dessein de l'épure. 326

Remarque sur le choix du ceintre primitif. 327

2e. Regle du *Plan.* *Ibid.*

3e. Regle. 328

4e. Regle. 330

5e. Regle. 332

PROBL. I. Par un point donné auprès de deux lignes convergentes, en mener une troisieme qui tende au même sommet de l'angle qu'elles feroient si elles étoient prolongées 335

6e. Regle. *Ibid.*

7e. Regle. 336
8e. Regle. 337
CHAP. III. *De l'Ortographie. 1°. Du Profil.* 338
Premiere regle pour les voutes cylindriques. 339
2e. Regle. 340
3e. Regle. 341
Des profils des berceaux à double obliquité. 342
Probl. II. Réduire toutes les différentes obliquités de biais, de talud & biais, de biais & descente, de descente, talud & biais en une seule, pour ne faire qu'un profil qui exprime toutes ces obliquités & conserve les mesures que l'on y doit prendre. 343
Des profils des voutes coniques. 349
4e. Regle. 350
Probl. III. Tracer le profil d'une voute conique à double ou triple obliquité de biais, talud & descente. 352
Remarque sur les profils en général. 354
De l'élévation. 355
CHAP. IV. *Des moyens de faire les plans, profils & élévations des figures irrégulieres.* 357
Probl. IV. Tracer sur un plan un contour égal à une section d'un corps quelconque, *ou en termes de l'Art*, lever un profil. 360
De la supposition des surfaces planes, *en termes de l'Art*, des doëles plates. 362
De la supposition des surfaces cylindriques, de base quelconque, pour parvenir à la formation des surfaces terminées par des courbes à double courbure. 364
CHAP. V. *De l'Epipedographie*, en termes de l'Art, *du développement.* 373
Probl. V. Trouver une suite de lignes droites qui approchent de plus en plus de la rectification d'un arc de cercle donné, tant en dessus qu'en dessous. 374
Du développement des corps compris par des surfaces planes. 375
Probl. VI. Faire le développement d'une pyramide quelconque droite ou scalene. 378

PROBL. VII. La base, la hauteur & la projection du sommet d'un cone scalene étant données, déterminer le plus long & le plus petit côté de sa surface. 381
Remarques sur certains points des courbes développées sur le cone. 384
Du développement des prismes. 385
COROLL. Faire le développement du cylindre scalene. 387
Des développemens composés de deux ou trois especes de surfaces d'un corps coupé en plusieurs parties dans son épaisseur, comme sont dans les voutes celles des doëles, des lits, & même des extrados.
Remarque sur les développemens composés. 393
Du développement des Polyedres & de la sphere. 395
Remarques sur l'usage des développemens. 397
PROBL. VIII. Le diametre de la base d'un cone droit tronqué, & l'inclinaison d'un côté sur ce diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra à la circonférence de la couronne de cercle qui en exprime le développement, sans en avoir le centre, ou ce qui est la même chose, le sommet du cone. *Ibid.*
Du développement des hélices. 400
LEMME. Le développement d'une hélice cylindrique réguliere sur la surface du cylindre droit développé, est une ligne droite; celui des irrégulieres de la seconde espece & des limaces, est une ligne courbe. 400
PROBL. IX. Faire le développement d'une hélice quelconque sur une surface cylindrique ou conique développée. 403
PROBL. X. Les élévations de deux faces opposées dans des plans paralleles entr'eux étant données en projection sur un même plan vertical, & la projection horisontale de leurs intervalles étant donnée, trouver la figure de chaque partie de développement des surfaces d'une voute divisée en plusieurs voussoirs, tant apparente qu'intérieure. 404
Premier exemple: des voutes coniques droites. 405

Second Exemple : des voutes coniques ſcalenes à double obliquité ; telles ſont les deſcentes biaiſes ébraſées. 409
PROBL. XI. La projection horiſontale d'un polyedre & de ſes diviſions étant donnée avec l'élévation de ſes faces, trouver toutes les ſurfaces dont chacune de ces parties eſt enveloppée. 416
Premier exemple : d'un berceau droit ou biais. *Ibid.*
Second Exemple : d'un berceau en deſcente. 419
Troiſieme exemple : d'une voute en canoniere en deſcente. 423
Quatrieme exemple : d'une voute ſphérique réduite en polyedre par des doëles plates. 425
CHAP. VI. *De la Goniographie, ou deſcription des angles*, en termes de l'Art, *des moyens de trouver les biveaux.* 429
LEMME. L'angle d'inclinaiſon de deux ſurfaces quelconques, planes ou courbes, meſuré par des lignes obliques à leur commune ſection, eſt plus aigu que celui qui eſt meſuré par des perpendiculaires à cette commune ſection, menées à un même point. 430
PROBL. XII. Trois angles plans qui forment un angle ſolide étant donnés, trouver les angles d'inclinaiſon de ces plans entr'eux, *ou en termes de l'Art pour la Coupe des Pierres*, trois panneaux étant donnés, trouver les biveaux de leurs aſſemblages. 433
Seconde maniere; en réduiſant les plans donnés en triangles pour en former des pyramides. 435
PROBL. XIII. Deux angles rectilignes perpendiculaires entr'eux, qui ont leur ſommet commun & un côté de l'un dans le plan de l'autre, étant donnés, trouver l'angle des deux plans qui peuvent paſſer par leurs côtés. 440
De la ſituation des angles des plans, *à l'égard de l'horiſon.* 442
LEMME. Un angle rectiligne en ſituation quelconque, eſt égal à la ſomme ou au ſupplément à deux droits, des angles que ſes côtés prolongés font avec une ligne horiſontale ou une verticale. 442
PROBL. XIV. Trouver les biveaux de toutes ſortes de

voutes ſans former le ceintre de l'arc droit. 446
Premierement ceux de lit & de doële. *Ibid.*
Premier cas, pour les voutes en berceau de niveau. *Ibid.*
Second cas, pour les berceaux en deſcente. *Ibid.*
Secondement pour les voutes coniques. 447
Troiſiemement pour les angles ſaillans ou rentrans, faits par la rencontre de deux berceaux. 448
Quatriemement, pour les angles ſaillans ou rentrans formés par des doëles plates, dont les naiſſances ne ſont pas de niveau, mais l'une de niveau & l'autre rampante; *tel eſt l'enfourchement d'un berceau de deſcente qui en rencontre un autre de niveau.* 449

FIN.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, l'Ouvrage intitulé *la Théorie & la Pratique de la Coupe des Pierres & des Bois*, par M. FREZIER. Le ſuccès qu'a eu la premiere Edition de cet excellent Ouvrage, me fait juger que la ſeconde ne ſera pas moins favorablement reçûe, ſur tout après les changemens & augmentations que ſon Sçavant Auteur a jugé à propos d'y faire. A Paris ce 14 Juin 1752.

DEPARCIEUX.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos Amés & Féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Notre Libraire à Paris, Nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & réimprimer des Ouvrages qui ont pour titre *Architecture Françoiſe par M. Blondel; Cours d'Architecture par Daviler*, *avec un Dictionnaire des termes d'Architecture par le même; Méthode pour apprendre le le Deſſein, avec des Figures & des Académies*; TRAITE' DE STEREOTOMIE *par M. Frezier; Architecture Moderne. De la décoration des Edifices, par M. Blondel; la Théorie & Pratique du Jardinage par M. le Blond. Œuvres de M. Belidor; ſçavoir, le Cours de de Mathématique: la Science des Ingénieurs: le Bombardier François: & l'Architecture Hydraulique. Cours de Science Militaire par M. le Blond, contenant l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier, la Fortification, l'Artillerie, l'Attaque & la Défenſe des Places, la Caſtramétation, la Tactique, &c. Recueil des Pierres gravées du Cabinet du Roy*, s'il nous plaiſoit de lui accorder nos Lettres de privilege pour ce néceſſaires. A ces cauſes, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer & réimprimer leſdits Ouvrages, autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de dix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance: comme auſſi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire leſdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit d'augmentation, correction, changemens ou autres, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion & réimpreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele ſous le contre-ſcel des

Présentes : que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, qu'avant de l'exposer en vente, les Manuscrits & Imprimés qui auront servi de copie à l'impression & réimpression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & Féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & Féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le sieur de MACHAULT, Commandeur de nos Ordres ; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée ; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Sécretaires, foi soit ajoutée comme à l'original : Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Versailles le vingt-uniéme jour du mois d'Août, l'an de Grace mil sept cent cinquante-deux, & de notre Regne le trente-septiéme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Regiſtré sur le Regiſtre XIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 19. fol. 12. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28. Février 1723. A Paris le 29. Août 1752.

HERISANT, Adjoint.



TRAITÉ DE STEREOTOMIE A LUSAGE DE L'ARCHITECTURE.

LIVRE PREMIER.

DE LA FIGURE DES SECTIONS DES CORPS, coupés par des Plans, ou pénétrés par des ſolides.

Pourquoi la connoiſſance en eſt néceſſaire dans l'Architecture.



DANS les Arts qui dépendent des Sciences, ſi l'on ne fait précéder de bons principes, comme autant de lumieres qui éclairent l'eſprit, on fait rarement du progrès, parce qu'on n'y avance qu'à tâtons ; & de même que l'ennui qui accompagne les ténebres, augmente la fatigue d'une route qu'on parcourt dans l'obſcurité, une étude ſans principes devient pénible & capable de rebuter, lorſque la néceſſité de s'inſtruire ne fournit pas de la perſévérance.

C'eſt pour cette raiſon (ſi je ne me trompe) que les Livres

que nous avons ſur la coupe des pierres, n'ont rendu cette matiere ni facile ni agréable aux Lecteurs, & que bien des gens qui ont voulu en tâter, s'en ſont rebutés. En effet, il n'eſt pas étonnant qu'une lecture ſoit laſſante & preſqu'inſupportable, où l'on ne trouve qu'un tiſſu de pratiques ſeches, ſurchargées d'opérations, dont on ne voit ni la fin ni la raiſon, ſi l'on n'eſt déja en état de la pénétrer: ajoutez à cela la complication d'une infinité de lignes ſurchargées de chiffres pour les indiquer, & de meſures qu'il faut porter ici & là, ſans ſçavoir à quel propos; enfin où il n'y a aucune vérité à connoître par les inſtructions de l'Auteur, qu'il faut croire ſur ſa bonne foi, ne donnant d'autre preuve de la juſteſſe de ſon opération, que le témoignage de la gravure des Planches de ſon Livre; il n'eſt pas étonnant, dis-je, qu'une telle conduite ne mene qu'au dégoût, & que cet Art acceſſible aux moindres écoliers de Géométrie, paroiſſe hériſſé d'épines qui en défendent les approches.

Pour lever ces difficultés nous avons cru qu'il falloit donner une notion claire de la figure des voutes, & des parties qui les composent, en les comparant à celle des corps ronds, qui ſont connus de tout le monde, la Sphere, le Cône & le Cylindre, l'Anneau & l'Hélice, coupés & diviſés par des plans, ou par d'autres corps qui peuvent les pénétrer. Et lorſque la figure des voutes eſt irréguliere, nous avons tâché de la déſigner par une génération ſi expreſſive, qu'on peut la concevoir facilement. Ainſi l'on a déja pour point de vûe la figure qu'on ſe propoſe de faire, telle qu'elle doit être lorſque la voute eſt achevée, ce qu'il falloit en quelque façon deviner dans le Livre du P. DERAN, à quoi M. DE LA RUE qui a ſenti ce défaut, a tâché de remédier par quelques deſſeins en perſpective, qui aident beaucoup l'imagination; mais parce qu'on ne peut exprimer qu'à pluſieurs repriſes toutes les faces d'un ſolide ſur un plan, il reſte encore beaucoup à ſuppléer à ces ſortes de repréſentations.

La figure des voutes étant bien conçûe, il n'eſt point de meilleur moyen de faire connoître celle des parties dont elles doivent être compoſées, pour ſubſiſter & former un tout uniforme & ſolide, que d'en venir à l'examen des ſections formées par la diviſion des corps, faite de maniere qu'ils n'en ſoient pas détruits ni défigurés. Une comparaiſon familiere expliquera nettement ce diſcours.

Je me repréſente, par exemple, une moitié de melon que

eſt ordinairement une moitié de ſphéroïde ; je la coupe par tranches ſuivant la longueur de ſes côtes ſur une table, où cette moitié eſt poſée à plat, & je vois que pourvû que j'empêche les deux premieres tranches de gliſſer, la moitié du melon ſubſiſtera en ſon entier, quoique coupée en pluſieurs tranches à fond. Non content de l'avoir coupé en long, je la recoupe en travers, & je vois que ſi j'empêche encore les premiers morceaux de gliſſer ſur la table, cette moitié de ſphéroïde ne ſe défigure point, & ſubſiſte encore dans ſa rondeur, ſans tomber en pieces ; d'où je conclus, que ſi je fais de ſemblables morceaux avec de la pierre ou du bois, & que je les raſſemble dans le même ordre, je pourrai former cette figure de melon, que les Géometres appellent une ſphéroïde. Mais pour former ces parties, il faut que j'aye recours à une ſcience qui m'apprenne quelle ſera la figure que le paſſage de mon couteau formera dans le melon, à chaque diviſion que j'en ferai ; & comme il n'importe que je me ſerve d'un couteau ou d'une feuille de fer-blanc, ou d'un autre corps mince de figure plane, je puis appeller cette coupure *la Section d'un plan*, ou faite par un plan ; j'examine enſuite quelle ſera cette ſection en tournant différemment la feuille de fer-blanc, qui me ſert de couteau ; je vois par la ſeule Géométrie naturelle, que ſi je coupe le melon en travers, la ſection ſera un demi-cercle, & un cercle entier, ſi le melon étoit entier ; je connois donc dès ce moment, que toutes les tranches en travers contiennent une portion de cercle plus ou moins grande, ſuivant que les tranches en longueur ſont plus ou moins épaiſſes ; je vois auſſi que ma coupure en long fait un ovale, & je conclus que chacune des tranches dans ce ſens eſt une portion d'ovale plus ou moins grande, ſuivant l'épaiſſeur des coupures en travers, & plus ou moins courbe à meſure qu'elle s'approche des bouts du melon ou du milieu, étant évident qu'elle ſe creuſe vers les bouts, & s'applatit vers le milieu. Je pouſſe ma curioſité plus loin ; ſi au lieu de la trace plane de mon couteau je l'enfonce de biais, & le fais tourner ſur la pointe immobile au fond, pendant que je le tourne en rond du côté du manche, comme pour faire un trou en pain de ſucre renverſé, je vois que je puis ôter & remettre cette piece & ſes ſemblables, ſi j'en veux faire de concentriques à celle-ci, qui s'emboiteront comme des cornets les unes dans les autres, ſans que le melon ſoit défiguré, quand

même je les couperois encore en travers & en long, en passant toûjours par le même point du milieu avec la feuille de ferblanc, pourvû que j'empêche les premiers morceaux qui posent sur la table, de glisser.

Je connois donc que je puis diviser ce melon en portions coniques s'il est bien rond, ou en coniques un peu allongées comme des cornets applatis s'il est oblong; & cependant faire ensorte que le tout subsiste dans sa forme, ce qui me conduit à l'examen de la différence de ces cones, & de la section qu'ils peuvent faire par leur pénétration dans le sphéroïde, sur quoi je commence à m'appercevoir qu'une telle section n'a plus la simplicité de celle de la sphere, ou du sphéroïde coupé par des plans, & que j'ai besoin du secours de la Géométrie pour la connoître.

De ce petit exemple de comparaison des corps coupés par différentes sections, il suit naturellement qu'on doit en distinguer de deux sortes.

Les unes faites par des plans qui peuvent couper les solides suivant différentes inclinaisons à leurs axes & à leurs côtés, & produire différentes figures.

Les autres par des corps qui pénetrent d'autres corps semblables ou différens; comme dans cet exemple le cone pénetre le sphéroïde. Les courbes qui sont formées par ces sections, sont l'objet principal de notre ouvrage; parce qu'elles se forment effectivement dans les ceintres des voutes sur leurs faces, ou dans les rencontres de celles qui se croisent; car chacune de celles qu'on met en usage dans l'Architecture, est comparable à quelque corps régulier, comme nous l'allons expliquer.

De la Figure des voutes en général, rapportées à celle des corps réguliers.

LES voutes peuvent être considérées comme des solides *simples*, qui ont une principale surface, d'où elles tirent leur dénomination.

Ou comme *composées* de différentes surfaces qui se croisent, ou qui se rencontrent.

La surface qui donne le nom aux voutes, est celle qui doit

être vûe par-deſſous, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Doële*, par Analogie aux doëles des tonneaux, auſquels la plupart ont quelque rapport ; ce n'eſt pas que les voutes ſoient néceſſairement courbes, car il y en a de planes ; mais celles-ci ont toûjours ſi peu d'étendue, qu'elles ſemblent n'être pas aſſez conſidérables pour entrer en compte dans l'énumération des différentes eſpeces de voutes.

Parmi les voutes ſimples il y en a de *régulieres* circulaires, dont les unes ſont, 1°. des moitiés de cylindre ; 2°. des moitiés de cônes ; 3°. d'autres enfin des hémiſpheres ou portions de ſpheres.

La ſeconde eſpece des voutes ſimples eſt de celles qui ſont *régulierement irrégulieres*, dont les unes imitent le cylindre, les autres la ſphere, les autres le cône ; telles ſont celles dont le ceintre n'eſt ni circulaire ni elliptique, mais de quelqu'autre courbe géométrique ou méchanique, comme pourroit être la *chaînette* ou la parabole qui lui reſſemble fort, & qui eſt la plus convenable pour mettre en équilibre des vouſſoirs égaux. Telles ſont encore les voutes *annulaires*, qu'on appelle *ſur le noyau*, leſquelles ſont des cylindres courbés ſur leur axe, ou les mêmes tournés en *hélice*, c'eſt-à-dire en *vis*, qui s'élevent au-deſſus du plan ſur lequel elles poſent ; telles ſont auſſi les voutes ſphériques ſurhauſſées ou ſurbaiſſées, ou ſur un plan elliptique, qui ſont des *ſphéroides*, & d'autres qui peuvent être des conoïdes.

La troiſiéme eſpece des voutes ſimples eſt celle des *irrégulieres*, qui participent plus ou moins de chacune de ces figures, de maniere qu'elles peuvent toujours être comparées en quelque choſe aux cônes, aux ſpheres ou aux cylindres, & tenir en même-tems des unes & des autres ; telles ſont la plupart des *arrieres vouſſures*.

Les voutes *compoſées* ne ſont qu'un aſſemblage de ces ſortes de figures ſituées différemment les unes à l'égard des autres, & contigues par des jonctions angulaires, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *enfourchemens*, parce que les pierres qui ſervent aux jonctions ont deux branches, comme une fourche.

En un mot nous ne concevons aucune figure de voute, qu'on ne puiſſe rapporter à la ſphere, au cône & au cylindre, & c'eſt dans ce rapport que nous faiſons conſiſter leur *difference eſſentielle*.

Quant aux différences accidentelles, elles ſeront toûjours pro-

duites par la différente position de leurs faces, semblables à celles des sections des corps par la différente position des plans coupans, & celles de leurs arrêtes d'enfourchemens, comme celles des courbes formées à la surface des corps qui se pénetrent, en quoi consiste la principale difficulté de l'Architecture des voutes.

Des variations accidentelles aux voutes, comparées à celles des sections des corps.

S'IL ne s'agissoit dans la coupe des pierres que de former des corps réguliers, il ne seroit pas fort nécessaire de s'embarrasser de la figure des sections des corps, un très-petit nombre suffiroit ; mais parce que la principale difficulté vient des irrégularités de leurs angles rectilignes, curvilignes & mixtes, à la jonction des surfaces planes ou courbes, qui les croisent ou qui les terminent, on peut dire que la Théorie des sections est la base de cet Art.

Pour rendre ce discours sensible nous pouvons donner pour exemple les variations qui arrivent à une voute en berceau circulaire, laquelle est une moitié de cylindre, par la seule position du mur qui le termine par un bout, où se forme son ceintre de face. Supposant ce mur à plomb & perpendiculaire à la direction du berceau, si on vient à le démolir pour le refaire en *talud*, il arrivera deux changemens, l'un à la courbure du ceintre de face, qui ne sera plus circulaire, mais elliptique ; l'autre aux angles des pierres qui composent cet arc, lesquels ne seront plus droits verticalement, mais changeront continuellement à chaque lit, devenant toûjours plus aigus depuis l'imposte jusqu'à la clef, où ils seront égaux à l'inclinaison du mur à l'horison, c'est-à-dire au talud. Si au lieu de refaire ce mur en talud on le tourne de *biais*, c'est-à-dire obliquement à la direction du berceau, il arrivera de même deux changemens, l'un à l'arc de face, qui de circulaire deviendra elliptique d'une ellipse plus ou moins allongée, suivant l'obliquité du mur ; l'autre aux lits des pierres, dont les angles au lieu d'être droits horisontalement comme auparavant, deviendront aigus d'un côté, & obtus de l'autre, augmentant continuellement d'un côté à l'autre à chaque lit de voussoir. Si on faisoit le mur *biais & en*

talud, il ſe feroit encore un autre changement dans le ceintre & dans les angles des pierres angulaires, qu'on appelle *écoiçons*. Par où l'on voit que ſans toucher à la voute, la courbe du ceintre & les angles des lits des vouſſoirs peuvent changer de trois manieres par le ſeul changement de poſition du mur, qui eſt une ſurface plane; telle eſt parfaitement la ſection d'un cylindre par un plan, ſans en faire l'application au berceau.

Il eſt aiſé de concevoir, que ſi au lieu d'un mur de face droit on en faiſoit un courbe, comme une portion de tour creuſe ou convexe, où ſi l'on y faiſoit aboutir une autre voute; les courbes de leur jonction ou enfourchemens, pourroient infiniment varier, auſſi bien que les angles des ſurfaces coupées par pluſieurs lits de vouſſoirs, qui pourroient être rectilignes, mixtes ou curvilignes, d'une infinité d'ouvertures & de courbures différentes.

Pour nous énoncer en termes convenables à la théorie, nous conſidérons le mur comme une ſurface plane, que nous appellons un *plan*, & la voute comme un cylindre, cône ou ſphere, ſelon qu'il convient à la figure, & au lieu de dire une face biaiſe en talud ou à plomb, nous dirons qu'un cylindre eſt coupé par un plan perpendiculairement ou obliquement, ce changement d'expreſſion ſignifie toûjours la même choſe. Cela ſuppoſé.

Pour traiter cette matiere par des principes, il faudroit commencer par les élémens des ſections coniques; mais parce que ce prélude nous meneroit trop loin, & que les Livres qui en traitent ſont très-communs, nous avons crû pouvoir nous diſpenſer d'une rigoureuſe méthode, en nous contentant de l'énoncé des propoſitions, qui ſont néceſſaires à l'intelligence de notre doctrine de Stereotomie, ſuppoſant le Lecteur inſtruit des élémens de Géométrie, & capable d'entendre les démonſtrations fondées ſur les propoſitions que l'on y trouve ordinairement, ſoit dans ceux d'Euclide, ou dans les autres Auteurs que nous n'avons pas cité. Nous avons cependant tâché de donner une introduction aux ſections coniques, ſuffiſante au ſujet dont il s'agit, afin qu'on ne ſoit pas obligé d'avoir recours à d'autres Livres.



PREMIERE PARTIE.

Des Sections des corps coupés par des plans.

CHAPITRE I.

Des Sections de la Sphere.



DE quelque maniere qu'on puiſſe couper une ſphere par un plan, la ſection ſera toûjours un cercle. La ſeule Géométrie naturelle & l'uniformité de la ſphere, nous font ſentir cette vérité; il ſuffit ſeulement de remarquer que lorſqu'elle eſt coupée par le centre, la ſection eſt la plus grande qu'on y puiſſe faire, d'où vient qu'on l'appelle *un grand cercle*, ou, ſelon quelques-uns, *un cercle majeur*, pour éviter l'équivoque du mot de *grand*, qui peut s'appliquer à une petite ſection comparée à une plus petite.

Les autres ſections ſeront toutes plus petites que celle qui paſſe par le centre, mais inégalement, ſelon qu'elles s'approcheront ou s'éloigneront du centre de la ſphere; enſorte qu'elles peuvent tellement diminuer, qu'elles ſe réduiſent à rien au point où le plan, au lieu de couper, ne fait plus que toucher la ſphere; & cette diminution ſe fait dans le rapport des ſinus des arcs. Tous ces cercles inégaux ſont compris ſous le nom de *petits cercles* ou *cercles mineurs*.

DÉFINITION.

1. Le point qui eſt à la ſurface de la ſphere, également éloigné de tous ceux de la circonférence d'un cercle, s'appelle *le pole* de ce cercle, qui n'eſt pas le même que le point de ſon centre, parce qu'il n'eſt pas dans le même plan que la circonférence, mais hors de ce plan dans la ſurface de la ſphere.

Et

Et parce qu'on peut trouver deux points diamétralement opposés, qui ayent la même propriété à l'égard du même cercle, il suit que chaque cercle a deux poles. La ligne droite qui passe par ces deux poles, & par conséquent par le centre du cercle, s'appelle l'*axe* de la sphere.

COROLLAIRE I.

2. D'où il suit, que les cercles qui ne sont pas paralleles, n'ont pas les mêmes poles, & qu'on peut considérer sur une sphere autant de poles qu'il y a de sections inclinées entr'elles, & par conséquent autant d'axes ; ainsi sur la sphere armillaire, qui représente la terre ou le ciel, les poles du monde ne sont pas les mêmes que ceux de l'écliptique, parce que les poles du monde sont ceux de l'équateur, auquel l'écliptique est incliné de $23\frac{1}{2}$ degrés. PL. I.

La section A*f*B*g*, qui est représentée ici en pespective, est un *cercle majeur*, parce qu'elle passe par le centre C de la sphere. *Fig.* 1.

La section D*c*EF est un *cercle mineur* ; parce que son centre *c* est éloigné du centre C de la sphere. Les poles de la section AB sont les points P & *p*, éloignés de A & de B, comme de *f* & de *g*, parce qu'ils sont par tout éloignés d'un quart de cercle de la circonférence du cercle majeur.

Il n'en est pas de même des points O & *o*, qui sont les poles du cercle mineur DE ; chacun d'eux est bien également éloigné des points de la circonférence, mais ces éloignemens ne sont pas égaux entr'eux, puisque les arcs OD ou OE sont plus petits que les arcs *o*D & *o*E, par la supposition que DE ne passe pas par le centre C de la sphere.

COROLLAIRE II.

3. D'où il suit que si un cercle majeur passe par le pole d'un autre cercle majeur, son pole sera aussi réciproquement à la circonférence de celui-ci ; ainsi les points A & B seroient les poles du cercle qui passeroit par les points P*p* perpendiculairement au plan du cercle PA*p*B ; tels sont par exemple l'équateur & le méridien, ou l'horison & un des cercles verticaux. On peut voir là-dessus les sphériques de Theodose.

La partie de sphere *hl*K*i* s'appelle un *segment*. La partie

S *u* V *t*, qui eſt une portion de ſphere coupée par deux plans paralleles entr'eux, s'appelle un *ſegment tronqué*, & ſa ſurface une *zone* ou *couronne de ſphere.*

Si une ſphere eſt coupée par trois ou pluſieurs plans inclinés entr'eux, qui paſſent par le centre C, il ſe fait une pyramide triangulaire ou de pluſieurs côtés, dont le contour de la baſe eſt un triangle ſphérique, ou qui peut être diviſée en triangles ſphériques, compoſés d'arcs de cercles majeurs, comme on pourra le remarquer dans les voutes ſphériques fermées en polygone, tel eſt le ſecteur *q m n P.*

CHAPITRE II.

Des ſections des cônes coupés par des plans.

4. ON diſtingue deux ſortes de cônes, l'une de ceux qu'on appelle *droits*, parce que leur axe eſt droit, c'eſt-
Fig. 2. à-dire, perpendiculaire ſur leur baſe, comme SC ſur B*g*A.

L'autre de ceux qu'on appelle *ſcalenes*, comme le cône *b* S *a*, dont l'axe SC eſt oblique au plan du cercle *b d a e*, qui eſt ſa
Fig. 3. baſe.

De quelque eſpece que ſoit un cône, droit ou ſcalene, les ſections formées par des plans qui les coupent ſont toûjours de même nature, excepté certains cas dont nous parlerons ci-après.

5. Une ſurface plane peut couper un cône de cinq manieres différentes, qui produiſent autant d'eſpeces de figures.

6. *Premierement.* Si un cône eſt coupé par un plan qui paſſe
Fig. 2. par ſon ſommet, la figure de la ſection eſt toûjours un *triangle* rectiligne, ſoit que le plan paſſe par l'axe SC ou qu'il n'y paſſe pas. Dans le premier cas la ſection s'appelle le *triangle par l'axe*, comme BSA; dans le ſecond cas on l'appelle ſimplement *ſection triangulaire*, comme *S d e.* On ne peut faire dans le cône d'au-
Fig. 3. tre ſection rectiligne.

Fig. 2. 7. *Secondement.* Si l'on coupe un cône par un plan DF parallele à ſa baſe BA, la ſection ſera un cercle, parce que la baſe B*g*A eſt toûjours ſuppoſée circulaire. Or il eſt aiſé de voir qu'une telle ſection fait des figures ſemblables, depuis le ſommet du cône juſqu'à ſa baſe.

8. *Troiſiémement.* Si l'on coupe un cône droit par un plan incliné

à son axe CS, comme DE ou D *e*, ou un cone scalene par un plan incliné au plan de la base, ensorte qu'il rencontre les deux côtés SB, SA, la section est appellée une *ellipse*, telle est DRE*r* (*Fig.* 6.) où l'on voit la partie inférieure du cône, & sa partie supérieure (*Fig.* 7.) retranchée par cette section, l'une & l'autre représentée en perspective pour aider à l'imagination, & suppléer à ce qu'on n'a pû exprimer à la Fig. 2. qui sert pour toutes les sections. *Fig.* 2. *Fig.* 6. *Fig.* 7.

9. Quoique cette proposition soit généralement vraie, elle souffre une exception dans les cônes scalenes ; car si le plan coupant le cône obliquement à son axe, & perpendiculairement au triangle par l'axe, fait avec les côtés des angles égaux à ceux qu'ils font avec la base, mais en sens contraire, la section ne sera plus une ellipse, mais un cercle ; telle est la section *g f* dans le cône scalene S*ba*, supposé que l'angle S*gf* soit égal à l'angle S*ba*, ce que l'on appelle *section souscontraire*. *Fig.* 3.

10. *Quatriemement*. Si un cône est coupé par un plan DP ou *dp*, parallelement à un des côtés SA, & que le triangle par l'axe coupe l'ordonnée Q*q* perpendiculairement, (*Fig.* 8.) la section sera une *parabole*, & telle qu'elle paroît en perspective (Fig. 8.) en DQ*q* sur le cône, ou en QS*q*, (*Fig.* 9.) hors du cône. *Fig.* 2. & 8. *Fig.* 9.

11. *Cinquiemement*, si un cône est coupé par un plan parallele à l'axe SC, ou incliné à cet axe, de maniere qu'il coupe encore l'autre, supposé qu'on le prolonge au-delà du sommet S, comme ID, qui rencontre AS prolongé en *x*, ou ce qui est la même chose, si le plan qui coupe un cône, coupe aussi son égal & opposé au sommet, comme le plan passant par M *m* (*Fig.* 4.) coupe les cônes opposés ESF, GSI, la section s'appelle une *hyperbole*, telle est la courbe *bd*A & *h*DH sur le cône, ou (*Fig.* 5.) B*da* ou LD*n* hors du cône. *Fig.* 2. *Fig.* 4. *Fig.* 5.

COROLLAIRE I.

12. D'où il suit, 1°. que le changement d'obliquité des plans dont les sections forment les ellipses & les hyperboles, change aussi la figure de ces sections sans changer leur nature, en les allongeant plus ou moins, comme on peut le voir par les inégalités des lignes DE & D*e*, qui sont les grands axes, c'est-à-dire, les longueurs différentes de deux ellipses, de même que *Fig.* 2.

Fig. 2. les lignes DK, DH & DI font ceux des hyperboles différemment ouvertes.

COROLLAIRE II.

13. 2°. Que les ellipses peuvent être allongées infiniment depuis la position du plan, coupant le cône perpendiculairement à un côté, jusqu'à ce qu'elle devienent parallelen à ce même côté, comme en DP; alors la section change de nature & devient une *parabole*, ce qui fait dire à quelques Mathématiciens, que la parabole est une ellipse allongée à l'infini.

Que les ellipses peuvent être infiniment resserrées & rétrécies, jusqu'à ce qu'elles deviennent sans largeur, c'est-à-dire, que le petit axe soit réduit à zero, comme il est visible par les changemens de position qui peuvent se faire, depuis la perpendiculaire à un côté tiré du point D, en remontant vers le sommet S, comme en *De*, jusqu'à ce que le plan ne coupe plus le cône, mais qu'il le touche seulement suivant la ligne BS.

En continuant aussi à changer la position du plan coupant, depuis la ligne DP, jusqu'à ce qu'il tombe sur DB, on resserre de plus en plus l'hyperbole; & au contraire, depuis la position où il touche DB jusqu'à DP, elle s'ouvre de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle se confonde avec la parabole; ainsi la parabole est comme le passage de l'ellipse à l'hyperbole, de sorte qu'on peut la considérer comme une ellipse, dont le grand axe est infini, ou comme une hyperbole, dont le diamétre transverse est infini.

COROLLAIRE III.

14. 3°. Que les ellipses & les hyperboles semblables sont faites par des sections de plans paralleles entr'eux, comme D*e*, *d* L pour les ellipses, & DI, *d* H pour les hyperboles, ou par des plans dont les positions à l'égard de l'axe & de la base sont semblables, parce que les figures semblables sont celles dont les côtés, les axes & les ordonnées sont proportionels, ou décrits sur un même plan & sur un même axe.

COROLLAIRE IV.

15. 4°. Que toutes les paraboles étant faites par des plans paral-

leles à un côté, elles ne ſont pas variables, mais toutes ſemblables entr'elles, de ſorte qu'elles ne peuvent changer que de grandeur ; car *dp* & DP étant paralleles à SA, *dp* ſera parallele à DP, axe de la parabole ; & quoique l'un ſoit plus long que l'autre dans le cóne terminé par la baſe AB, il faut les conſidérer comme pouvant être prolongés auſſi-bien que le cône. *Fig.* 2.

Quoique nous établiſſions ici comme des définitions des ſections coniques, les différentes manieres dont on peut couper le cône pour qu'il en réſulte des cercles, ellipſes, paraboles & hyperboles ; on peut en démontrer la vérité en faiſant voir que les courbes auſquelles on a donné ces noms, étant conſidérées hors du cône, ſont les mêmes dans le cône ; mais comme il ne nous convient pas d'entrer dans une matiere qui nous meneroit trop loin, & qui a été traitée par un grand nombre d'Auteurs, il nous ſuffit d'avancer ces vérités comme des axiomes ſur leſquels nous devons fonder nos raiſonnemens : ceux qui voudront s'en inſtruire plus particulierement, peuvent conſulter les traités des ſections coniques; il nous paroît ſeulement à propos, en faveur de ceux qui n'ont étudié que les élémens ordinaires de la Géométrie, où il n'eſt pas parlé d'autre courbe que du cercle, d'expliquer quelques termes, & d'expoſer quelques propriétés des autres ſections coniques.

Définitions des points & des lignes remarquables dans les ſections coniques.

16. DANS trois des ſections coniques on conſidere un point qu'on appelle *centre* ; ſçavoir, dans le cercle, dans l'ellipſe, & dans l'hyperbole ; mais il n'y en a point dans la parabole.

17. Tout le monde ſçait, que le centre du cercle eſt également éloigné de tous les points de la circonférence ; il n'en eſt pas de même dans l'ellipſe, il n'eſt équidiſtant de la circonférence qu'à l'égard de quatre points oppoſés, mais il eſt au milieu de tous les diamétres ; ainſi le centre C, (*Fig.* 7.) diviſe en deux également les *diamétres* inégaux *e d*, *m* T, I *t*. *Fig.* 7.

Le plus grand de tous les diamétres s'appelle *le grand axe* ;

le plus petit, *le petit axe* : ces deux sont perpendiculaires entr'eux, mais non pas les autres, comme nous le dirons ci-après.

18. Dans l'hyperbole, le point appellé *centre* n'est pas au-dedans de la courbe, mais au-dehors, entre les deux sections des cônes égaux opposés au sommet, comme en C (*Fig.* 4.) & en
Fig. 4. C (*Fig.* 5.) où est le milieu de la plus courte ligne D *d*, qu'on puisse mener d'une section à l'autre, qu'on appelle *l'axe transverse*, ou *l'axe déterminé*, ou *le premier axe*, & la ligne qui lui est perpendiculaire S*s*, & double de la distance du milieu C, au sommet S, est appellée le *second axe* : le premier s'appelle quelquefois *grand axe*, & le second *petit* ; mais cette dénomination est impropre, parce que le second axe peut devenir plus grand que le premier dans tous les cas où l'angle DS*d* est aigu ; les autres lignes menées d'une hyperbole à l'autre par le centre C, comme PR, (*Fig.* 5.) sont appellées *diamétres*.

19. Quant à la parabole il n'y a point de centre, parce qu'il n'y a aucune division égale à faire dans aucun diamétre, ni dedans ni dehors de la section ; au-dedans, parce qu'étant ouverte & ses diamétres étant infinis, en ce qu'ils ne coupent la courbe que par une de leurs extrêmités où est leur *origine*, ils ne peuvent être coupés en deux également ; ni au-dehors, parce qu'il ne peut y avoir deux termes, puisque le plan coupant le cone étant prolongé, ne peut couper l'opposé au sommet, à cause qu'il est parallele à son côté.

Apol. liv. 2. p. 28. 20. On appelle *diametre* toute ligne droite qui en coupe également deux autres paralleles entr'elles, terminées de deux côtés à une circonférence ; & *axe*, le diamétre qui les coupe perpendiculairement, & passe par le sommet principal de la section ; ainsi, par exemple, dans la parabole (*Fig.* 9) la ligne T *u* est un diamétre, parce qu'elle coupe en deux également en *o* les deux paralleles *r S*, ZR, & SP est un axe, parce qu'il passe par le sommet principal S de la courbe, & coupe la ligne Z*q*, en deux également, & particulierement en P, de même que D*d* dans l'hyperbole, (*Fig.* 5.) & DE dans l'ellipse, (*Fig.* 6.)

21. Les lignes perpendiculaires aux axes, sont appellées *ordonnées*, comme P*q*, *p*Q (*Fig.* 9.) *or*, CR (*Fig.* 5.) pour l'hy-
Fig. 9. Fig. 5. perbole, & CR, *or* (*Fig.* 6.) pour l'ellipse. On appelle du même nom les lignes obliques aux autres diamétres, qui sont coupées en deux également, comme (*Fig.* 9.) ZR, *r*S paralleles entr'elles, dont nous venons de parler, ne faisant attention qu'à leur moitié ZO, *r o*.

22. La principale marque des ordonnées, est celle d'être *paralleles à la tangente* qui passe par l'extrêmité du diametre auquel elles sont ordonnées ; ainsi (*Fig. 9.*) si T*n* est une tangente au point T, extrêmité du diametre T*u*, & qu'on lui mene une parallele *or* ou OZ, ces deux lignes *or* & OZ sont des ordonnées au diamétre T*u*; il en sera de même dans l'ellipse & dans l'hyperbole ; on les appelle aussi *appliquées*, en Latin *ordinatim applicatæ*. *Fig. 9.*

Les parties des axes ou des autres diametres, qui sont comprises entre l'extrêmité T (*Fig. 9.*) & les points *o* & O, où ils sont coupés par les ordonnnées, s'appellent *abscisses*, du Latin *abscindere*; ainsi T*o* & TO sont des abscisses du diametre T*u*; & S*p*, SP, celles de l'axe. *Fig. 9.*

23. Les abscises & les appliquées, considérées les unes à l'égard des autres, s'appellent *co-ordonnées*.

Les diametres T*m*, *t*I (*Fig. 7.*) qui se croisent, de maniere qu'ils sont paralleles aux tangentes TL, *tl*, qui passent par les extrêmités T & *t*, sont appellés *conjugués*. La même chose doit s'entendre pour les hyperboles. *Fig. 7. Apol. l. 2. p. 20.*

24. La partie d'un axe prolongé hors de la section, comme DY (*Fig. 6.*) comprise entre l'ordonnée *to* à cet axe, menée du point d'attouchement *t* d'une tangente *t*Y, & le point de rencontre Y de l'axe & de la tangente s'appelle *soustangente*. *Fig. 6.*

25. La troisiéme proportionelle à deux diametres conjugés est appellée *parametre*, de celui qui est le premier terme dans l'ellipse & dans l'hyperbole ; & pour la parabole c'est la troisiéme proportionelle à l'abscisse & à l'ordonnée, ou à la sous-tangente & à la tangente.

26. La ligne droite qui est la rencontre du plan de la base du cone, prolongée s'il le faut, & d'un autre plan passant sur le sommet parallelement à une section conique, est appellée *directrice*; telles sont les lignes *e*I pour l'ellipse, (*Fig. 6.*) KL pour l'hyperbole, (*Fig. 4.*) & A*g* pour la parabole, (*Fig. 8.*) La premiere de ces lignes est toute hors du cone, la seconde toute au-dedans, & la troisiéme est tangente à la base du cone. *Fig. 6. 4. 8.*

On appelle aussi *directrice* une ligne qui est dans le même plan qu'une section, & perpendiculaire à un axe, à certaine distance de son sommet, comme DI est la directrice de la parabole QS*q*, (*Fig. 9.*) si elle est éloigné du sommet S au-dehors autant que le foyer F est au-dedans, plus loin de l'ellipse, & plus près pour l'hyperbole.

27. Outre ces lignes communes à toutes les sections coniques, il y en a encore de particulieres à l'hyperbole, qu'on appelle *asymptotes*, ce sont des lignes droites AY, *ay*, (*Fig.* 5.) qui passent par le centre C des sections opposées, & qui en approchent continuellement sans jamais les rencontrer, propriété merveilleuse, & difficile à concevoir, quoique la vérité en soit démontrée. Ces lignes sont les intersections de deux plans, qui touchent la base du cône aux extrêmités L & K de la directrice, & passent par le sommet S du cone.

Fig. 5.

Fig. 4.

28. Les points qu'on appelle *foyers* méritent encore d'être considérés, à cause de leurs grandes propriétés pour la description des sections coniques; leur situation est sur un premier axe à quelque distance de son extrêmité.

29. Dans l'ellipse il y en a deux sur le grand axe, desquels si l'on tire des lignes droites qui se joignent à un point quelconque de la circonférence, leur somme est toûjours égale à la longueur de ce grand axe; si les points F & *f* (*Fig.* 7.) sont les foyers de l'ellipse A *t* T i, la somme des lignes *fg* & F*g* est égale à l'axe A *a*.

Fig. 7.

30. Dans les hyperboles opposées il y en a aussi deux F & *f* sur le principal axe prolongé *d* D, (*Fig.* 5.) desquels si l'on mene deux lignes FP, *f*P au même point P de la courbe, pris où l'on voudra, la différence P *q* de ces deux lignes est égale au principal axe. *Voyez le Traité des sections coniques de* M. de L'HOPITAL, *article* 73.

Fig. 5.

31. Dans la parabole il n'y en a qu'un en F sur l'axe SP (*Fig.* 9.) duquel si on mene une ligne F *h* à un point quelconque de la parabole Q S *q*, cette ligne sera égale à la ligne *h*I, menée du même point à la directrice DI, parallelement à l'axe DP.

Fig. 9.

Exposition de quelques propriétés des lignes menées au-dedans & au-dehors des sections coniques, dont la connoissance fournit différens moyens de les décrire, dans certaines circonstances de lignes & de points donnés.

32. SI l'on tire deux lignes paralleles au-dedans d'une section conique terminées à sa circonférence de part & d'autre, & qu'on les divise en deux également, la ligne qui passe par leur

leur milieu, & qui ſe termine à ſa ſection, eſt un *diametre*; cette propriété eſt une ſuite de la définition que nous avons donné des lignes appellées diametres.

Des abſciſſes & des ordonnées des ſections coniques.

NOus avons dit que le triangle étoit la premiere ſection du cone; mais comme elle eſt rectiligne il n'en eſt pas queſtion ici, où nous ne parlons que des courbes. Cependant nous remarquerons en paſſant, qu'elle a ſes abſciſſes & ſes ordonnées, qui ont un certain rapport. Si l'on fait y F parallele à CA, (*Fig.* 2.) Sy ſera une abſciſſe, & y F une ordonnée à l'axe SC du triangle BSA; on trouvera donc que *Fig.* 2.

Le rectangle fait de ſon abſciſſe Sy, par la moitié de ſa baſe CA, eſt égal au rectangle fait de ſon ordonnée y F par ſon axe; car à cauſe des paralleles, $Sy : yF :: SC : CA$; donc $Sy \times CA = yF \times SC$.

33. Dans le cercle, le rectangle fait par des abſciſſes, l'une par l'autre, eſt égal au quarré de l'ordonnée $AO \times OB$ (*Fig.* 10.) $= \overline{OR}^2$, cela eſt démontré dans les élémens de la Géométrie d'EUCL. l. 3. prop. 35. *Fig.* 10.

34. Dans l'ellipſe les *quarrés des ordonnées ſont entr'eux, comme les rectangles des abſciſſes*, ſi ADB eſt une demie ellipſe $\overline{or}^2 : \overline{CD}^2$, ou $\overline{or}^2 : \overline{CF}^2$ dans la demie ellipſe AFB $:: AO \times OB : AC \times CB$; cette propriété eſt démontrée dans tous les traités des ſections coniques.

35. Dans la parabole *les quarrés des ordonnées* or, OR (*Fig.* 8.) *ſont entr'eux comme les abſciſſes* Do, DO, ainſi $\overline{OR}^2 : \overline{or}^2 :: DO : Do$. *Fig.* 8.

36. Dans l'hyperbole le rapport des quarrés des ordonnées entr'eux & aux rectangles des abſciſſes eſt le même que dans l'ellipſe, en ajoutant aux abſciſſes le diametre qui eſt au-dehors de l'hyperbole entre les ſections oppoſées; ainſi $\overline{or}^2 : \overline{Ft}^2 :: Do \times od : DF \times Fd$. *Fig.* 5.

COROLLAIRE I.

37. D'où il ſuit que les ordonnées également éloignées du centre d'une ſection qui en a un, ſont égales entr'elles, puiſ-

Fig. 7. qu'elles ont un même rapport à des rectangles égaux $\overline{eO}^2$ (*Fig.* 7.) : $mO \times OT :: \overline{no}^2 : mo \times oT$; mais à cause de $OC = oC$, par la supposition, $mO \times OT = mo \times oT$, donc $eO = no$.

38. Dans la parabole la proposition doit s'appliquer aux ordonnées équidistantes d'un diametre, comme si $or = oS$, on
Fig. 9. aura $rx = Sy$ (*Fig.* 9.) ce qui est clair, parce que la figure $rxyS$ est un parallelogramme.

Corollaire II.

39. Dans toutes les sections coniques les lignes paralleles à un diametre TO, équidistantes du point d'attouchement T
Fig. 11. d'une tangente AD (*Fig.* 11.) comprises entre la tangente & la courbe, comme Br, CV, AR, DG sont égales entr'elles ; car si par les points r & R on mene des paralleles à la tangente AD, ces lignes seront des ordonnées au diametre TO, qui les coupe en deux également au point O & o ; donc le parallelogramme $TorB = ToVC$, & le parallelogramme $TORA = TOGD$; donc $Vr = CB$, & $AR = DG$.

Corollaire III.

40. Si deux ou plusieurs lignes paralleles eh, tI terminées à la circonférence d'une ellipse, ou d'une autre section conique, sont coupées par une troisiéme HK, les rectangles faits des parties des paralleles, comparés à ceux des parties de celle qui les
Fig. 7. coupe, sont entr'eux en même raison, $tq \times qi : Hq \times qK :: ep \times ph : hp \times pK$; parce que chacun de ces rectangles a même raison au quarré de la tangente, qui est parallele aux lignes dont il est formé, ce qui est démontré dans les traités des sections coniques.

Propriétés particulieres à l'ellipse.

Le grand usage que nous avons à faire de l'ellipse m'engage d'ajouter ici quelques propriétés qui lui sont particulieres, & qui servent à la décrire dans certaines circonstances.

Fig. 10. 41. Si le diametre AB d'un cercle ou demi cercle AEB, est

commun à une ellipse ou demi ellipse, décrite sur le diametre au-dedans ou au-dehors du demi cercle, comme ADB ou AFB, & qu'on lui mene les ordonnées O r C F, *les ordonnées au cercle seront entr'elles comme celles de l'ellipse*, OR : CF : : O t : CD, & OR : O r : : CE : CF ; parce que l'ellipse n'est qu'un cercle allongé ou retreci, & que les quarrés des ordonnées auront toujours le même rapport entr'eux que celui des mêmes rectangles AOB, ACB. Fig. 10.

42. Cette propriété est encore vraie, quand même les ordonnées ne seroient pas perpendiculaires à l'axe AB, comme sont O r & CD ; * car si par leurs extrêmités r & D on mene des paralleles au diametre AB, qui couperont les ordonnées au cercle CE, & OR en F & g, il se fera deux triangles semblables CFD & O g r, qui feront voir que les ordonnées de l'ellipse sont en même raison que celles du cercle, puisque si l'on fait CF : CE : O g : OR, les point F & g seront à la circonférence d'une ellipse ; mais CD : CF : : O r : O g ; donc CD : CE : : O r : OR. Ce qu'il falloit démontrer. * Fig. 12.

43. La somme des deux axes est plus petite que celle de deux diametres conjugués quelconques, & leur différence est plus grande que celle de ces diametres.

44. Cependant la somme des quarrés de deux diametres conjugués m T, t I est égale à celle des quarrés des deux axes A a, B b ; cela est démontré dans tous les traités des sections coniques. Fig. 7.

Des Tangentes des sections coniques.

45. SI par un point t on mene une tangente t Y, qui rencontre un axe ou diametre quelconque, prolongé en Y, & une ordonnée t o à ce diametre, la partie YD de la sous-tangente Y o sera égale à l'abscisse D o dans la parabole ; elle sera plus grande dans l'ellipse, & plus petite dans l'hyperbole ; ainsi l'arc de la section qui passera entre D & Y, si D étoit le milieu de OY, sera une hyperbole ; & celui qui passera entre D & O dans la même supposition, sera une ellipse. Cela est démontré dans les traités des sections coniques. Fig. 6. & 5. Fig. 8.

46. Dans la même Fig. 6. si une tangente t Y rencontre l'axe ED prolongé, ou un autre diametre, & que du point d'attou- Fig. 6.

chement *t* on lui mene une ordonnée *to*, les lignes C*o*, CD, CY, feront continuellement proportionelles, non-feulement dans l'ellipfe, mais auffi dans l'hyperbole, on aura C*o* : CD : :
Fig. 5. CD : CY.

Fig. 13. 47. Si deux lignes *a*T, *at* qui concourent en *a*, touchent une fection conique quelconque aux points T & *t*; la ligne me-
Apollonius l. 2. *p.* 19. & 20. née du point *a* par le milieu *m* de la ligne T*t* qui joint les points d'attouchement, eft un diametre; & par l'inverfe, fi elle eft un diametre, elle paffera par *m*.

48. Si une fection conique eft touchée par deux lignes *at*, *a*T (*Fig.* 13.) la ligne T*t*, qui paffe par les deux points d'attouchement, étant prolongée vers *b*, fi de ce point pris à volonté, l'on tire deux autres tangentes *b*N, *b*E, elles couperont les deux précédentes en F & D, je dis que la ligne F*a* fera divifée *harmoniquement*, c'eft-à-dire, que les trois lignes *a*F, *at* & *a*D font harmoniquement proportionelles; la premiere fera à la troifiéme, comme la différence de la premiere & de la feconde eft à la différence de la feconde & de la troifiéme F*a* : *a*D : : F*t* : *t*D. Cette propriété nous fervira à trouver les points d'attouchement dont nous aurons befoin au deuxiéme Livre, par une méthode très-facile.

On ne s'arrête pas ici à démontrer toutes ces vérités qui en fuppofent d'autres, aufquelles il faudroit remonter; il fuffit qu'elles le foient dans les Livres connus, comme font les fections coniques d'APOLLONIUS, de M. DE LA HIRE, & du Marquis DE L'HOPITAL, pour nous fervir à raifonner conféquemment dans les ufages que nous devons en faire.

De quelques différences de pofition des fections coniques dans les cones fcalenes.

QUOIQUE les cones fcalenes ne foient pas d'une nature différente de celle des cones droits, l'obliquité de leur axe fur le plan de la bafe occafionne quelque différence dans les fections, à ne confidérer que leur pofition refpective.

49. Premierement. Nous avons fait voir que la fection d'un plan, oblique à l'axe du cone fcalene, dont il coupe les deux

côtés, pouvoit être un cercle, quoique naturellement cette section soit une ellipse.

50. Secondement. Les sections faites par des plans paralleles à la base, qui sont des cercles dans les cones droits, peuvent être des ellipses dans les cônes scalenes, s'ils sont considérés comme des cones droits sur une base elliptique; car si l'on suppose que la base *b e a d* (*Fig.* 3.) est une ellipse, & qu'une ligne *s a* immobile sur son point *s*, parcourt vers son autre extrêmité *a* le contour de cette ellipse, la figure qui en résultera sera un cone scalene de base elliptique. On peut imaginer la même génération pour un cone droit, comme si la base B *g* A, (*Fig.* 2.) étoit une ellipse, il seroit toujours évident que toutes les sections faites par des plans paralleles à ces bases, seroient des ellipses semblables à celles de la base; car tous les diametres possibles DF, BA d'une section par l'axe BSA, ou KI, *b a* (*Fig.* 3.) seroient proportionnels à ceux d'une autre section par l'axe du même cone. *Fig.* 3. *Fig.* 2. *Fig.* 3.

Mais toutes les sections obliques dans ce cone ne seroient pas des ellipses, car sans s'arrêter à la section sous-contraire, qui n'a pas lieu dans ce cas, puisque la base n'est pas circulaire, on pourra toujours démontrer que de tels cones peuvent être coupés par un plan incliné à l'axe, & qui ne fera pas avec les côtés des angles égaux à ceux de la base, c'est-à-dire, des côtés du triangle par l'axe avec la base, dont la section sera un cercle, ainsi que la sous-contraire; car si l'on tire la droite S *x* sur la surface du cone, & *n* C dans la base au centre C, & *o m* parallele à *n* C; puisque *o m* : *n* C : : S *m* : S C le demi diametre *o m* sera plus petit que *n* C dans le rapport de K *m* à *b* C. Si, par exemple, *b* C : C *n* : : le grand axe est au petit, le même rapport sera entre K *m* & *m o*, donc K *m* sera plus grand que *m o*; or il est clair qu'en changeant l'inclinaison du plan de la section, par exemple, en *r*, on peut racourcir ce demi axe K *m* jusqu'à ce qu'il devienne égal à *m o*, comme si du point *m* pour centre & pour rayon *m o* on coupoit le côté *b* S en *r*, ce qui est possible à l'égard de plusieurs côtés diamétralement opposés, puisque *m* K est plus grand que *m o*; alors les points *r* & *o* seront également éloignés du centre *m*, par conséquent les axes étant égaux entr'eux, la section sera un cercle. S'il s'agissoit au contraire d'allonger le petit axe, il est visible qu'il n'y auroit qu'à incliner le plan de la section du côté de ce petit axe. Ce que l'on verra démontré au problême 33 du second Livre ci-après.

THÉOREME I.

La section plane elliptique faite dans l'intervalle de deux cones concentriques & semblables, comme entre les surfaces concaves & convexes d'un cone creux d'égale épaisseur, *est une couronne comprise par deux circonférences d'ellipses, qui ne sont pas équidistantes, & qui ne peuvent être concentriques que dans les cones scalenes, lorsque la section est perpendiculaire à l'axe.*

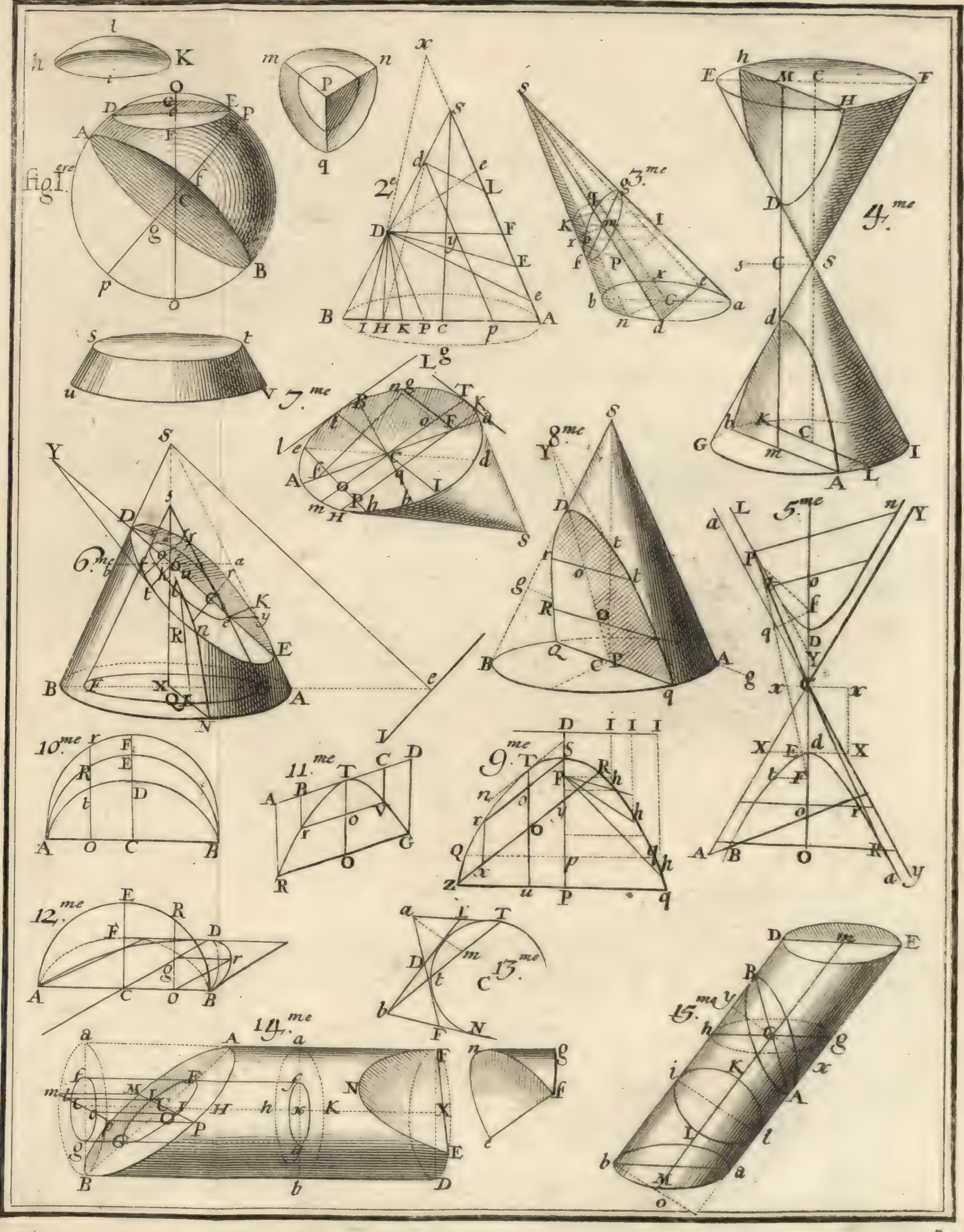
Fig. 6. Soit (*Fig.* 6.) un cone F *s* G concentrique & semblable au cone BSA, dans lequel on le suppose, il est évident par la supposition, que leurs côtés BS, F *s*; AS, G *s* seront non-seulement paralleles, mais équidistans dans la section du triangle par l'axe BSA.

Il est encore clair que le plan de la section oblique DE, que nous supposons perpendiculaire au triangle par l'axe, étant également incliné à l'axe commun SX, de l'un & de l'autre cone, il fera des ellipses semblables DRE dans le grand, & *d h e* dans le petit.

Il faut présentement faire voir que quoique les deux surfaces des cones soient équidistantes, & leurs bases concentriques, les sections elliptiques ne le sont pas; des points D & *e* soient tirées les perpendiculaires D *x*, *e* K, qui seront égales par la supposition.

Puisque l'angle D *d s* extérieur au triangle *d s e* est plus grand que l'intérieur opposé *d e s*, ou son égal DES, la ligne D *d*, comprise entre les deux paralleles SB, *s* F sera plus courte que la ligne *e* E comprise entre les paralleles équidistantes de ces premieres; car puisque D *x* = *e* K, faisant K *y* = *d x*, le côté *e y* sera = D *d*; or puisque l'angle *e* E K est plus petit que *e y* K, c'est-à-dire, la ligne *e* E plus oblique sur EK, elle sera plus grande que *e y*, *ce qu'il falloit démontrer*; donc les ellipses DRE & *d h e* s'approcheront plus vers D que vers E sur l'axe DE; par conséquent elles ne seront ni équidistantes, ni concentriques; *ce qu'il falloit* premierement *démontrer.*

Secondement. Si le cone au lieu d'être droit étoit scalene, il est clair que l'axe étant oblique à sa base circulaire, sera perpendiculaire à quelques sections elliptiques; dans ce cas nous pouvons considérer la Figure 6. différemment du cas précédent, en


fig. 1.ere
2.e
3.me
4.me
5.me
6.me
7.me
8.me
9.me
10.me
11.me
12.me
13.me
14.me
15.me

ſuppoſant la baſe BA elliptique, & la ſection oblique DE circulaire, (ſi l'on veut) ou elliptique.

Il eſt clair que les diſtances des ellipſes de la baſe AB dans la ſection du triangle par l'axe BSA, ſont égales en BF & AG, parce que le diametre commun BA eſt également incliné aux côtés des cones intérieur & extérieur; mais entre ces deux extrêmités on ne peut trouver aucune partie des deux circonférences des ellipſes, qui ne ſoient plus ou moins éloignées. Pour le démontrer, ſoit un plan SNX perpendiculaire au triangle par l'axe BSA, qui coupera les ellipſes ou les cercles DRE & *dhe* ſuivant une ligne *on*, qui ſera perpendiculaire à ce triangle, de même que XN; par conſéquent ces deux lignes *on*, XN, ſeront paralleles entr'elles, donc leurs parties *ln*, LN compriſes auſſi entre deux paralleles SN & *s*L ſeront égales entr'elles. Mais l'intervalle *ln* des circonférences de la ſection oblique n'eſt pas égal aux intervalles D*d*, & E*e*, puiſqu'il eſt plus long que l'un & plus petit que l'autre; donc l'intervalle LN des deux ellipſes de la baſe ne ſera plus égal aux diſtances BF, AG. En effet la ſection *ba* par la perpendiculaire *on* parallelement à la baſe BA ſera des ellipſes ſemblables dans l'un & l'autre cone, auſquelles l'axe *on* eſt commun avec une ordonnée de la ſection oblique; or les diſtances des deux cones en D*d* & *bf* ſont entr'elles comme DO à *b*O; ainſi le rapport de D*d* à *bf* augmente depuis le triangle par l'axe juſqu'à la ſection perpendiculaire au plan en Q*n*, & au contraire elle diminue depuis le point *n* juſqu'en E; donc la diſtance LN ſera moyenne entre celle des extrêmités BF & AG. Elle ſera plus petite ſi DE ou BA eſt un grand axe, ou plus grande ſi BA eſt un petit axe. *Fig. 6.*

De cette inégalité de diſtances des ellipſes concentriques à leur axe, s'enſuit néceſſairement celle de tous les points d'une extrêmité d'un diametre à l'autre, puiſqu'elles ſe rapprochent & s'éloignent d'une diſtance proportionelle à celle des axes; donc les ellipſes de la baſe, quoique concentriques, ne ſont pas équidiſtantes: *ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Il faut cependant remarquer que, quoique les ellipſes concentriques ſemblables ne ſoient pas équidiſtantes, meſurées ſur différens axes & diametres, elles le ſont cependant ſur les mê-

mes axes & ſur les mêmes diametres ; & même non-ſeulement ſur toutes les lignes droites qui traverſent ces deux circonférences, mais encore ſur celles qui ne font que toucher l'intérieur ſans la couper, ce qui fournit une maniere aiſée de faire une ellipſe *aſymptotique* à une autre donnée ; il ſuffit d'en avoir un ſeul point, comme nous le dirons au ſecond Livre. Je me ſers de ce terme, parce que cette propriété qui eſt ſemblable à celle de l'hyperbole à l'égard des aſymptotes, a donné occaſion à M. DE LA HIRE * d'appeller les ſections coniques, concentriques & ſemblables *aſymptotiques*.

* *Sect. con. l. 6. p. 127.*

COROLLAIRE I.

On peut étendre cette propoſition à d'autres ſections qu'aux ellipſes, ſi l'on veut conſidérer avec les Mathématiciens la parabole comme une ellipſe dont l'axe eſt infiniment long, & l'hyperbole comme une ellipſe renverſée, qui a ſes foyers en-dehors ; en effet ſi l'on coupe un cone creux d'égale épaiſſeur, de maniere que le plan coupant faſſe une de ces deux ſections, on remarquera viſiblement que la courbe de la ſurface intérieure n'eſt pas parallele à celle de l'extérieure.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que les arcs des arêtes de doële & d'extrados des faces des voutes coniques, qui ſont obliques à la direction de l'axe, comme aux trompes biaiſes & ſurbaiſſées à leur face, ne doivent pas être paralleles entr'eux, comme les font quelques Auteurs de la coupe des pierres ; car ſi l'arc de doële n'eſt pas plus près de l'extrados à une impoſte, qu'à l'autre du côté de l'angle le moins aigu, la voute deviendra moins épaiſſe du côté oppoſé qui eſt le plus long, de ſorte que le côté & le piédroit le plus long & le plus chargé deviendroit le plus foible, ce qui eſt évidemment contre la bonne conſtruction.

Il ne faut pas dire que cette différence eſt ſi peu conſidérable qu'on lui peut préférer la ſimétrie extérieure de la face ; car ſans faire de ſuppoſition de cas extraordinaire, l'axe ED peut fort bien être perpendiculaire au côté SB, ſi l'angle S étoit plus ouvert, par exemple, de 60 degrés, alors le même axe

axe feroit en E un angle de 30 degrés avec le côté SA : or dans cette fuppofition il eft clair que la voute feroit moitié moins épaiffe à l'impofte SE qu'à l'impofte SD ; car les diftances des paralleles SB, sF, SA, sG font en raifon des finus des angles que la ligne ED fait avec les côtés ; mais le finus total eft double de celui de 30 degrés, donc la diftance eK, c'eft-à-dire l'épaiffeur de la voute vers Ey ne fera que la moitié de Dx, qui eft celle du côté SD. Il n'eft pas néceffaire de démontrer ce rapport qu'on apperçoit d'un coup d'œil par celui des triangles femblables EKe, & ESD, fi l'angle D eft fuppofé droit, & l'angle S de 60 degrés, ce qui n'eft pas de même dans la figure 6 ; or eK eft égal à la diftance des paralleles vers D & e, E à celle des mêmes ou de leurs égales prife obliquement fur la ligne ED ; donc, &c. Pl. 1. *Fig.* 6.

En fecond lieu, ce problême fait voir que lorfqu'un ceintre eft elliptique on ne peut lui faire un ceintre parallele qui foit auffi elliptique, de forte que s'il s'agit, par exemple, d'un bandeau ou d'une archivolte, & que l'on faffe les deux arêtes de doële & d'intrados elliptiques, il fera inégalement large ; & s'il eft par tout également large, les deux arêtes ne feront pas exactement elliptiques, ce qui eft furprenant & incroyable aux ouvriers, & aux gens qui n'ont point de théorie.

THEOREME II.

Une fection conique donnée peut être celle d'une infinité de cones différens.

Soit (*Fig.* 16. 17. & 18.) une fection conique DAC, dont AB eft un diametre, auquel la ligne CD eft une ordonnée, divifée en deux également en M, on lui menera par ce point une perpendiculaire FE, de longueur prife à volonté fur un plan incliné à celui de la fection conique donnée, d'une telle inclinaifon que l'on voudra (ce qu'on ne peut repréfenter dans ces figures qu'en perfpective). Sur cette ligne FE comme diametre, on décrira un cercle FDEC, dont la ligne DC fera une corde commune à l'ordonnée de la fection conique. Si par les points EABD on tire les lignes ES, FS, qui fe rencontreront en S, je dis que le fommet S fera celui d'un cone, qui aura pour bafe, ou ce qui eft la même chofe, pour fection parallele à la bafe, le Pl. 2. *Fig.* 16. 17. & 18.

cercle FDEC, & pour autre ſection la ſectiondonné eDAC ce qui eſt clair par la conſtruction & par la génération du conet ſuppoſant qu'une ligne SB, immobile ſur ſon point S, parcourt la circonférence du cercle DFCE; puiſque par la même conſtruction cette ligne paſſera par les deux points communs DE, & par les extrêmités des diametres AB, EF des deux ſections le cercle & l'ellipſe. Or puiſque le diametre du cercle FE peut être varié de longueur, & que l'on peut même changer la poſition de ſon centre en l'approchant ou l'éloignant du point M, il eſt viſible que le point S changera auſſi de poſition, puiſqu'elle dépend de celle des extrêmités de ce diametre; par exemple,
Fig. 17. ſi au lieu du terme E on en prenoit un autre plus en-dehors en K ou en L, le point S tomberoit en x ou en y, & de même ſi l'on rapprochoit ou éloignoit l'autre terme F, le point S tomberoit plus haut ou plus bas; donc on peut faire paſſer une infinité de ſurfaces de cones differens par la circonférence de la ſection conique donnée: *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Fig. 19. De-là il ſuit que ſi une ligne AS, immobile ſur le point S, pris à volonté, ſe meut autour d'une ſection conique ouverte, comme la parabole ou l'hyperbole, il ſe formera une pyramide mixte, qui ſera toujours une portion de cone, & par conſequent dont les ſections qui ne feront pas paralleles à la baſe ouverte donnée, pourront être connues en cherchant la baſe du cone dont cette pyramide mixte eſt une partie, de la maniere que nous venons de le dire.

Ou bien ſans achever le cone, ni connoître le cercle de la baſe, on peut les connoître par la comparaiſon des parties des ſous-tangentes, qui ſont au-deſſus & au-dehors du cone (par l'article 45.)

Soit, par exemple, la baſe donnée ARP une parabole, ſi l'on ſuppoſe la pyramide ARPS coupée par un autre plan incliné à cette baſe, dont l'interſection ſoit AP, & qui coupe le côté SR en H, on menera par un point quelconque de la baſe comme T, une tangente TN (Art. 45) qui rencontrera l'axe MR de la baſe prolongé en N, & ayant tiré NS, on imaginera un plan TNS, qui touchera la pyramide ſuivant la ligne TS menée du point d'attouchement de la baſe au ſommet S, la-

quelle coupera la courbe AHP en *u*, par où on menera dans le plan incliné une ligne *ux* parallele à AP, & un autre *uy* tangente à la même courbe, qui rencontrera en *y* l'axe M*y*, qui eſt dans le même plan que MN; ſi la longueur H*y* eſt plus petite que H*x*, c'eſt une marque que la ſection qu'on veut connoître eſt une hyperbole; ſi au contraire elle étoit plus grande, comme LE à l'égard de E*d*, ce ſeroit une ellipſe; & ſi elle étoit égale, comme on ſuppoſe *m*R & RN, qui ne le ſont cependant pas dans la figure, par exemple, *d*I & I*n*, ce ſeroit une parabole, ce qu'il eſt plus facile d'appercevoir en examinant ſi les plans *n d* & NM ſont paralleles entr'eux.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que l'on peut appliquer à toute ſorte de voutes coniques tel ceintre de face qu'on jugera à propos, avec telle poſition ou inclinaiſon de l'axe qu'on jugera convenable à la voute qu'on ſe propoſe de faire, par exemple, qu'on peut faire une trompe de niveau ou rampante, dont le ceintre de face ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé de telle meſure qu'on voudra, & connoître dans quelle ſituation ſa doële ſera circulaire.

Secondement, elle fait connoître les changemens qui arriveroient, ſi le ceintre de face étoit d'une ſection ouverte, par exemple, parabolique, comme il l'eſt en effet dans les *trompes ſur le coin* à plomb, dont l'axe eſt de niveau; ainſi ſuppoſant que le mur ſoit en talud, la courbe ſe changera en hyperbole, & s'il étoit en ſurplomb elle deviendroit une ellipſe; cependant l'Architecte eſt le maître de choiſir pour ceintre de face la courbe qu'il voudra.

De même ſi le ceintre de face d'une trompe conique à pans à plomb, qui eſt ordinairement une hyperbole, lorſque l'axe eſt de niveau, eſt changé par un talud, il ne changera pas de genre de courbe, mais il deviendra ſeulement une hyperbole différente de celle qui étoit le ceintre à plomb.

En un mot ce Théoreme fait connoître la nature de tous les changemens que peuvent cauſer les différens contours de ceintres de face des trompes, & ceux de leurs *trompillons*, qui peuvent ne leur être pas paralleles, & tous ceux qui proviennent des inclinaiſons à l'horiſon, & déclinaiſons de la perpendicu-

laire ſur la face, ce qui comprend toutes les trompes biaiſes & rampantes, aſcendentes ou deſcendentes, & les joints de tête ; de ſorte qu'on peut dire que ce Théoreme eſt le fondement de toutes les voutes coniques. Paſſons aux cylindriques.

CHAPITRE III.

Des Sections des cylindres coupés par des plans.

55. ON diviſe les cylindres comme les cones, en *droits* & en *ſcalenes*.

Ils ſont appellés *droits*, lorſque leur axe eſt droit, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à leur baſe, comme le cylindre BDF *a* eſt droit
Fig. 14. ſur la ponctuée B *a* (*Fig.* 14.) parce que ſon axe XC eſt perpendiculaire ſur B *a*.

Fig. 15. 56. Ils ſont appellés *ſcalenes*, lorſque leur axe *m* M (*Fig.* 15) eſt oblique ſur la baſe *b a* ou DE du cylindre *b* D E *a*.

Cette différence de poſition d'axe à l'égard de la baſe, en peut faire dans la poſition des ſections du cylindre, comme elle en fait dans celles du cone.

57. La ſection d'un cylindre coupé par une ſurface plane, ne peut varier que de trois manieres.

I°. Lorſque le plan coupant paſſe au long de l'axe ou parallelement à l'axe, la ſection eſt un *parallelogramme* rectangle, ſi le cylindre eſt droit, & obliquangle, s'il eſt ſcalene, ou il peut auſſi être rectangle, ſi la ſection eſt perpendiculaire au plan paſſant par D *a*.

Fig. 14. 58. 2°. Lorſque le plan coupant eſt parallele à la baſe B *a*, comme *a b*, la ſection eſt un *cercle*; parce qu'on ſuppoſe toûjours un cylindre de baſe circulaire, & que la ſection parallele lui doit être ſemblable & égale, à cauſe que tous les côtés du cylindre étant paralleles à l'axe, les diametres feront tous égaux.

59. 3°. Lorſque la ſection eſt oblique, comme BA, elle eſt toûjours une ellipſe dans le cylindre droit, quelle que puiſſe être l'obliquité du plan coupant à l'égard de l'axe; mais dans le cylindre ſcalene, la ſection, quoiqu'oblique, peut être un
Fig. 15. cercle, lorſque le plan coupant (*Fig.* 15.) étant perpendiculaire au parallelogramme, par l'axe *b* D E *a*, fait avec les côtés des angles égaux à ceux de la baſe, mais en ſens *contraire*, c'eſt-à-dire,

que l'angle DBA ſoit égal à l'angle *ba*E, ou (ce qui eſt la même choſe (BAE égal à D*ba*; car ſi par le point C, milieu de BA, on mene *hg* parallele à *ba*, & que par le même point on tire *yx* perpendiculaire aux côtés *b*D, *a*E, on aura deux triangles égaux C*x*A, C*xg*, parce qu'ils ſont rectangles en *x*, & qu'ils ont les angles en A & *g* égaux (*par la ſuppoſition*) & le côté C*x* commun; donc les côtés CA, C*g* ſeront égaux entr'eux, de même que leurs oppoſés au ſommet *h*C & CB, donc les diametres *hg* & BA ſont égaux au diametre *ba* de la baſe circulaire, & les plans qui paſſent par ces lignes étant perpendiculaires à celui du parallelogramme par l'axe, les ſections ſeront égales; par conſéquent celle par BA ſera un cercle, & tout au contraire *yx* perpendiculaire aux côtés ſera une ellipſe, dont *yx* ſera le petit axe, de même que toute autre ſection oblique, qui ne ſera ni parallele à la baſe ni *ſou-contraire* comme BA. *Fig. 15.*

COROLLAIRE.

60. D'où il ſuit que (de même que dans le cone) les ſections elliptiques peuvent varier infiniment, ſelon l'angle plus ou moins aigu ou obtus que le plan coupant fait avec l'axe du cylindre, enſorte qu'elles s'allongent ou ſe racourciſſent, depuis la poſition perpendiculaire à l'axe, juſqu'à ce qu'il lui devienne parallele.

61. Où il faut remarquer, qu'il n'y a aucune différence de ces ellipſes à celles du cone, ce qui ſurprend ceux qui n'ont pas fait une étude de cette matiere; il leur ſemble que l'ellipſe cylindrique eſt uniforme à ſes deux extrêmités, mais que la partie de celle du cone qui eſt plus près du ſommet, doit être plus aigue que celle qui eſt vers la baſe; on voit cette erreur exécutée dans une pratique des *Inſtitutions géométriques d'Albert Duret*, où la courbe fait un jaret à chaque extrêmité de ſon axe; nous en montrerons la fauſſeté lorſque nous ferons voir, que la même ellipſe peut être une ſection commune au cone & au cylindre. On en ſentira facilement la vérité dès-à-préſent, ſi on ſe rappelle ce que nous avons dit (*Art.* 37.) que les ordonnées à un axe, qui ſont également éloignées du centre de l'ellipſe, ſont toûjours égales entr'elles, non-ſeulement dans le cone, mais encore dans le cylindre; puiſque leurs quarrés ſont entr'eux en raiſon des rectangles des abſciſſes qu'on ſuppoſe égales, propriété eſſentielle à l'ellipſe.

Inſtitutionum Geometricar. l. 4. fol. Aarnhemiæ 1606.

62. La ſeule différence qu'il y a dans ces ſections, c'eſt que l'axe du cylindre paſſe par le centre de l'ellipſe cylindrique, & que l'axe du cone droit ne paſſe pas par celle de la conique, mais plus ou moins près, ſuivant qu'elle eſt plus ou moins oblique, comme on le voit à la Fig. 6. où l'axe du cone coupe celui de l'ellipſe en O, la raiſon en eſt bien ſenſible dans le cone droit, où l'axe du cone XS diviſe l'angle du ſommet BSA en deux également, il ne peut diviſer de même une ligne terminée à ſes côtés, qui ne lui eſt pas perpendiculaire, comme DE dans le triangle par l'axe; puiſque n'étant pas parallele à BA, ſes parties DO & OE, ne ſont pas proportionelles à BX & XA; mais cette différence ne fait rien à la figure de l'ellipſe. Toutes les ſections que l'on peut faire dans le cylindre reviennent aux trois dont nous avons parlé, quoiqu'elles ne ſoient pas entieres; car
Fig. 14. la ſection NFE, qui ne coupe le cylindre (*Fig.* 14.) qu'en partie, eſt une portion d'ellipſe qui ſeroit entiere ſi le cylindre avoit été coupé entierement, comme il le ſeroit étant prolongé.

63. Cette ſection incomplete retranche un ſolide *enfg*, qu'on appelle un *onglet*, à cauſe de ſa reſſemblance avec l'ongle d'un doigt.

Application à l'uſage.

La connoiſſance des ſections du cylindre eſt la baſe de celles des différences des ceintres des faces de berceaux, & des courbes de leurs joints de tête; je ne parle point de ceux de lit, qui ſont des ſections preſque toujours rectilignes.

Les berceaux dont les *arcs-droits* ſont circulaires, ſont de vraies portions de *cylindres droits*, & ceux qui ſont ſurmontés ou ſurbaiſſés ſont des portions de cylindres ſcalenes, ce que l'on peut démontrer de la même maniere que nous avons fait pour les cones de baſe elliptique; car ſi le petit axe de l'ellipſe faite par la ſection perpendiculaire au parallelogramme par l'axe du
Fig. 15. cylindre, ne peut atteindre à la circonférence d'un cercle qui aura pour diametre la perpendiculaire *il*, ſur les côtés *b*B, *a*E, il eſt viſible qu'en inclinant ce plan vers L ou K, le diametre LK peut être allongé, au point qu'il devienne égal à *il*; ainſi quoique la baſe *ba*, oblique à l'axe M*m*, ou *bo* perpendiculaire à cet axe, ſoit ſuppoſée elliptique, ſi étroite que l'on voudra, la ſection *i*L*l*K pourra être un cercle, & le cylindre ſera

ſcalene dans un ſens différent de ce qu'il eſt ici.

Il peut arriver, & il arrive en effet, comme nous le dirons au Livre 4. par quelque raiſon de conſtruction, qu'un Architecte juge à propos de faire le ceintre de l'arc droit d'un berceau en courbe hyperbolique ou parabolique, alors il ne s'agit plus de conſidérer la voute comme une portion de cylindre proprement dit, mais d'un cylindroïde, dont nous allons examiner les ſections.

THEOREME III.

La ſection plane des eſpeces de cylindres qui ont pour baſe une parabole ou une hyperbole, eſt une ſection conique de même eſpece.

Si l'on ſuppoſe qu'une ligne A*a* (*Fig.* 20.) ſe meut parallelement à elle-même autour d'une ſection conique ouverte, elle formera par ce mouvement une eſpece de cylindre, que nous appellerons un *cylindroïde*, parce qu'il reſſemble au cylindre ordinaire, qui a pour baſe un arc de cercle ou d'ellipſe. Pl. 2. *Fig.* 20.

Soit le cylindre A*ad*DB*b*, qui a pour baſe une courbe ADB, que je ſuppoſe ici une parabole ; je dis que s'il eſt coupé par un plan parallele ou oblique à ſa baſe ADB, la ſection ſera encore une parabole.

Si le plan coupant eſt parallele à la baſe, la propoſition eſt évidente.

S'il ne l'eſt pas, ſuppoſons qu'il ſoit incliné comme en L*d*, & qu'il coupe celui de la baſe prolongée ſuivant la ligne MK, à laquelle ſoient menés deux plans paralleles A*b*, F*e*, qui coupent les précédens en ABHI & FE*fe* perpendiculairement à celui de la baſe MO, & parallelement à MK.

A cauſe des paralleles SC, *d*D, perpendiculaires au plan de la baſe, on aura les triangles ſemblables LC*c*, LG*g*, LD*d* dans le plan de l'axe CD de la parabole, & CS du cylindre, & à cauſe que MK (par la conſtruction) eſt parallele à AB & FE, elle le ſera auſſi à HI & *fe* ; donc HI eſt parallele à AB, & *fe* à FE, & AI & F*e* ſont des parallelogrammes ; puiſque A*a*, B*b*, F*f*, E*e*, qui ſont les côtés du cylindre, ſont paralleles entr'elles ; donc AH = BI, & F*f* = E*e* de même que HI = AB, & FE = *fe* ; par conſéquent LD : L*d* : : LG : L*g* : : LC : L*c*, & en diviſant CD : *cd* : : GD : *gd* ; mais par la ſuppoſition

Fig. 2. que la baſe ADB ſoit une parabole, on aura $\overline{CB}^2 : \overline{GE}^2 :: CD : GD :: cd : gd$, & puiſque $CB = cI$ ou $AB = HI$, & $FE = fe$, ou ſa moitié $GE = ge$, on aura $\overline{cI}^2 : \overline{ge}^2 :: cd : gd$, c'eſt-à-dire, les quarrés des ordonnées en même raiſon que les abſciſſes; donc H*d*I eſt une parabole, ſi ADB en eſt une; *ce qu'il falloit démontrer.*

On peut démontrer la même choſe de l'hyperbole, ſi la baſe ADB eſt hyperbolique, ou de l'ellipſe, ſi elle étoit portion d'une ellipſe, avec cette différence, que dans cette derniere la ſection pourroit devenir un cercle, comme nous l'avons dit des cylindres ſcalenes; car faiſant abſtraction de ce cas, les ordonnées correſpondantes CB, *c*I ſeront toujours égales entr'elles, de même que GE, *ge*, & les abſciſſes DC, *dc*, DG, *dg* auront toujours le même rapport dans la baſe & dans la ſection oblique, ce qui eſt clair en les conſidérant comme des parties des côtés du triangle L*d*D, coupé par des paralleles *c*C, *g*G, *d*D; par conſéquent les abſciſſes reſtant de la longueur de leurs diametres, ſeront encore en même raiſon; donc il y aura même rapport des rectangles de leurs parties aux quarrés des ordonnées.

Application à l'uſage.

On voit par cette propoſition quelles doivent être les courbes des ceintres de face, ou les joints de doële des berceaux biais ou rampans, ou en talud, dont les arcs-droits ne ſont pas circulaires, mais de quelqu'autre des ſections coniques, qui les rendent ſurhauſſés ou ſurbaiſſés en portion de parabole, d'hyperbole, ou d'ellipſe; car quoique nous ayons mis les berceaux elliptiques au rang des cylindres ordinaires, mais ſcalenes, ils peuvent être compris dans cette propoſition, qui montre plus généralement, pourquoi la ſection oblique & la baſe ſont de même eſpece.

Et pour donner un exemple particulier de pratique, cette propoſition fait voir que les arêtes des joints de lit de cette eſpece de voute en ſaillie hors du mur, qu'on appelle *trompe en tour ronde, érigée ſur une ligne droite*, dont l'arc droit eſt hyperbolique, comme il le doit être à celles qui portent les cabinets de l'Hôtel de Toulouſe, ſur la rue des Bons-enfans, auprès de la Place de Victoire à Paris, ſont toutes des arcs d'hyperboles différentes

différentes plus ou moins allongées, ſelon qu'elles s'approchent ou s'éloignent du milieu.

En ſecond lieu, elle fait voir que la projection d'une ſection conique quelconque, inclinée au plan de la baſe horiſontale ou verticale, eſt encore une courbe de même eſpece, parce qu'on peut imaginer que les lignes perpendiculaires à ce plan paſſant par tous les points du contour de la courbe, forment un cylindre ou cylindroïde, dont la baſe eſt la courbe de projection, & la courbe projettée peut être conſidérée comme la ſection oblique de ce cylindre.

THEOREME IV.

La ſection d'un cylindre creux dont l'épaiſſeur eſt par tout égale, coupé par un plan qui n'eſt pas parallele à ſa baſe, eſt une couronne d'ellipſe, compriſe par deux ellipſes ſemblables & concentriques, mais non pas équidiſtantes, excepté la ſection ſous-contraire dans les cylindres ſcalenes, où elle eſt une couronne de cercle.

Soit (*Fig.* 14.) une portion de cylindre A*ab*B, creuſe d'une cavité F*f*G*g*, qui eſt une eſpace cylindrique concentrique, & ſemblable à ce cylindre ſur l'axe commun C*x*, auquel la section plane AHB eſt oblique, je dis que les ellipſes AHB & FIG, formées par cette ſection à la ſurface intérieure & extérieure de ce cylindre creux, ne ſont pas équidiſtantes, quoiqu'il ſoit partout également épais. Pl. 1. Fig. 14.

DÉMONSTRATION.

Si l'on coupe un plan paſſant par l'axe du cylindre A*ab*B, il ſe formera à l'interſection des ſurfaces des triangles ſemblables AB*a*, FB*f*, dont les lignes *a*A & *f*F ſont paralleles, par la ſuppoſition que les ſurfaces extérieure & intérieure ſont équidiſtantes; donc B*a*: BA :: B*f*: BF, & en diviſant :: *af*: *a*F; mais B*a*, côté d'un angle droit B*a*A, eſt plus petit que BA, qui eſt l'hypotenuſe; donc *fa*, diſtance des deux ſurfaces à la baſe droite, eſt plus petite que FA, diſtance des mêmes à la ſection oblique; *ce qu'il falloit* premierement *démontrer*.

Préſentement nous pouvons démontrer que l'intervalle de ces mêmes ſurfaces coupées par un plan perpendiculaire au pre-

Pl. 2. Fig. 14. mier, ou si l'on veut, au triangle *a* BA, & par l'axe *c* C, sera égal dans la section oblique AB, à celui de la base droite *a* B, par la seule raison que l'intersection MP du plan est perpendiculaire à l'axe C*c*, comme le rayon de la base *c a* est perpendiculaire au même axe, & comme le rayon *c p* de la même base est parallele à CP.

Pour le concevoir plus distinctement, soit *m* MP*p* le second plan perpendiculaire au parallelogramme par l'axe a*ab*B, ce qu'il faut imaginer dans la figure où il ne l'est qu'en perspective, parce qu'en projection ce plan ne doit être représenté que par une ligne droite; or puisqu'il passe par l'axe, il fera deux parallelogrammes, un à la surface intérieure *l* LO*o*, l'autre à l'extérieure *m* MP*p*, dont les côtés seront paralleles entr'eux, & équidistans d'un côté & d'autre par la supposition; donc PO est égal à *p o*, mais *p o* est aussi égal à *f a*; donc PO est égal à *f a*, c'est-à-dire, que l'intervalle des deux ellipses AHB & FOG au petit axe, est le même que celui de la vraie épaisseur du cylindre; mais hors de cet axe il s'allonge continuellement jusqu'au grand axe AB, où cet intervalle FA est le plus grand; donc les intervalles des deux ellipses sont inégaux, quoique les surfaces soient équidistantes entr'elles; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

De-là il suit que la portion du grand axe qui est entre les deux ellipses, peut autant varier à l'égard de celle du petit axe, qui marque la vraie épaisseur du cylindre, qu'une ligne tirée obliquement entre deux paralleles à l'égard de la perpendiculaire; ainsi supposant que l'angle d'inclinaison AB*a*, de la section oblique à l'axe *c* C, soit de 60 degrés, la distance FA sera double de l'épaisseur *fa*, comme GB de B*g*.

Ce que nous venons de démontrer dans le cylindre droit est encore vrai dans le scalene, comme il est aisé de l'appercevoir en supposant que la courbe BMAP est un cercle, qui soit la base du cylindre scalene, alors la courbe B*m*a*p* sera une ellipse; la seule différence qui en résulte, est un changement de position dans les axes de la section inclinée à la base; car la ligne *mp* devient alors le grand axe, parce qu'elle est égale au diametre du cercle MP, égal par la supposition à BA, lequel est plus grand que Ba, comme l'hypotenuse d'un triangle rectangle AaB à l'égard de son côté Ba.

Application à l'usage.

Par le moyen de cette propoſition nous ferons voir au quatriéme Livre, qu'on ne peut faire deux ceintres elliptiques de doële & d'extrados, qui ſoient équidiſtans à la face d'une voute biaiſe, qu'on veut faire d'égale épaiſſeur, ſans la rendre inégale à l'arc-droit. Elle fait auſſi voir les inégalités qui réſultent à l'épaiſſeur des voutes biaiſes, lorſque leurs ceintres de face ſont faits d'ovales compoſées de portions de cercles concentriques; enfin elle ſervira à montrer la fauſſeté de l'ancien trait des voutes ſphéroïdes ſur un plan elliptique.

CHAPITRE IV.

Des Sections planes de quelques corps réguliérement irréguliers.

ON peut imaginer une infinité de corps formés par des révolutions de lignes courbes autour de leurs axes, ou de leurs tangentes, ou par le mouvement de quelques ſurfaces mûes de différentes manieres; mais nous nous bornons à ceux dont on voit des exemples dans les parties des voutes uſuelles, qui ſe réduiſent à trois ou quatre eſpeces.

66. *La premiere*, eſt de ceux qui ſont formés par la révolution des ellipſes, qu'on appelle ſphéroïdes; ſi la révolution ſe fait ſur le petit axe, le corps qui en réſulte ſera appellé *ſphéroïde applati*, tels ſont à peu près les oignons, les pommes & quelques citrouilles. Si la révolution ſe fait ſur le grand axe AX, nous l'appellons *ſphéroïde oblong*, tels ſont les melons & pluſieurs autres fruits, & particulierement les œufs. *Fig. 21.*

67. *La ſeconde eſpece*, eſt de ceux qui ſont formés par la révolution d'une ſection conique ouverte, parabole, ou hyperbole, tournant ſur ſon axe, on l'appelle *conoïde*, tels ſont les corps ASB, aux figures 22 & 23. *Fig. 22 & 23.*

La troiſiéme eſpece moins réguliere, eſt celle des corps appellés *ellipſoïdes*, qui ne ſont formés par la révolution d'aucune ellipſe conſtante ſur un de ſes axes, mais par la révolution d'une

ellipse sur un axe constant, dont l'autre varie de longueur, suivant le contour d'une autre ellipse, qui est perpendiculaire à la premiere; ou si l'on veut en prendre une autre idée, c'est une suite d'ellipses perpendiculaires à un axe, laquelle diminue suivant le contour de deux autres ellipses qui se croisent sur cet axe commun, c'est ce que j'appelle *ellipsoïde*, & qui est appellé en Architecture, *voute sphérique surhaussée ou surbaissée sur un plan ovale.*

Fig. 24. *La quatriéme espece*, est celle des corps formés par la révolution d'une section conique fermée, cercle ou ellipse autour de sa tangente, ou autour d'un autre cercle ou d'une ellipse, au plan duquel celui de l'ellipse ou du cercle générateur est toûjours perpendiculaire. Dans le premier cas le corps s'appelle *anneau fermé*, & dans le second simplement *anneau*, telles sont les *voutes sur le noyau.*

Fig. 25. *La cinquiéme espece* est celle des corps formés par le mouvement d'un cercle ou d'une ellipse tournant autour d'une hélice ou ligne en vis, ensorte que son plan soit dirigé à l'axe de l'hélice, ou perpendiculaire à sa tangente. J'appelle ce corps *hélicoïde*, tels sont les vis & colonnes torses, & en fait de voute, les *berceaux tournans & rampans, & vis St. Giles.*

THEOREME V.

La Section d'un sphéroïde & d'un conoïde régulier, coupé par un plan perpendiculaire à son axe, est un cercle; & s'il lui est parallele ou oblique, elle est une ellipse.

La premiere partie de ce Théorême est évidente, car puisque le sphéroïde ou conoïde est supposé formé par la révolution Fig. 21. 22. & 23. d'une demie ellipse ABX, ou d'une section conique ouverte ASB (*Fig.* 22 & 23) immobile sur un de ses axes, chaque ordonnée à cet axe, comme CB, K*g*, (*Fig.* 21.) ou CB, *g*T, (*Fig.* 22 & 23.) décrira par sa révolution un cercle dont elle est le rayon; & comme on peut appliquer une ordonnée à chaque point de l'axe, il suit que toutes les sections faites par des plans qui lui sont perpendiculaires, sont des cercles dans les sphéroïdes allongés ou applatis, & dans les conoïdes.

Quant à la seconde partie de ce Théorême, touchant les sections paralleles & obliques à l'axe, elle est démontrée dans la

quinziéme propoſition des conoïdes & ſphéroïdes d'ARCHIMEDE.

Premierement. Il n'eſt pas difficile à comprendre que les ſections paralleles à l'axe font des courbes ſemblables à la génératrice. Il n'eſt pas tout-à-fait ſi clair que les obliques ſont des ellipſes ; nous allons comprendre l'un & l'autre cas dans une démonſtration différente de celle d'ARCHIMEDE.

Soit l'ellipſe ADXB la ſection du ſphéroïde par ſon axe AX, laquelle eſt la même que l'ellipſe génératrice : ſi l'on ſuppoſe deux plans paralleles entr'eux BD, $g\,h$, & perpendiculaires à l'axe AX, & au plan paſſant par cet axe, leurs ſections dans le ſphéroïde ſeront des cercles repréſentés en perſpective par les courbes BLD, $g\,m\,h$, de même que celle du plan paſſant par l'axe perpendiculaire au plan BADX, ſera une ellipſe repréſentée par la courbe ALX, laquelle aura deux ordonnées CL, Km communes aux cercles BLD, $g\,m\,h$. Enfin ſi l'on coupe le ſphéroïde par un plan incliné à l'axe AX, comme en EF, & perpendiculaire au plan BADX, la courbe de la ſection repréſentée par E$m\,n$F aura auſſi deux ordonnées communes aux ſections circulaires ; ſçavoir In, Km : il faut démontrer que les quarrés de ces ordonnées ſont entr'eux, comme les rectangles EI × IF & EK × KF. *Fig. 21.*

Par une propriété dont nous avons parlé (Article 40) les lignes paralleles menées dans une ſection conique, & coupées par une troiſieme perpendiculairement ou obliquement, font des parties d'abſciſſes, dont les rectangles ſont proportionnels, BI × ID : EI × IF : : gK × Kh : EK × KF ; mais à cauſe des cercles des ſections perpendiculaires à l'axe, BI × ID $= \overline{\mathrm{I}n}^2$ & gK × Kh $= \overline{\mathrm{K}m}^2$; donc EI × IF : EK × KF : : $\overline{\mathrm{I}n}^2 : \overline{\mathrm{K}m}^2$; c'eſt-à-dire, que les quarrés des ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des abſciſſes ; donc la courbe $E\,m\,n$F eſt une ellipſe ; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'où il ſuit, que ſi le plan coupant eſt parallele à l'axe, la ſection ſera une ellipſe ſemblable à la génératrice.

Et que ſi deux plans inclinés à l'axe ſont paralleles entr'eux, leurs ſections ſeront des ellipſes ſemblables, ce qui s'étend auſſi aux conoïdes paraboliques ou hyperboliques, ce que nous al-

lons démontrer par une autre maniere, qui est celle d'ARCHIMEDE.

Fig. 22 & 23. Soit (*Fig.* 22) la courbe ASB la section d'un conoïde parabolique, coupé par un plan passant par son axe SC, & DF la section d'un plan perpendiculaire au précédent, soit menée PT, parallele à DF, & tangente à la parabole au point T, duquel soit mené T*g*, ordonnée à l'axe SC, & parallele à AB, & par S la ligne SI; soit enfin E*x* perpendiculaire à DF, qui sera aussi dans le plan du cercle A*x*B, base droite du conoïde, & par conséquent une ordonnée commune à cette base & à la courbe

* *Voyez la Hire, Prop. 29. l. 3.* D*x*F. Par la propriété du cercle $\overline{Ex}^2 = AE \times EB$; or * DE × EF : AE × EB :: $\overline{TI}^2 : \overline{Is}^2$, & TI = IP, parce que par la propriété de la parabole $gS = SP$*; donc DE × EF : $\overline{Ex}^2$ :: IP : IS; donc $\overline{Ex}^2$: DE × EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IP}^2$, & parce que les triangles FD*h*, PIS sont semblables, on démontrera de même que les quarrés des autres ordonnées au diametre DF, auront toûjours un même rapport aux rectangles des abscisses, que le quarré D*h* au quarré DF, dont la section sera toûjours une ellipse.

*Art. 45.

Il est visible que DF est le grand diametre, & que le petit sera égal à D*h*.

Secondement. Pour la section oblique du conoïde hyperbolique, tout étant disposé comme à la figure précédente, (*Fig.* 23.) AE × EB : DE × EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, or $\overline{Ex}^2$: DE × EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, qui est une propriété de l'ellipse. On démontrera de même que les quarrés des autres ordonnées à ce diametre auront un pareil rapport à leurs abscisses, comme $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$; or SI est plus petit que IT, puisque PI est plus petit que IT, par la propriété de l'hyperbole, donc la section faite par DF est une ellipse, dont le grand diametre est DF.

Fig. 23.

*Art. 45.

COROLLAIRE.

De-là il suit, que la section plane d'un sphéroïde creux, d'égale épaisseur, est une couronne comprise dans la circonférence de deux ellipses semblables & concentriques; mais non pas équidistantes, comme nous l'avons dit des sections du cylindre & de quelques-unes du cone; ce qui nous servira au qua-

triéme Livre à montrer l'erreur du trait des voutes ſphériques, ſuivant les Auteurs de la coupe des pierres.

La ſeconde eſpece de corps régulierement irréguliers que nous avons à connoître pour la pratique des voutes, ſont les *annullaires*, qui ſont des cylindres pliés ſur leurs axes, ordinairement en portion circulaire, enſorte que les axes & les côtés ſont des arcs de cercles concentriques.

THEOREME VI.

La Section d'un corps cylindrique annullaire, dont l'axe eſt courbe, en forme de circonférence de cercle, & qui eſt coupé par un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe courbe, eſt une ovale du quatrieme ordre.

Soit le corps cylindrique courbe HD h, fait par la révolution du petit cercle GHI, élevé perpendiculairement ſur le plan du grand cercle IDi, dont le centre eſt C, autour duquel s'eſt fait la révolution du petit cercle GHI, enſorte que le diametre GI ait toûjours été dirigé au centre C; ſi l'on ſuppoſe ce corps coupé par le plan ALBO perpendiculairement au plan IDi, dont la commune ſection ſoit AB, il ſe formera à la ſurface du cylindre annulaire une courbe ALBOA, qui ſera une ovale du quatrieme ordre. *Fig. 24.*

Par un point quelconque N de la commune ſection AB, conſidérée comme l'axe de la courbe, ſoit tiré du centre C le rayon CMK, qui coupe en M le cercle gFG, concentrique à iDI, & ſur ſa partie MK = GI ou gi, ſoit élevé un plan perpendiculaire au plan IDi, qui coupera celui qui paſſe par AB, & dont la commune ſection ſera NL perpendiculaire à l'axe AB de la courbe cherchée ALB.

Soit donc le rayon Ci, ou ſon égal CD, que l'on ſuppoſe mené perpendiculairement à AB $= a$, le diametre du petit cercle GI ou gi, ou MK $= b$, AE $= c$ ou AB $= 2c$, l'abſciſſe AN $= x$, l'ordonnée NL ou NO $= y$, on aura par la nature du cercle CE $= \sqrt{aa - cc}$ & EN $= c - x$; donc CN $= \sqrt{aa - 2cx + xx}$, & KN $= a - \sqrt{aa - 2cx + xx}$, MN $=$ KM $-$ KN $= b - a \pm \sqrt{aa \pm 2cx \pm xx}$; mais par la na-

ture du cercle, le rectangle $KN \times MN = \overline{NL}^2$; ainſi multipliant $KN \times MN$, & égalant le produit à yy, on trouvera $ab -$ $2aa + 2cx - xx + \overline{2a - b}\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$. Pour abréger la réduction, ſoit nommé $2a - b = e = Ig$ ou iG, ce qui étant ſubſtitué, on aura cette équation $- ae + 2cx -$ $xx + e\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$, ou bien en tranſpoſant pour mettre tous les rationels d'un côté $xx - 2cx + ae + yy = e$ $\sqrt{aa - 2cx + xx}$; pour en ôter l'aſymmetrie, il faut quarrer les deux membres de l'équation, ce qui donnera $x^4 - 4cx^3$ $+ 2aexx + 2yyxx + 4ccxx - 4acex - 4cyyx +$ $2aeyy + y^4 = - 2ceex + eexx$, réduiſant cette équation à o ſelon l'ordre des dimenſions de x, ſuivant la coutume, on aura :

$$\begin{array}{lllll} x^4 - 4cx & + 2aexx & - 4acex & + y^4. & \\ & - ee & + 2cee & + 2aeyy & = 0 \\ & + 4cc & - 4cyy & & \\ & + 2yy & & & \end{array}$$

laquelle équation exprime la nature de la courbe ALB de la maniere la plus ſimple, dans ſon état de généralité ; ainſi c'eſt une courbe du quatrieme ordre, parce que les co-ordonnées x & y, montent à la quatrieme dimenſion ; mais il y a des cas particuliers où elle devient plus ſimple, par exemple :

Si la ſection AB paſſe par le centre, il eſt viſible que la courbe ALB ſe partage en deux cercles ihg, & GHI, dont l'équation eſt $xx + \begin{matrix} e \\ -2a \end{matrix} x + yy = 0$. Auſſi dans ce cas notre équation trouvée ſe laiſſe diviſer par ce diviſeur $\begin{matrix} xx & -2a & x & +2ae \\ 1 & -e & & +yy \end{matrix}$, & le quotient donnera ladite équation $xx + \begin{matrix} e \\ -2a \end{matrix} x + yy = 0$, pour le cercle ihg ou IHG, comme il doit arriver, ſi l'on prend IG égal à tout le grand diametre Ii, c'eſt-à-dire, ſi Ig ou e eſt égal à o, auquel cas le corps annulaire HDh devient une ſphere, enſorte que la courbe de la ſection ALB en ſera un cercle mineur. Notre équation la doit marquer en effet, ſi vous y omettez les termes

termes où se trouve la lettre e; puisque $e=0$, l'équation générale se change en celle-ci Fig. 24.

$$x^4 - 4cx^3 + 4ccxx - 4cyyx + y^4 = 0$$
$$+ 2yy$$

dont on peut tirer la racine quarrée $xx - 2cx + yy - 0$; or il est clair que cette équation particuliere est pour le cercle, dont le diametre est $2c =$ AB, qui marque évidemment que la section ALB dégénere en cercle.

Ce sont là tous les cas possibles où la courbe en question puisse devenir d'un ordre inférieur que du quatrieme.

La troisieme espece de corps régulierement irréguliers, dont nous avons besoin de connoître les sections, est celle des *Cylindriques hélicoïdes* (en termes d'Architecture) des voutes en *vis*.

Nous appellons *cylindre hélicoïde* un corps cylindrique, qui, au lieu de tourner dans un plan autour d'un centre, tourne en s'élevant autour d'un axe, comme le lierre, ou plutôt le liseron, s'éleve en embrassant un arbre, d'où vient le mot *d'hélice*, usité en Architecture, tiré du Grec *heliso, circumvolvo*. Tel est le corps EGMgD (*Fig*. 25.) Fig. 25.

COROLLAIRE I.

De cette définition on peut conclure que la section de ce corps, coupé par un plan parallele à son axe, ne sera pas d'une espece différente de celle du corps annulaire dont nous venons de parler, si la base ou projection de l'hélice est un cercle; car toutes les distances de l'axe à ce corps, mesurées horisontalement seront égales à celle de la section de l'anneau à son centre, & toutes les sections verticales par l'axe seront des cercles égaux, comme celles de l'anneau, coupé par un plan passant par le centre C (*Fig*. 24) & perpendiculairement au plan i DI, supposant l'un & l'autre corps cylindrique d'égale grosseur; il n'y aura donc de différence, que celle du changement de hauteur de toutes ses sections circulaires, qui s'élevent comme par degrés les unes au-dessus des autres, au long d'un axe incliné au plan de la base; ce qui est exprimé à la Fig. 26. par les différences de hauteur $n\,e\,o\,a$. Fig. 26.

COROLLAIRE II.

D'où il suit que pour connoître & tracer la section de l'hélice, il faut commencer par tracer celle de l'anneau supposé sur sa base, & coupé à même distance du centre que l'hélice l'est de son axe, & donner à l'axe de l'hélice l'inclinaison qu'il doit avoir, laquelle se trouve par la hauteur de la ligne *a b* (*Fig.* 25) Nous ne nous arrêtons pas ici à la description de l'une & de l'autre courbe, que nous donnerons au second Livre; il suffit d'exposer aux yeux leur rapport par la figure 26.

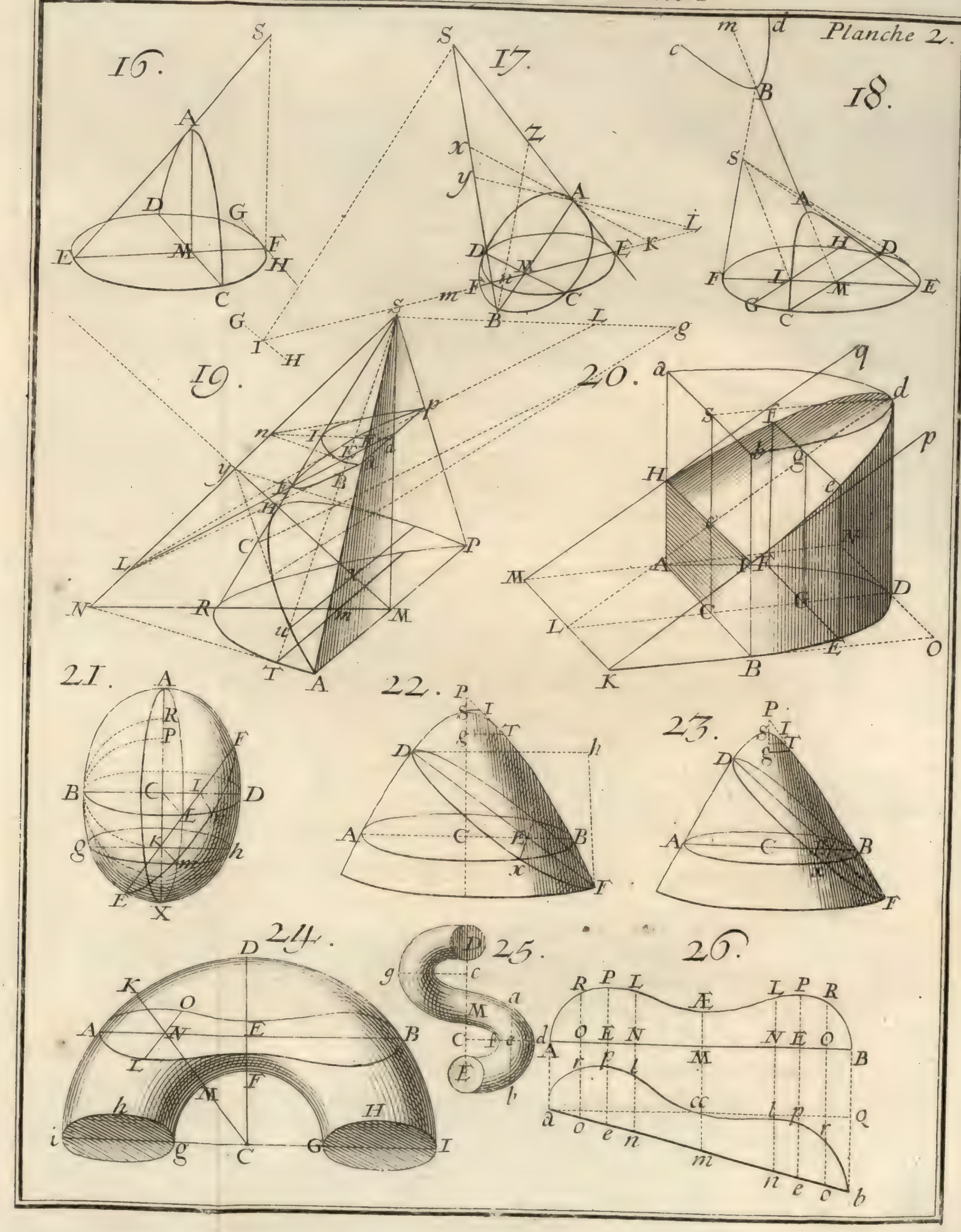
Fig. 25.

Application à l'usage.

74. Cette proposition fait connoître quelle est la courbure du ceintre d'une interruption de voute sur le noyau par un mur ou une saillie droite, comme pourroit être la tour quarrée d'un clocher, au chevet d'une Eglise, ainsi voutée à son bas côté; mais il sert principalement à trouver la cerche droite, qui doit guider la courbure de la doële d'une voute sur le noyau, où d'une vis St. Giles, perpendiculairement au rayon, venant du centre de la courbure de l'axe & des côtés, comme on en a besoin pour l'appareil, ce que nous ferons voir dans le quatrieme Livre où il s'agit de l'appareil; nous croyons n'avoir pas besoin de nous étendre davantage sur les changemens qui peuvent arriver à ces courbes, par ceux qu'on peut faire aux ceintres des cercles générateurs IHG, soit en les surhaussant, soit en les surbaissant, ou à la courbure de l'axe, laquelle au lieu d'être circulaire pourroit être elliptique, parce que nous pourvoirons dans la pratique à l'exécution de toutes ces variations.

Des Sections du coin-conoïde coupé par des plans.

IL est une sorte de corps régulierement irrégulier, dont on ne fait pas mention dans les élémens de Géométrie, mais dont il est nécessaire d'examiner les propriétés dans ceux de la coupe des pierres, parce que rien n'est plus fréquent dans les bâtimens que certaines petites voutes qu'on appelle *arrieres vous-*


Planche 2.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.

ſures reglées & bombées dont la ſurface concave eſt préciſément la même que la convexe du ſolide que nous appellons ici *coin-conoïde*; en voici la génération.

Soit un parallelogramme ABED, ſur un côté duquel AB eſt élevé à angle droit, un cercle AHBF, dont AB eſt le diametre. Si l'on ſuppoſe une ligne droite HM qui s'appuye par un bout H ſur la circonférence du cercle, & par l'autre ſur la ligne droite DE, qu'on la faſſe mouvoir ſur ces deux appuis de A par H en B, & de D en E; enſuite par-deſſous de B par F en A; puis encore par l'autre B, de E en D, elle parcourera en l'air la ſurface d'un corps arrondi par un bout comme un cone, & par l'autre en angle aigu, comme un *tranchant* de coin; d'où nous avons crû devoir 1°. appeller cette figure un *coin-conoïde*; 2°. le cercle de la baſe AHBF, *tête* du coin; 3°. la ligne CM paſſant par ſon centre (c'eſt le milieu M du *tranchant* DE) *l'axe du coin*; 4°. Le plan ADEB, paſſant par le même centre C & le tranchant DE, le *parallelogramme par l'axe*. 5°. Le plan qui lui eſt perpendiculaire, paſſant par le même axe, le *triangle par l'axe* HFM. Pl. 2. bis. Fig. 1.

Il ſuffira pour notre objet de conſidérer ſeulement la moitié de ce corps qui eſt analogue à quelques-unes de nos voutes, & les propriétés des lignes courbes qui terminent les ſections que peuvent y faire des plans qui ſont ſuppoſés le couper en différentes parties & ſituations.

THEOREME VII.

Premiere ſection.

Si le coin-conoïde eſt coupé par un plan perpendiculaire à celui du parallelogramme par l'axe, & parallele à un de ſes côtés, la ſection ſera un triangle rectangle, comme CHM, ORN, dont le plus grand ſera celui qui paſſe par cet axe, & la plus grande des ordonnées au demi-cercle CH, d'où ils diminuent de part & d'autre, dans le rapport des autres ordonnées OR, *or*, parce qu'étant tous de même longueur CM, ON, ils ſont entr'eux comme leurs baſes OR, *or*, juſqu'à ce que la ligne génératrice HM vienne ſe confondre avec celle des côtés AD ou BE, où la ſection triangulaire s'évanouira. Fig. 3.

Pl. 1. bis. Fig. 3. Cette propoſition n'a pas beſoin d'autre démonſtration que celle de la définition de la génération de ce corps, puiſque les ſections faites dans les plans du cercle de la *tête* & du *parallelogramme par l'axe*, par un troiſieme plan qui les coupe, ſont évidemment des lignes droites, & que la troiſieme ſurface qui eſt courbe, a été ſuppoſée formée par le mouvement d'une ligne droite, changeant continuellement d'inclinaiſon, mais toûjours dans un plan parallele à l'axe du coin-conoïde.

THEOREME VIII.

Seconde ſection.

Si le plan coupant le coin-conoïde eſt perpendiculaire au parallelogramme par l'axe, & parallele au cercle de la tête du coin, la ſection ſera une ellipſe.

Pour démontrer cette propoſition avec moins de confuſion de lignes dans la figure, il ſuffira d'y tracer la moitié de notre moitié du coin c'eſt-à-dire, le quart du complet, comme l'on

Fig. 2. en voit un à la Fig. 2, parce que l'autre moitié ſera toûjours égale à celle-ci.

Fig. 4. Soit (*Fig.* 4.) le rectangle CMEB, la moitié du parallelogramme par l'axe & le quart de cercle CAB, celui de la tête du coin perpendiculaire à ce rectangle, & GLH la ſection faite par un plan qui lui eſt parallele; je dis que la courbe H x y L qui la termine eſt une *ellipſe*.

Car ayant elevé à volonté des ordonnées au demi diametre CB, en OR, & or, & tiré par les points O & o des lignes ON, on paralleles à CM ou BE qui couperont le demi-diametre GL en P, & p, ſi l'on éleve par ces points G, P, & p des perpendiculaires à GL, & que des points A, R, r de la circonférence de la *tête* on tire des lignes droites aux points M, N, n, elles couperont ces perpendiculaires aux points H, x, y, qui ſeront à la circonférence d'une ellipſe, comme il eſt aiſé de le démontrer.

A cauſe des triangles ſemblables MCA, MGH, on aura MC. CA :: MG. GH, & par la même raiſon NO. OR :: NP. Px, & encore $no.or :: np.py$; mais MC = NO = no & MG = NP = np, donc CA. GH :: OR. Px :: $or.py$, donc les or-

données à l'axe de la courbe, sont entr'elles comme les ordonnées au diametre du cercle, ce qui est une propriété de l'ellipse ; donc cette section est une ellipse, *ce qu'il falloit démontrer.* Pl. 2. bis. Fig. 4.

COROLLAIRE I.

Cette démonstration convient à toutes les positions de lignes paralleles à CB entre C & M ; mais il est visible que toutes les ellipses seront d'inégale hauteur, à mesure que le plan coupant s'approchera de C, elle s'arrondiront de plus en plus ; & au contraire plus il s'approchera de la ligne ME, plus la courbure du contour s'applatira ; en sorte que si elle en approche infiniment, le petit axe *g h* se réduira à un point, & la courbe s'évanouira en ligne droite, égale à ME du tranchant.

COROLLAIRE II.

Si la courbe de la tête du coin-conoïde que nous avons supposée en demi-cercle, étoit seulement un segment de cercle ou une demi-ellipse sur son petit axe, la section seroit encore un segment d'ellipse ou une demi-ellipse semblablement posée.

COROLLAIRE III.

Mais si la tête étoit elliptique d'une moitié qui eut son grand axe en hauteur, il se trouveroit une section circulaire entr'elle & la ligne du tranchant ME, supposant toujours le plan coupant perpendiculaire à celui du parallelogramme par l'axe & parallele à celui de la tête, au-delà duquel en tirant vers le tranchant ME, les sections elliptiques auroient leurs axes en position contraire à ceux de la tête, c'est-à-dire, le grand sur le plan du parallelogramme par l'axe, & le petit en hauteur, comme dans le premier cas, dans le triangle par l'axe du coin-conoïde CAM ; au lieu que dans cette derniere supposition, la moitié du grand axe est dans ce triangle, & le petit dans le plan du parallelogramme par l'axe ; ce qu'il est aisé d'appercevoir, en faisant attention que depuis la section circulaire qui ne seroit pas sur la ligne CB, mais en-dedans vers ME, la ligne du sommet MA s'éleveroit d'autant plus au-dessus du sommet A que la section se feroit au-delà de CB en-dehors. Fig. 12.

Troisieme section.

Pl. 2. bis. Fig. 5. Si le plan coupant n'est ni parallele aux côtés du parallelogramme par l'axe MC du coin, ni au demi-cercle de la tête AHB, mais incliné à l'un & à l'autre, ensorte cependant qu'il soit toûjours perpendiculaire au plan de ce parallelogramme, il se formera des sections qui ne seront plus ni circulaires ni elliptiques, ni d'une courbure uniforme de part & d'autre du milieu de leurs axes, mais plus arrondies ou enflées d'un côté que de l'autre, suivant les différentes circonstances de ce plan coupant; sçavoir,

1°. Lorsque le plan de section coupe les deux côtés opposés du parallelogramme par l'axe, & qui lui sont paralleles sans les prolonger au-dehors du coin, comme IK (*Fig.* 5.)

2°. Lorsqu'il ne coupe qu'un de ces côtés, & le tranchant
Fig. 6. DE, comme AT (*Fig.* 6.)

3°. Lorsqu'il coupe le tranchant DE & la tête du coin AB,
Fig. 7. comme ZK (*Fig.* 7.)

Fig. 8. 4°. Lorsqu'il ne coupe les côtés opposés que hors du coin, en les prolongeant tous deux comme KML (*Fig.* 8.)

Fig. 5. *Premier cas.* S'il coupe les deux côtés opposés comme en IK, il se formera une courbe à la surface de la section du coin, dont le contour sur la moitié de l'axe IV sera plus arrondi que celui de l'ellipse passant par le même point V de l'axe du coin; & l'autre sur VK sera plus applati & deviendra aigu en K, d'autant plus que ce point approchera du point E du tranchant.

Car si l'on suppose une section elliptique GL parallele (comme il a été dit ci-devant (à la *tête* AB, on reconnoîtra que les deux plans de ces sections sur IK & GL qui sont leur axe, se couperont suivant une ligne V*h* qui sera perpendiculaire commune à ces deux axes, & au plan du parallelogramme par l'axe du coin (par la 19. du 11. Livre d'Euclide) dont elle sera une ordonnée commune à ces deux sections elliptique & oblique. Cela supposé il sera aisé de démontrer que toutes les ordonnées à la moitié de l'axe oblique IV, seront plus grandes que celles de la moitié de l'ellipse GV du même côté, car la section triangulaire NRO sera coupée par les deux plans des autres sections G*h*L, & I*h*K qui auront aussi dans leurs intersections des perpendiculaires communes Q*x*, P*d*, terminées par

la ligne NR qui s'éleve du point *d* au point *x*, dans le rapport des longueurs des bases des triangles semblables NQ *x*, NP *d*, ce qui sera vrai de toutes les ordonnées à l'axe oblique de V en I, où l'on aura toûjours NQ. Q *x* : : NP . P *d*; mais NQ est plus grand que NP, dont Q *x* est plus grand que P *d*. Pl. 1. bis. Fig. 5.

Tout au contraire, dans la moitié de la courbe de *h* en K, les ordonnées à la partie VK de l'axe oblique, seront plus courtes que celles de l'ellipse, parce qu'elles approchent plus du tranchant DE, où le coin se réduit à un angle très-aigu, & l'on trouvera de même dans les sections triangulaires coupées par les plans elliptiques & obliques, une pareille analogie, *np* . *nq* : : *pe* . *qy*; mais *np* est plus grand que *nq*, donc *pe* est plus grand que *qy*; *ce qu'il falloit démontrer*.

Donc la moitié de la section oblique qui approche le plus de la tête du coin, est plus arrondie & enflée à mesure qu'elle s'en approche, & plus applatie & angulaire par le côté opposé; donc elle n'est ni circulaire ni elliptique, car la partie inférieure du coin-conoïde *complet* seroit égale à celle des mêmes côtés; ce qui n'arriveroit pas à une ellipse dont IK ne seroit pas un axe, mais un diametre, parce qu'alors l'enflure de la partie supérieure vers I se trouveroit tournée dans l'inférieure vers K, ce qui n'arrive point ici, puisque la courbe y est également resserrée comme au-dessus.

On a supposé ici que les différences des longueurs NQ & NP d'un côté, & *nq* & *np* de l'autre étoient connues, parce que la mesure de l'obliquité est nécessairement connue par les longueurs GI, LK & un point donné, par exemple Q, dans l'axe IK, sur lequel on veut déterminer une ordonnée Q *x*, relative à celle de l'ellipse P *d*, sur la ligne NO parallele à l'axe CM du coin-conoïde. On aura donc les triangles semblables VGI, VPQ, d'où l'on tirera l'analogie VG. GI : : VP . PQ, que l'on cherche pour l'ajouter à NP, & avoir la longueur totale NQ, supposée connue dans les analogies précédentes. Par le même raisonnement on aura de l'autre côté les triangles semblables VKL, V *qp*, qui donneront VL . VK : : V *q* . *qp*, que l'on cherche pour l'ôter de *np*, & avoir la longueur *nq* qu'on a employée pour trouver les différences des ordonnées de l'ellipse avec celles de la courbe oblique, *ce qu'il falloit faire & démontrer*.

Second cas de la section oblique. Si le plan coupant (toujours Fig. 6.

Pl. 2. bis. Fig. 6. supposé perpendiculaire au parallelogramme par l'axe) n'en coupe qu'un côté parallele à cet axe, & l'autre adjacent, comme le tranchant DE par exemple en T, la section sera encore de la même espece que la précédente, avec cette différence qu'elle devient plus aigue, & que si l'on suppose un autre coin-conoïde opposé au sommet du premier, comme on suppose des cones pour trouver les propriétés de certaines sections coniques, & qu'on prolonge le plan de la section en Z, jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté BE prolongé, il se feroit une section concave, ensuite de la convexe, par une transition insensible sans jarret dans le rebroussement, comme on voit dans la Figure 6 en T z Z.

La maniere de trouver autant de points que l'on voudra dans le contour de cette section, est toûjours la même que dans la précédente, qui est de prendre sur l'axe AT, tel point que l'on voudra pour y élever une ordonnée, & mener par ce point (par exemple Q) une parallele ON à l'axe CM du coin, qui formera les triangles semblables TAD, TNQ, & donnera les analogies suivantes TD. : TA : TN. TQ : : TM. T*q*, & ensuite comme ci-devant, à cause des triangles semblables NOR, NQ*x*, MCH, M*q* Y; on aura NO. OR : : NQ. Q*x* qu'on cherche, ou MC. CH : : M*q*. *q* Y, ce qui donne les points *x* & Y à la circonférence de la courbe A *xy* T.

Nous parlerons ci-après de la section qui se feroit hors du coin-conoïde, s'il y en avoit un second opposé au sommet.

Fig. 7. *Troisiéme cas* de la section oblique. Lorsque le plan coupe un des côtés du parallelogramme par l'axe, & le plan du demi cercle de la tête, alors cette section FK est bien de la même espece que les précédentes, mais *incomplete*; je veux dire que sa circonférence n'atteint à son axe que d'un côté, & non pas de l'autre où elle est terminée à celle du demi-cercle de la tête, que le plan de section coupe suivant l'ordonnée FS, commune aux deux contours. Les points de cette courbe se trouveront comme dans le cas précédent, par les triangles semblables FBK, F*op*, FCP, dans le plan du parallelogramme par l'axe du coin, & les sections triangulaires MCH, N*or* qui couperont le plan de la section suivant les ordonnées communes à la section oblique P*x*. *py*; ce qu'il est inutile de repeter.

Nous avons dit que cette section étoit incomplete; si l'on veut sçavoir ce qui lui manque pour revenir à son axe, il n'y a qu'à prolonger

prolonger KF en Z, jufqu'à ce qu'il rencontre le côté DA prolongé jufqu'au point d'interfection Z; alors on peut comparer cette prolongation aux ordonnées du cercle dans la partie ASF, comme l'on a comparé pareille fection avec l'ellipfe dans la cinquiéme figure, en fuppofant le coin-conoïde prolongé en avant de fa tête AHB. Pour trouver par exemple l'ordonnée G*g* en dehors par le point donné *g*, on tirera *g q* parallele à AD qui coupera le diametre AB en T, par où ayant élevé TV = TS, on tirera *q* VG qui coupera en G fa parallele *g* G ordonnée à la courbe ZGVK que l'on cherche; d'où il fuit que la courbe oblique fera plus haute que le cercle, & plus enflée à mefure qu'elle avancera vers Z, c'eft-à-dire que les ordonnées excéderont de plus en plus celles du cercle, ainfi qu'il a été démontré dans le fecond cas de la fection oblique. Pl. 2. bis. Fig. 7.

Quatrieme cas. Lorfque le plan coupant ne coupe aucun des côtés paralleles à l'axe du coin, mais ceux de la tête & du tranchant, il eft vifible que ce cas eft un compofé du fecond & du troifieme exprimés dans les Fig. 6 & 7, la fection eft angulaire comme dans le fecond, & incomplete comme dans le troifieme, & cette fection incomplete a fa circonférence d'autant plus approchant de la ligne droite que le plan coupant approche du parallelifme de l'axe du coin, ce qui eft évident. Fig. 6. & 7.

Pour réfumer tout ce que nous avons dit ci-devant des fections obliques, & mettre fous les yeux les différentes courbes qui en proviennent, nous fuppoferons deux coins-conoïdes oppofés au fommet fur un même axe prolongé CMX; & pour rendre la figure plus fimple, nous ne tracerons qu'une moitié de chacun des parallelogrammes par l'axe commun de ces deux coins ADMC & MEB*c*, fur les côtés defquels CA & B*c* on tracera le quart de cercle AH, repréfentant celui de la tête, qui doit être fuppofé à angle droit fur les plans de ces parallelogrammes, ce qu'on ne peut exprimer dans la figure, de même que fon oppofé B*h*. Fig. 8.

Si l'on fuppofe ces parallelogrammes coupés par des plans qui leur foient perpendiculaires, mais tournés différemment & obliquement à l'égard de l'axe commun C*c*, (comme font les lignes 2^d, 20′, 1, 21) AB, KL, paffant toutes par le milieu M du tranchant commun DE, on pourra tranfporter toutes les longueurs de ces lignes fur l'axe commun, comme M2 en M12, M1 en M11, MA en M*a*, & MK en M*k*; & par les

Pl. 2. bis. Fg 6. & 7. moyens qui ont été donnés ci devant, on tracera les courbes sur les axes AM, 1M, 2 M comme dans le cas de la Figure 6, & KM qui excede la longueur du coin-conoïde ADMC, comme dans le cas de la Fig. 7, en prolongeant les lignes MP & DA, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en K. On en fera autant dans l'autre moitié du coin-conoïde opposé, & l'on aura les courbes *k*ZYM*y l*; *a x* M*x b*; 11 *x*M*z* 1^d; 12*y*M *z* 2^d, qui exprimeront toutes les courbes des sections faites par des plans obliques à l'axe suivant les angles donnés AMC, 1MC, 2MC, *p*MC; & si l'on double les courbes au-dessous de l'axe, comme MV *l y*M, on aura les sections du coin-conoïde entier, lesquelles étant jointes ensemble & rassemblées, forment la figure de ces cordons noués qu'on appelle *lacs* d'amour. Ce qui n'est ici qu'une pure curiosité, à laquelle nous ne devons pas nous arrêter.

Quatrieme section du coin-conoïde.

Nous avons supposé jusqu'ici que ce solide étoit coupé par des plans toûjours perpendiculaires à celui du parallelogramme par l'axe, mais inégalement obliques à la direction de cet axe ou des côtés, ce qui revient au même.

Présentement nous supposons que le plan coupant est parallele à celui de ce parallelogramme plus ou moins éloigné d'un intervalle pris à volonté, & nous cherchons quelle est la courbe qui termine la section à la surface du coin, dont le contour est différent du cercle & de l'ellipse, & de toutes les précédentes, & dont on trouvera autant de points que l'on voudta par le calcul, ou avec le compas. Soit ACMD la moitié du parallelogramme par l'axe du coin CM, & AHCMD le quart du corps entier, ce qui nous suffit, parce que les trois autres lui sont égaux, pour éviter la confusion des lignes dans la figure.

Fig. 10.

Ayant placé un point G sur le rayon CH perpendiculaire au plan du parallelogramme par l'axe CD, à la hauteur donnée CG au-dessus de ce plan, on menera GF parallele à CA qui coupera e s ordonnées au rayon AC, comme OR en P, & *o r* en *p*, & passera par le sommet d'une autre *o* F égale à CG. Si du point G on tire une parallele GZ à l'axe CM, elle coupera le côté HM de la section triangulaire par l'axe du coin au point Z qui sera un de ceu xde la courbe cherchée.

Par la même construction (supposant la prépara ion de la

figure comme dans toutes les précédentes) on tirera une parallele au même axe, ou à sa parallele ON par le point P, où la ligne de hauteur FG du plan coupant, croise l'ordonnée OR. Cette parallele P*y* coupera le côté du coin RN au point *y* qui est un second point de la courbe cherchée; on tirera de même par le point *p* d'intersection des lignes FG de hauteur du plan, & *or* ordonnée dans le quart de cercle qui coupera le côté *rn* de la section triangulaire *orn* au point *x* qui est un troisieme point de cette courbe, sur laquelle on en trouvera autant qu'on voudra, en multipliant les ordonnées & les sections triangulaire par ces ordonnées, comme il a été dit ci-devant. Pl. 2. bis. Fig. 10.

Par où l'on voit que cette section differe des obliques à l'axe; en ce qu'elle ne peut jamais devenir anguleuse, comme celles dont nous avons donné la description.

De la construction de cette courbe avec la regle & le compas qui donne toûjours des intersections de lignes droites, dont les points de rencontre sont à la surface du coin-conoïde dans un plan parallelele au parallelogramme par l'axe, il est facile d'appercevoir comment on peut trouver par le calcul les points de la circonférence de la courbe demandée, à cause des triangles semblables qu'on y a fait CHM, GHZ; ORN, PR*y*, &c. qui donnent les analogies suivantes HC. CM :: HG. GZ, ce qui donne la ligne GZ qui sera une ordonnée à GF, qu'on peut prendre pour axe de la courbe, & par conséquent le point Z sera un de ceux de sa circonférence.

De même & par la même raison, on aura RO. ON = CM :: RP. P*y* & *ro*, *on* = MC :: *rp*. *px*, ce qui donne quatre points de cette courbe; sçavoir, le point F donné par la ligne GF parallele à CA, & les trois *xy*Z qu'on vient de trouver.

En repetant cette courbe de l'autre côté du triangle par l'axe CHM, on aura la section toute entiere.

Il est visible que si au lieu du point G donné pour hauteur du plan, on en avoit pris un plus bas en *g*, on auroit eu aussi un point V plus près du parallelogramme par l'axe que donne la parallele *g* V à cet axe, & par conséquent une circonférence de section plus étendue, mais qui ne seroit pas parallele à la précédente, à cause de la différence des inclinaisons des côtés du coin pris sur les sections triangulaires, paralleles à la plus grande qui est par l'axe.

Pl. 2. *bis.* *Fig.* 10.

On auroit pû chercher toutes les courbes des ſections obliques & de celle-ci, d'une maniére plus ſçavante, par le calcul analytique, qui eſt la clef des découvertes; mais la ſynthefe eſt ordinairement plus utile aux arts, où la Géométrie linéaire repréſente mieux les objets à l'imagination, lorſque les figures ne ſont ni trop compliquées ni trop chargées de lignes pour les repréſenter.

Et pour montrer qu'on n'y perd rien pour ce qui concerne la pratique de l'art dont il eſt ici queſtion, je vais en tirer un exemple de la courbe de cette derniere ſection du coin-conoïde coupé par un plan parallele à celui du parallelogramme par l'axe : car ſoit nommé le rayon de la tête du coin $CH = CA = a$, la diſtance du centre C à l'ordonnée $CO = b$, la pareille $C\,o = c$, $F\,o = y\,q = \sqrt{a^2 - c^2}$, $RO = \sqrt{a^2 - b^2}$; $ON = CM = d$, à cauſe des triangles ſemblables on aura $OR \,.\, ON :: y\,q = FO \,.\, q\,N = y\,k$

$$\sqrt{a^2 - b^2} \,.\, d :: \sqrt{a^2 - c^2} \,.\, d\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$ donc $y\,k = q\,N = d\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$, ce qu'il falloit trouver, c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier la longueur $CM = ON$ par la racine quarrée du rayon CA, & en ôter celle du quarré de la partie CO, & diviſer ce produit par le quarré du rayon, après en avoir retranché celui de l'abſciſſe $C\,o$, ce qui occaſionne une longue opération de chiffres en comparaiſon de la ſimple opération linéaire avec le compas, qui donne tout d'un coup $P\,y$, dont la longueur ôtée de $PK = ON$, donne la longueur qN qu'on a cherché pour élever au-deſſus une perpendiculaire à la ligne ON égale à o F, qui donne à la ſurface du coin le point y de la ſection cherchée.

Il y auroit beaucoup d'autres curioſités à rechercher dans les différentes courbes de ce corps coupé par des plans ; mais nous n'en voulons qu'à ce qui peut être utile à notre objet, qui eſt le *coin-conoïde reſſerré par le tranchant.*

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que la ſection du coin-conoïde par l'axe & le tranchant, étoit un parallelogramme, par conſéquent que ſes côtés étoient paralleles entr'eux; préſentement

nous le confiderons comme refferré du côté du tranchant, de forte que la fection plane par l'axe & le tranchant, eft un trapeze ou ifofcele, ou oblique, dont les côtés oppofés font convergens comme a *d e b* de la figure 11 qui concourent en un point X, lequel eft au-dehors fur la ligne M *m* pouffé jufqu'au-deffous de la cinquieme figure. Pl. 2. *bis.* *Fig.* 11.

Nous avons de plus fuppofé dans toutes les figures, que notre coin étoit exactement la moitié du coin-conoïde entier, parce que la fection plane formant le parallelogramme, paffoit par l'axe, par conféquent par le diametre du cercle de la tête.

Ici au contraire, nous ne fuppofons pas la fection par l'axe, mais par une des cordes du cercle de la bafe, plus ou moins près du diametre AB, par exemple ici celle de 90 degrés.

Ces différences de fuppofitions en produifent auffi dans les fections planes de ce corps.

Premierement en ce que les précédentes étoient des courbes tangentes aux perpendiculaires au plan du parallelogramme par l'axe, lorfque le plan coupant étoit parallele au cercle de la tête, ou qu'il ne coupoit point la ligne du tranchant; il n'en eft pas de même ici, toutes ces courbes font avec de pareilles perpendiculaires des angles mixtes, ce qui en Architecture ne produit pas une tranfition infenfible de la courbure de la voute à la rencontre des piédroits.

Secondement, que les fections paralleles à l'axe ne font pas des triangles rectilignes, comme dans les cas précédens, mais des courbes comparables à celle de A *x* T de la fixieme figure.

A cela près, on peut appliquer à cette efpece de folide, ce que nous avons dit du premier; par exemple que les fections des plans paralleles à celui de la tête, étoient des ellipfes ou des portions d'ellipfe proportionnelles au fegment du cercle de la tête a H *b*, telle eft *g z* L, par la ligne *g* L. *Fig.* 11.

On en appercevra facilement la raifon, en confiderant que toutes les parties de *g* L font divifées proportionellement par les lignes tirées des points M *q* Q *b* de la corde a *b* du cercle de la tête, au point de contour X, hors de la figure, fous la ligne AB de la cinquiéme Figure; par conféquent que toutes les abfciffes du fegment circulaire & du fegment d'ellipfe *g z* L font proportionnelles. Il eft clair auffi que toutes les ordonnées le font, en jettant les yeux fur le profil de la Figure 12, qui repréfente les fections triangulaires de ce corps.

Application à l'usage, & remarque sur une faute d'appareil dans le trait d'un Auteur moderne.

PL. 2. *bis.* *Fig.* 11. La surface convexe du coin-conoïde étant précisément la même que la concave des petites voutes appellées *arrieres voussures reglées & bombées*, comme nous l'avons dit ci-devant ; il suit que dans l'appareil on doit en imiter la surface comme la plus réguliere en ce genre. Or nous trouvons dans le Traité de la Coupe des Pierres de *la Rue* (Chap. 32. Planc. 22) une construction qui en altere tellement la régularité, qu'on ne doit pas la proposer aux appareilleurs.

Pour n'être pas trompé par le nom qu'il lui donne d'*arriere-voussure de Saint-Antoine surbaissée & reglée*, il est à propos d'observer que celle dont il traite n'est point concave du devant au derriere en coquille, comme l'annonce le nom de *Saint-Antoine*, mais qu'il s'agit de celle dont nous traitons, dont la doële se fait à la regle du devant au derriere, & non en arc concave.

Cela supposé, il faut distinguer deux cas dans cette voute ; l'un lorsqu'elle est établie sur deux piédroits paralleles entr'eux.

L'autre, lorsqu'ils sont ébrazés, c'est-à-dire, ouverts en-dedans du côté du bombement, & convergens au côté opposé vers le tranchant du coin.

Dans le premier cas, les projections de joint de lit des voussoirs doivent être paralleles, comme on l'a vû dans les démonstrations précédentes.

Dans le second ils doivent être convergens, comme nous venons de le dire du coin-conoïde resserré vers le tranchant, & concourir au même point que les directions des piédroits ; par exemple en X hors de la Figure 11 où ce corps est représenté, (lequel point X est sous la ligne AB de la cinquiéme Figure) où aboutiroient les lignes *qt*, QT, si elles étoient prolongées, ainsi que les côtés *ad*, *be*.

Cependant M. de la Rue, sans égard à cette différence, dans la Figure 22 de son Livre, a fait les projections des lits des voussoirs paralleles à l'axe du milieu de son épure & en lignes droites, comme si les piédroits n'étoient pas ébrasés, d'où il suit qu'il forme par cette construction la surface d'un coin-conoïde de la premiere espece, tel qu'il est représenté à la Fi-

gure 6, & dont le tranchant eſt coupé de même par un plan oblique ſur AT, qui fait dans le coin une ſection courbe A *x* T. Pl. 2. Fig. 11.

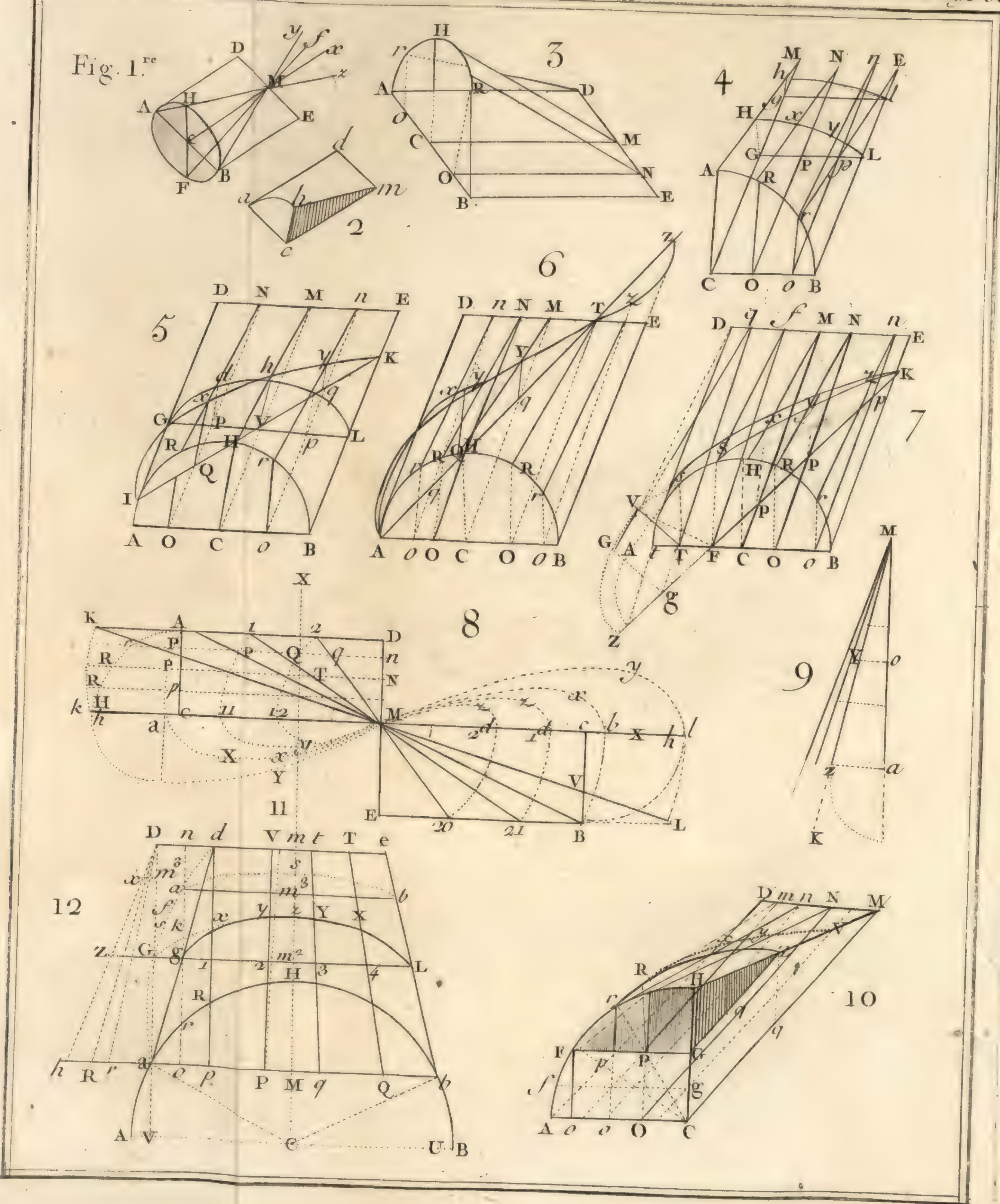
Ainſi conſidérant de même le parallelogramme a*qt*D (*Fig.* 11) formé (comme le coin de la Fig. 6) on reconnoîtra que le plan du piédroit a *d* coupant le coin obliquement ſuivant cette ligne, il doit y faire une ſection courbe a*f d*, & non pas droite comme la Rue fait la naiſſance a *d* de ſa voute; mais dira-t-on, comment le peut-il? La réponſe eſt facile; c'eſt au préjudice de la régularité de la ſurface du coin-conoïde, ou ſuppoſant vers le milieu une ſection parallele à la face a *b* dans la moitié a D*m*M; par exemple en GL, elle ſera un arc d'ellipſe G*xyz*, que le piédroit a *d* coupe au point *g* de ſa corde, ſur lequel élevant une perpendiculaire *g k* qui coupera l'ellipſe G*xz* en *k*, on reconnoîtra que la courbe de la ſection oblique ſera élevée ſur *g* de la hauteur *g k*. C'eſt ce point *k* que *la Rue* abaiſſe en *g*, d'où il retranche de l'ellipſe naturelle la partie G*kg*, & fait par un arrondiſſement de *g* en *x*, qui eſt un point déterminé par ſon joint de lit p d, un raccordement irrégulier avec le contour de l'ellipſe *xyz* qui corrompt l'uniformité de la ſurface du coin-conoïde, & par cette raiſon eſt à rejetter, quoique cette défectuoſité vienne en diminuant vers a & *d*, où la courbe retombe ſur l'impoſte.

Nous avons comparé juſqu'ici le coin-conoïde aux arrieres-vouſſures reglées & bombées; mais ſi nous n'en conſidérons qu'une partie tronquée vers le tranchant, comme par exemple (à la Fig. 5) le tronc AHEL*h*G, nous y trouverons le parfait modele d'une voute en berceau irrégulier, aſſez commun aux montées ou deſcentes des bâtimens, où l'on eſt obligé de paſſer ſous quelque partie trop baſſe pour pouvoir continuer le ceintre plein, c'eſt-à-dire en demi-cercle à ſon entrée ou ſortie. J'ai préſidé à la conduite d'une pareille voute dans une place fortifiée, où il falloit monter au rampart ſous une plate-forme un peu baſſe au débouché, de ſorte que le ceintre d'entrée étant circulaire, il fallut faire celui de ſortie elliptique fort ſurbaiſſée, ce qui a occaſionné dans l'appareil une difficulté qu'on n'apperçoit point en voyant l'ouvrage exécuté, & ſubſiſtant actuellement. C'eſt que tous les vouſſoirs ſont *gauches* en particulier, & inégaux en largeur & hauteur, bien alignés d'un bout à l'autre, pour paſſer inſenſiblement du plein ceintre au ſurbaiſſé. J'en ai

Pl. 2. bis. donné le trait à la fin du second Tome (*Fig.* 233) Liv. IV. Chap. X. dans le premier Corollaire du XXIIIe. Problême. Nous ne pousserons pas plus loin la Théorie des sections planes, croyant en avoir dit assez pour les besoins de la Coupe des Pierres; c'est pourquoi nous passerons à la seconde Partie de ce premier Livre, où nous tâcherons de connoître les sections que nous appellons *solides*, parce qu'elles sont faites par la pénétration des corps.



SECONDE





SECONDE PARTIE
DU PREMIER LIVRE.

Des Sections faites à la surface des corps par la pénétration d'autres corps.



LES Sections planes dont nous venons de parler ne conviennent qu'aux ceintres des voutes simples, qui n'ont qu'une surface principale uniforme, & terminée par des plans; mais dans les voutes composées, qui sont contigues & liées avec d'autres, il se fait à leur rencontre des angles & des courbes, qui les divisent par des sections tantôt planes tantôt *solides*, je veux dire, qui ne peuvent être formées que par la pénétration des solides, lesquelles ne sont pas dans une surface plane; ces dernieres sont presque les plus ordinaires, & parce que nous ne pouvons les connoître sans les rapporter à des corps réguliers, dont les voutes sont des imitations parfaites, nous allons examiner les sections solides des spheres, cones & cylindres, qui se pénetrent mutuellement.

Premierement. Les sections faites à la surface d'une sphere, pénétrée par une autre sphere, par un cylindre, ou par un cone.

Secondement. Celles des cylindres par d'autres cylindres, & par des cones.

Troisiemement. Des cones par d'autres cones, situés differemment entr'eux.

Nous avons touché légerement les sections planes de ces corps, parce qu'on ne manque pas de livres qui en traitent amplement; nous nous sommes contentés d'en dire ce qui étoit indispensablement nécessaire à notre sujet; mais parce qu'il n'en est pas de même de leurs sections *solides*, c'est-à-dire, qui sont

faites par la pénétration mutuelle des mêmes corps, nous en étendrons un peu davantage la Théorie.

En effet, si peu d'Auteurs en ont traité qu'elles n'ont pas même de noms particuliers; le P. COURSIER dans un opuscule Latin, qu'il semble avoir fait pour l'Optique, est le premier que je sache, qui en ait parlé : il les appelle *Curvitegæ*, c'est-à-dire, qui couvrent des surfaces courbes; mais comme cette expression n'est pas uniquement propre à nos sections, puisqu'une surface plane en peut couvrir une courbe, comme un cercle couvre un segment de sphere, un parallelogramme, celui d'un cylindre; j'ai cru que j'étois en droit de leur donner d'autres noms, pour éviter les périphrases & les équivoques; je les tire du mot Latin *Imbrex*, qui signifie une tuile creuse, à laquelle on peut assez bien les comparer, ou du moins la surface qu'elles renferment; il auroit été plus naturel de les comparer au cylindre, si je n'avois craint la confusion des idées, ayant aussi égard à la facilité de la composition des mots tirés *d'imbrex*. M. CLAIRAUT le fils, de l'Académie des Sciences, nous a donné un excellent traité des *Courbes à double courbure* en général, qui comprend celles dont il est ici question, parmi plusieurs autres de différentes especes, dont il découvre les propriétés par l'Analyse avec beaucoup d'art & de netteté; cet Ouvrage est d'autant plus digne d'admiration, qu'il a été la production d'un jeune homme de seize ans. Mais comme notre Stéréotomie n'est qu'un traité de Géométrie linéaire, j'ai cru que je devois donner une Théorie de même nature que les Problêmes de pratique, ausquels elle doit servir d'introduction; c'est pourquoi j'ai suivi une méthode tout-à-fait différente, croyant qu'elle deviendra plus utile aux gens qui se mêlent d'Architecture; c'est ce que je vais expliquer.

De la nature des Sections solides par la pénétration mutuelle des Spheres, cônes & cylindres.

DÉFINITION I.

Pl. 3. Fig. 27. 75. SI par les extrêmités ST, du diametre d'un cercle SATB (*Fig.* 27) on fait passer une ligne courbe plane S*c*T, dont l'axe soit C*c*, suivant laquelle les ordonnées à ce diametre ST,

s'abaiſſent ou s'élevent parallelement à elles-mêmes d'un mouvement uniforme, enſorte que leur milieu ſoit toûjours dans le plan ST *c*, la courbe S *g b* T, qui terminera la ſurface creuſe qu'elles auront formé par cet arrangement, s'appellera un *Cicloïmbre*, par abbréviation de l'expreſſion Latine, *circulus imbricatus*, cercle en façon de tuile creuſe.

Pour ſe former une idée nette de ce changement de poſition des ordonnées, il n'y a qu'à ſe repréſenter un cercle tracé ſur la tranche d'un livre dans la preſſe, lorſque le Relieur l'a coupée d'une ſection plane, ſi enſuite il la renfonce vers le milieu, comme il arrive lorſqu'il donne de l'arrondiſſement au dos, ce cercle qui étoit plan devient un cicloïmbre, parce que chaque feuille ſe reculant de ſuite plus ou moins, ſelon qu'elle eſt près du milieu ou des extrêmités de la tranche, forme l'eſpace d'une ſurface creuſe en façon de cylindrique, dont le contour n'eſt plus un cercle comme auparavant, mais une *courbe à double courbure*, ſçavoir une autour du centre, & une en profondeur ou éloignement du plan paſſant par les extrêmités du diametre ST.

COROLLAIRE I.

De cette génération il ſuit, 1°. que quoique la ſurface creuſe ou convexe du cicloïmbre ſoit plus grande que celle du cercle plan générateur, elle ne contient pas plus d'ordonnées, puiſque le nombre des feuilles, dans l'exemple de la tranche du livre, n'a pas augmenté en ſe reculant ou en s'avançant au-delà de ce plan, depuis les extrêmités ST, ce que l'on voit clairement dans la figure, par les paralleles qu'on a mené d'un côté aux lignes A *a*, C *c*, & de l'autre par les paralleles au diametre AB, qu'on ſuppoſe perpendiculaire au plan ST *c*. On voit ſeulement que ſuppoſant une ligne *c t* parallele & égale à CT, diviſée en parties égales, les lignes paralleles à la ligne C *c*, paſſant par ces diviſions, coupent la partie *c* T en parties inégales, quand même on les ſuppoſeroit infiniment petites.

Ce que nous diſons de l'axe courbe *c T*, auquel toutes les ordonnées ſont appliquées, eſt encore vrai à l'égard du contour à double courbure *a d* T, quoiqu'il ſoit plus grand que l'axe & le contour du cercle générateur ATBS, qui eſt ici repréſenté en perſpective, où l'on apperçoit une petite notion des merveilles de la Géométrie de l'infini.

COROLLAIRE II.

PL. 3. Fig. 7. Il ſuit en ſecond lieu que les diametres, c'eſt-à-dire, les lignes droites menées d'un des points du contour de la courbe à double courbure à ſon oppoſé, paſſant par l'axe C *c* hors de la ſurface cylindrique compriſe par cette courbe, ſont égaux entr'eux, comme les diametres du cercle générateur. Ainſi *g d* eſt égal à GD, *a b* à AB, &c. parce que les points G & D, A & B étant mûs parallelement à l'axe C *c* à diſtances égales, il eſt clair que GD *d g* eſt un parallelogramme; par conſéquent *g d* ſera égal à GD.

Il faut remarquer que ſi la courbe S *c* T n'étoit pas uniforme, mais à différentes infléxions, ces diametres pourroient être inégaux, & alors la courbe ne feroit plus un cicloïmbre, parce que c'eſt de l'égalité de ſes diametres que vient l'analogie du nom.

COROLLAIRE III.

On peut remarquer que de tous les diametres du cicloïmbre, il n'y en a qu'un, ſçavoir *a b*, qui ſoit dans la ſurface cylindrique, compriſe par ſon contour, lequel eſt celui qui paſſe par le ſommet *c*, de la courbe S *c* T, perpendiculairement au plan de cette courbe; tous les autres ſont hors de cette ſurface.

COROLLAIRE IV.

De ce que nous venons de dire, il ſuit que l'axe C *c* de la courbe, que j'appelle axe de *profondeur* S *c* T, coupe en deux également tous les diametres de la courbe du contour du cicloïmbre, plus ou moins loin de la ſurface cylindrique, ſelon qu'ils ſont plus ou moins obliques au plan de la courbe S *c* T.

COROLLAIRE V.

Il eſt viſible que ſi au lieu d'une ſeule courbe S *c* T, on en ſuppoſoit encore une ſeconde plus haut ou plus bas, au-deſſus ou au-deſſous du diametre ST, du même cercle générateur, il ſe formeroit deux cicloïmbres différens, qui auroient une profondeur inégale, mais dont le contour ſeroit à la ſurface du même cylindre, qui auroit pour baſe le cercle générateur ATBS;

puisque tous les points de ces contours doivent être issus d'un de ceux du cercle générateur, mû parallelement à l'axe C*c* de la courbe de profondeur S*c*T.

DÉFINITION II.

76. Si au lieu d'un cercle générateur on suppose une ellipse BDLE, dont les ordonnées ED, GH s'écartent ou se rapprochent de la même maniere que nous l'avons dit du cicloïmbre, non pas toûjours perpendiculairement à un axe BL de cette ellipse, mais aussi obliquement suivant un angle quelconque, comme BC*c* ou LC*c*, à peu près comme une chaîne lâche pendue aux extrêmités d'un bâton incliné à l'horison, la surface formée par l'arrangement de ces ordonnées, suivant une courbe semblable, sera terminée par un contour courbe, que nous appellons une *ellipsimbre*, par abbréviation de l'expression Latine *ellipsis imbricata*. *Fig. 28.*

La nécessité de donner des noms à des courbes qui n'en avoient point, s'étend aussi aux lignes qui leur sont entielles; nous en considérons quatre principales, qui méritent d'avoir un nom propre parce que nous les nommerons souvent dans ce premier Livre.

DÉFINITION III.

77. Le diametre du cercle générateur, ou l'axe de l'ellipse plane génératrice, qui passe par les points S & T, ou B, L, où la courbe touche le plan du cercle ou de l'ellipse, s'appellera *axe soustendant*; la ligne courbe S*c*T, ou B*c*L, qui est dans le même plan que cet axe, qui coupe la section en deux parties égales, comme S*c*T, ou B*c*L, s'appellera *axe courbe*; la ligne correspondante au diametre perpendiculaire à l'axe sous-tendant, qui est le petit ou le grand axe de l'ellipse, s'appellera l'*axe droit*; parce que quoique droit, il sera tout à la surface de la section concave; tel est *ab* (*Fig.* 27.) & *de* (*Fig.* 28). La ligne C*c* qui est le plus au chemin que parcourt le centre C, dans l'abbaissement du diametre AB, ou DE en *ab*, ou *de*, s'appellera l'*axe de profondeur*, qui passera toujours par les deux centres de la section plane, & de la section courbe à double courbure par son contour. *Fig. 27 & 28.*

Les lignes qui pafferont par cet axe, & fe termineront à la circonférence de la fection, s'appelleront *diametres*.

COROLLAIRE.

Fig. 28. 78. Puifque l'axe de profondeur C*c* peut n'être pas perpendiculaire à l'axe fous-tendant BL, il fuit que le diametre droit *dc* de la fection, peut n'être pas au milieu de l'axe courbe B*c*L, puifque le point *c*, centre de la fection, correfpondant au centre C de l'ellipfe génératrice, eft évidemment plus près du point L que du point B; cependant le nombre des ordonnées de *c* en L, fera toujours égal au nombre de celles qui font poffibles de B en *c*; puifqu'il ne peut y avoir un plus grand nombre de paralleles à C*c*, de B en C, que de C en L, ces deux diftances étant fuppofées égales; l'exemple de notre tranche de livre, dont on arrondit le creux inégalement, peut fervir à en concevoir la vérité, puifque le nombre des feuilles n'augmente ni ne diminue dans tous les changemens de concavité ou de convexité que l'on peut faire à la courbure de cette tranche.

DÉFINITION. IV.

79. Si au lieu de fuppofer que les ordonnées de l'ellipfe plane génératrice d'une fection folide, s'en éloignent d'un mouvement inégal, mais uniforme dans les parties correfpondantes, & fans changer de grandeur, on fuppofe au contraire qu'en s'éloignant, elles fe ralongent ou fe racourciffent proportionellement à leur diftance de l'ellipfe plane, prife fur des plans convergens qui ont tous une commune fection, cette figure auffi concave comme une tuile creufe, aura pour circonférence une courbe, que nous appellerons *ellipfoïdimbre*, c'eft-à-dire, qui imite en quelque chofe l'ellipfimbre.

COROLLAIRE.

80. Il fuit de cette définition, que l'axe droit *de* ne fera plus égal à l'axe correfpondant DE de l'ellipfe plane génératrice, qui eft conjugué à celui qui eft l'axe fous-tendant de l'axe courbe de la fection, mais qu'il fera plus grand ou plus petit : plus grand s'il eft du côté oppofé à la commune fection des plans convergens, & plus petit s'il eft du même côté, ce que nous

expliquerons plus nettement dans les sections faites par la pénétration des cones.

DÉFINITION V.

81. Lorsqu'une courbe sera composée de deux portions des courbes nommées ci-devant, soit cicloïmbre, soit ellipsimbre, soit ellipsoïdimbre, elle sera dite *composée* de ces courbes.

Enfin on apppellera de semblables noms toutes les courbes lesquelles, suivant de pareilles loix, seront issues de figures planes paraboliques ou hyperboliques, dont les ordonnées à leurs axes s'écarteront d'une maniere uniforme de leur sommet d'un côté seulement; car puisque ces figures sont ouvertes, les sections courbes ne les toucheront qu'en un point, & non pas en deux, comme les précédentes.

CHAPITRE V.

Des Sections solides des spheres, & premierement, de leurs variations.

LES sections des spheres peuvent varier de plusieurs manieres.

1°. Par la pénétration des spheres entr'elles.

2°. Avec les cylindres.

3°. Avec les cones.

La section commune à la surface de deux spheres qui se pénetrent ne peut varier, elle ne peut être que la circonférence d'un cercle; sur quoi l'on peut remarquer que les sections faites par la pénétration des solides, peuvent en certains cas, être aussi des sections planes.

Les sections faites à la surface de la sphere, pénetrée par un cylindre, peuvent varier de quatre manieres.

1°. Lorsque l'axe du cylindre passe par le centre de la sphere, dans la supposition du cylindre droit.

2°. Dans le même cas, dans la supposition du cylindre scalene.

3°. Lorsque l'axe du cylindre ne passe pas par le centre de la

ſphere, & que cependant le cylindre y entre de toute ſa circonférence.

4°. Lorſque le cylindre n'entre dans la ſphere qu'en partie, à l'égard de ſa circonférence.

Enfin les ſections faites à la ſurface de la ſphere, par la pénétration du cone, peuvent varier d'autant de manieres que par le cylindre, ſuivant les mêmes circonſtances de poſition relative du centre de la ſphere, à l'égard de l'axe du cone, de celle de l'axe du cone ſur ſa baſe, & de la profondeur de la pénétration.

THEOREME VII.

La courbe qui réſulte de la ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux ſpheres qui ſe pénetrent, eſt la circonférence d'un cercle.

Soient les ſpheres ABD, BFD qui ſe pénetrent, de quelque grandeur qu'elles ſoient l'une à l'égard de l'autre, dont les centres ſont en C & E, ſoit auſſi la ſection telle qu'elle puiſſe être repréſentée par la courbe BHD, qui doit paſſer par les points B & D, communs aux deux ſpheres, puiſqu'ils ſont à l'interſection de deux cercles majeurs qui ſont dans le même plan, paſſant par les deux centres C & E, (*Fig.* 29, 30, 31) le diametre de cette ſection ſera la ligne BD, qui paſſera par ces points B & D communs aux deux ſurfaces, lequel par la différente poſition des ſpheres, paſſera ou entre les deux ſpheres, comme à la Figure 29, ou par un des centres, comme à la Figure 30, ou au-dehors des deux centres, comme à la Figure 31; de quelque façon que ce ſoit, la démonſtration ſera toujours la même.

Fig. 29. 30. & 31.

Ayant tiré une ligne CE par les centres C & E, & pris à volonté ſur la courbe de la ſection un point H, on tirera des centres C & *c* des lignes CH, *ch*, & des points G & *g*. (*Fig.* 29 & 31) ou E (*Fig.* 30) où les lignes paſſant par les centres, coupent les diametres BD & *bd*, des lignes au même point H, comme GH, EH ou *gh*.

Il eſt évident, par la définition de la ſphere, que les lignes CB, CH, CD ſont égales entr'elles, étant des rayons de la ſphere ABD, de même que EB, EH, ED, (*Fig.* 29 & 30.) & *eb*, *eh*, *ed* (*Fig.* 31.); il eſt encore évident, que les lignes BD ſont coupées également & perpendiculairement en G, par la

la ligne qui passe par les centres C & E, dont les triangles CBE, CHE, CDE, qui ont le côté CE commun, sont égaux en tout, de même que les triangles CBG, CHG, CDG rectangles en G, qui ont le côté CG commun, & les hypotenuses CB, CH, CD égales entr'elles; donc les côtés GB, GH, GD, seront aussi égaux entr'eux; puisqu'ils sont d'ailleurs les perpendiculaires abbaissées des sommets des triangles égaux CHE, CBE, CDE; donc (par la 4. du 11. d'Eucl.) ces trois lignes sont dans un même plan, & les rayons d'un cercle dont les points BHD sont à la circonférence, qui est la commune section des deux spheres. *Ce qu'il falloit démontrer.* Pl. 3.

La même démonstration est plus simple dans la Fig. 30, où les points E G sont confondus. Fig. 30.

Application à l'usage.

86. On connoît par cette proposition que le ceintre d'une voute sphérique, qui en rencontre une autre qu'elle coupe, est un cercle; par exemple, une niche qui est au-dessus de l'imposte d'une voute sphérique, fait avec elle à l'arête d'*enfourchement* un demi-cercle parfait, supposé que l'une & l'autre de ces voutes ne soit ni surhaussée ni surbaissée, & que l'imposte d'une calote de dôme renfoncée en cul de four au-dessus d'une voute sphérique, est encore un cercle, aussi-bien que celle de la premiere voute.

THEOREME VIII.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cylindre droit, dont l'axe passe par le centre de la sphere, est un cercle.

Soit la courbe AIBO, la section faite par la rencontre des surfaces de la sphere ABDE, & du cylindre LNGF, dont l'axe MH passe par le centre C de la sphere. Si du point I, pris à volonté à la circonférence de cette section, on tire au centre C la ligne IC, & que du milieu K de la ligne AB, qui est supposée passer par les points A & B, communs à la surface de la sphere & à celle du cylindre, on mene la ligne IK; on verra, comme dans la proposition précédente, que les triangles AKC, IKC, BKC, rectangles en K, qui ont le côté CK commun, & les côtés AC, CI, CB égaux, étant rayons de la même sphere, les Fig. 32.

côtés AK, IK, BK feront auffi égaux entr'eux, & dans un même plan, dont ils feront les rayons d'un cercle dont les points AIB font à fa circonférence ; mais la ligne CK étant par la fuppofition une partie de l'axe du cylindre FLNG fera auffi perpendiculaire au même plan ; donc la fection commune à la fphere ABDE, & au cylindre LNGF, fera un cercle formé par la rencontre des furfaces de ces deux corps, *ce qu'il falloit démontrer.*

Application à l'ufage.

87. On voit par cette propofition quel doit être le ceintre de la rencontre des voutes fphériques avec les berceaux droits, dont les axes paffent par le centre de la fphere ; tel eft le puits d'une citerne voutée en cul-de-four, comme il y en a un à Phalsbourg, telle eft la fenêtre à la clef de la voute du Pantheon à Rome ; telles font les impoftes des lanternes fur les dômes dans la plupart des Eglifes modernes, les rencontres des nefs en berceau avec les chevets circulaires, voutés en quart de fphere, ou d'une plus grande portion, fi le diametre du fanctuaire eft plus grand que celui du berceau de la nef ; fuppofé que l'une & l'autre de ces voutes ne foit ni furhauffée ni furbaiffée, & que la nef ne foit point biaife fur le chevet, quoique la direction de fon axe, c'eft-à-dire de fon milieu, paffe par le centre de la portion de voute fphérique ; car pour peu qu'il y ait de biais, la fection n'eft plus un cercle, comme nous allons le démontrer.

THÉOREME IX.

La fection faite par la rencontre des furfaces d'une fphere & d'un cylindre fcalene, dont l'axe paffe par le centre de la fphere, eft une ellipfimbre.

Soit la fphere ABIH, pénétrée par le cylindre fcalene KLGF,
Fig. 33. (*Fig.* 33.) dont l'axe X*x* paffe par le centre C de la fphere, fi l'on fuppofe un plan paffant par cet axe, il fera deux fections différentes ; fçavoir, le parallelogramme KLGF dans le cylindre, & le cercle SDE dans la fphere, lequel fera grand ou majeur, parce qu'il paffe par le centre C, & dont les points A B, où fe coupent ces deux figures, font communs aux deux furfaces de la fphere & du cylindre, de même que les points I

& H de la ſection oppoſée, qui ſont ſur les côtés du parallelogramme, & à la circonférence du cercle en même-tems, & tous autres points que ces quatre ne pourront être que ſur une des ſurfaces des deux ſolides; car s'ils ſont ſur celle du cylindre, ils ſeront au-dedans de la ſphere; & s'ils ſont ſur celle de la ſphere, ils ſeront hors du cylindre, puiſque les arcs ADH BEI ſont au-dehors des côtés AH & BI. Si l'on imagine un ſecond plan perpendiculaire au premier, & qui paſſe par les points A & B, il coupera ces deux corps différemment du premier, & fera deux ſections différentes; ſçavoir, un cercle A *e* B *l*, repréſenté ici en racourci de perſpective, dont le diametre ſera AB & qui ne ſera plus un grand cercle, mais un cercle mineur, parce qu'il ne paſſe pas par le centre C de la ſphere. L'autre ſection dans le cylindre ſera* une ellipſe A *d* B *k*, dont AB ſera le petit axe; parce que la ſection perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ſcalene eſt une ellipſe, & que le diametre KL du cercle de la baſe KMLN, incliné au côté LG, eſt plus grand que AB qui lui eſt perpendiculaire. En effet, ſi on lui menoit une parallele A *r* par A, elle ſeroit l'hypotenuſe du triangle rectangle, A *r* B dont AB ſeroit une jambe; or toute ſection qui n'eſt pas parallele à la baſe, & qui n'eſt pas ſous-contraire, eſt une ellipſe.

PL. 3. *Fig.* 31.

**Art.* 59.

Préſentement, puiſque le plan paſſant par AB fait deux ſections différentes, il eſt évident que ni l'une ni l'autre ne peut être commune aux deux ſurfaces; en effet l'ellipſe du cylindre étant circonſcrite au cercle de la ſphere, avec lequel elle n'a de commun que les deux points A & B, eſt toute hors de la ſphere, & le cercle de la ſphere eſt tout au-dehors du cylindre, donc la ſection commune ſera une autre courbe qui ſera hors de ce plan, & qui n'aura de commun avec les deux planes, que les points A & B, cette courbe paſſera donc au-deſſus ou au-deſſous du plan coupant ces deux corps par AB. Dans cet exemple elle paſſera du côté du centre C de la ſphere, comme A *f* B; parce que le diametre MN $= fi$ eſt plus grand que AB. Il faut à préſent faire voir le rapport qu'elle a avec l'ellipſe A *d* B, pour démontrer qu'elle eſt une ellipſimbre, telle que nous l'avons défini ci-devant. Pour y parvenir il faut encore une préparation.

Quoique nous ayons déja ſuppoſé deux plans coupans la ſphere & le cylindre, l'un par l'axe X *x*, l'autre par les points A & B perpendiculairement au premier; il convient encore d'en

Pl. 3. Fig. 33. imaginer au moins deux autres paralleles entr'eux & perpendiculaires aux premiers ; sçavoir encore un par l'axe & le diametre MN de la base, & l'autre par l'ordonnée OPQ ; cette multiplicité de plans est un peu embarassante pour le lecteur, mais elle est inévitable pour la démonstration des propriétés de la courbe que nous examinons, on peut s'aider l'imagination par des reliefs de papier ou de carton ; il sera bon encore de se rappeller ici le onzieme & le douzieme Livre d'Euclide, parce que tout cet ouvrage ne roule que sur les sections & rencontres des plans; on sentira la conséquence de cet avertissement dans la suite, où quelque attention qu'on ait eu à rendre les figures intelligibles, on ne se flatte pas d'avoir pû représenter bien sensiblement en saillie, ce qui est à plat sur le papier, c'est à l'imagination du Lecteur à relever les objets, & à les détacher du plan où ils sont, pour les considérer où ils doivent être.

Soient donc deux plans paralleles à l'axe du cylindre, passant par les ordonnées MN, OQ, les sections de ces plans dans la sphere seront des cercles, dont fSi & tsb sont des arcs, & des parallelogrammes dans le cylindre, dont $MdkN$ & $uOQZ$ sont des portions, parce que Md & Nk sont paralleles, étant les côtés du cylindre, & MN & dk aussi paralleles entr'elles, parce que les plans KML de la base, & AdB de la section par AB, sont perpendiculaires au même plan AKLB, passant par l'axe Xh; or puisque la ligne MN est perpendiculaire à l'axe CX, c'est-à-dire au rayon CS prolongé, elle est parallele à la tangente qui passeroit par S de l'arc de cercle fSi & les lignes Mm & Nn étant paralleles à cet axe, & également éloignées de part & d'autre, les lignes $MfNi$ rencontreront cet arc en des points f & i, équidistans de M & N (par l'Art. 39), donc la ligne fi sera parallele à MN & à dk; donc $df = ki$, & $dk = fi$, c'est-à-dire, que l'ordonnée dk dans l'ellipse AdB est égale à l'ordonnée de la section commune aux deux surfaces, qui passent par f & par i. On démontrera de la même maniere que l'ordonnée uz est égale à l'ordonnée tb de la section solide qui passe par t; donc toutes les ordonnées à l'axe courbe AhB de la section solide, sont égales à toutes celles de l'ellipse à l'axe AB, donc la section est une ellipsimbre; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Pl. 3. Fig. 33.

88. Puiſque le plan MN par l'axe X*x* du cylindre, coupe perpendiculairement l'axe ſous-tendant AB de la ſection, il ſuit que la plus grande ordonnée de l'ellipſe plane, qui eſt ici *dk*, s'abbaiſſe perpendiculairement à AB en *fi*, qui eſt l'*axe droit* de la courbe, & par conſéquent que cet axe eſt équidiſtant des extrêmités de l'axe ſous-tendant AB, ce qui n'arrive dans aucun cas que dans celui des cylindres ſcalenes.

COROLLAIRE II.

89. En ſecond lieu il ſuit que la plus grande profondeur ou diſtance de l'ellipſimbre à l'ellipſe plane, eſt à l'axe droit *fi*, parce que la plus grande différence *de* du diametre *el* du cercle de la ſphere A*e*B*l*, & de l'axe *dk* de l'ellipſe A*d*B*k*, eſt dans le plan de l'axe droit *fi*; or puiſque *de* ou L*k* eſt la plus grande diſtance qu'il puiſſe y avoir de la circonférence du cercle à l'ellipſe, la diſtance *df* ou *i*K ſera auſſi la plus grande qu'il puiſſe y avoir du plan A*d*B*k* à la courbe A*f*B*i*; & parce que cette différence des ordonnées du cercle à celles de l'ellipſe, au même diametre AB, diminue continuellement, il ſuit que la profondeur de l'ellipſimbre diminue auſſi depuis *f* juſqu'à B, où elle rejoint le cercle de la ſphere A*e*B*l*.

COROLLAIRE III.

90. Pour trouver cette profondeur ſur l'axe courbe de l'ellipſimbre, qui eſt dans le plan de l'axe ſous-tendant AB, il n'y a qu'à décrire les ſections que font les plans paſſant par les ordonnées parallelement à l'axe du cylindre, leſquelles ſont des cercles de la ſphere, dont les centres ſont tous ſur la ligne DE, perpendiculaire à l'axe X*x* du cylindre par le centre C, & dont les lignes CS & WS en exprimeront les rayons. Pour avoir les diſtances des côtés du cylindre au plan paſſant par ſon axe & par AB, il faut faire à part (*Fig.* 34.) l'ellipſe a*eb*E, ſur les axes donnés; ſçavoir, a*b* égal à AB de la Fig. 33, & E*e* égal au diametre KL de la baſe du cylindre ſcalene, dans laquelle on inſcrira le cercle a*db*D, qui ſera égal à celui de la ſection de la ſphere par AB de la Fig. 33. Cette préparation étant faite, Fig. 34.

Fig. 36. on tirera à part une ligne CS, (*Fig.* 36) sur laquelle prenant CS égal à CS de la Fig. 33. pour rayon, on décrira un arc indéfini *Sf*, ensuite portant la distance S*g* de la Fig. 36, on élevera sur ce point une perpendiculaire *g d*, sur laquelle prenant *g e* égal au demi-diametre du cercle a *d b* D, c'est-à-dire à A*g* de la Fig. 33, on aura le point *e*, où la section plane coupe la sphere; mais parce que ce point est au-dedans du cylindre, il faut porter en-dehors la distance DE de la Fig. 34, qui est la différence du demi-diametre du cercle & de l'axe de l'ellipse. Si par ce point *d* on mene une parallele à CS, elle coupera l'arc *f* S au point *f*, qui sera commun au côté du cylindre *d f*, & au cercle de la sphere S *e f*; & par conséquent à la circonférence de l'ellipsimbre; donc la ligne *d f* sera la profondeur de cette courbe, au milieu à son axe droit, laquelle distance sera égale à celle de l'axe courbe à l'axe sous-tendant, dont l'un passe par *g* & l'autre par *h*; puisque les ordonnées *d g* de l'ellipse, & *f h* de l'ellipsimbre, sont paralleles & égales.

Fig. 33, 34, 35 & 36. Il ne sera pas difficile de trouver cette profondeur pour tous les autres points de l'axe courbe; car si l'on porte la distance CW, de la Fig. 33. en CY de la Fig. 35, on aura la distance des plans qui passent par MN & OQ de la Fig. 33; & si l'on mene *u u* parallele à *e* E, Fig. 34, on aura les ordonnées Y *u* de l'ellipse, & Y *x* du cercle, & en WS, Fig. 33, le rayon du cercle de la sphere, avec lequel faisant (*Fig.* 35.) l'arc ST, & la fleche *y* S égale à *y* S de la Fig. 33, on menera par le point *y* la perpendiculaire *y u*, qu'on fera égale à Y *u* de la Fig. 34; si par le point *u* on mene *u* T parallele à VS, cette ligne qui représente le côté du cylindre, coupera l'arc ST au point T, qui sera commun à la sphere & au cylindre, par conséquent à la circonférence de l'ellipsimbre, la distance *u* T sera celle des ordonnées *u y* de l'ellipse, & T *u* de l'ellipsimbre que l'on cherchoit; ce qui n'a pas besoin de démonstration, puisque cette figure est une exacte représentation de la section faite dans la sphere & dans le cylindre, par le plan OQB*t* (*Fig.* 33) parallele à son axe & au diametre de la base MN passant par l'axe XC, dont une partie est représentée ici par la ligne CS rayon de la sphere, & WP qui lui est parallele, par WS, partie de W*p*, de même que *d f* de la Fig. 36, représente une portion du côté du cylindre M*f*, & TV (*Fig.* 35) celle du côté O *t* de la Fig. 33.

Application à l'usage.

91. Ce Théorême fait voir que lorsqu'une voute en berceau biaise & en plein ceintre dans son arc de face, rencontre une voute sphérique, dont le centre est dans l'allignement de l'axe du berceau, l'arrête qui se forme à la jonction de ces deux voutes ne peut être en plein ceintre, ni dans un même plan elliptique surhaussé ou surbaissé, mais une courbe dont les aplombs s'écartent de la ligne droite, menée d'une imposte à l'autre. Ainsi supposant qu'une nef d'Eglise soit un peu biaise sur le chevet circulaire du chœur, vouté en cul-de-four, c'est-à-dire, en portion de sphere, ou seulement dont l'arc droit soit surhaussé ou surbaissé, comme il arrive très-souvent, la rencontre de ces voutes est une ellipsimbre. L'Architecte qui n'a point de Théorie se trouve embarrassé en pareil cas, pour éviter une espece de difformité de cette courbe à laquelle il ne s'attendoit pas; l'avantage de celui qui a des principes, est de connoître du premier coup d'œil, ce qui doit résulter de son dessein, ce qui le met en état d'y remédier, ou par la saillie de quelque arc doubleau, ou par quelque industrieuse correction des ceintres.

THEOREME X.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cylindre droit, qui la pénetre de toute sa circonférence, & dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere, est une ellipsimbre.

Soit la sphere ABTD, pénetrée par le cylindre LNDF, dont l'axe M*m* ne passe pas par le centre C de la sphere; si l'on suppose un plan passant par ce centre & par l'axe M*m*, ce plan fera deux sections différentes, sçavoir, un cercle ASB dans la sphere, lequel sera majeur, & un parallelogrammme LNDF dans le cylindre, lesquelles deux sections se couperont aux quatre points ABDE, qui seront par conséquent communs aux deux surfaces de la sphere & du cylindre, & à la circonférence des courbes opposées, formées par la pénétration du cylindre à son entrée & à la sortie de la sphere. Nous nous contenterons d'en examiner une, parce que l'autre lui sera parfaitement égale. *Fig. 38.*

Fig. 38. Si on ſuppoſe encore comme au Théorême précédent, un ſecond plan perpendiculaire au premier & paſſant par les points A & B, il eſt évident qu'il fera deux nouvelles ſections; ſçavoir, un cercle dans la ſphere repréſenté dans la Fig. 38 par la courbe A*f*BF, dont le diametre ſera AB, & une ellipſe dans le cylindre repréſentée par A*g*BG, dont AB eſt le grand axe, parce que le cylindre eſt coupé obliquement ſuivant cette ligne, par la ſuppoſition, & dont le petit axe ſera la ligne G*g*, ou ſon égale KL, qui eſt le diametre de la baſe du cylindre LNDF, d'où ſuivent les mêmes preuves qu'on a déduites au Théorême précédent, que la ſection commune aux deux ſurfaces des corps ne peuvent être ni cercle ni ellipſe; puiſque l'un étant inſcrit dans l'autre, ces figures n'ont que deux points communs A & B, qui peuvent être à la rencontre de deux ſurfaces; & qu'enfin la ſection qui leur eſt commune eſt une courbe à double courbure qui n'eſt pas dans un plan, & qui n'aura de commun avec les deux ſections planes ci-devant, que les mêmes points A & B. La ſeule différence qu'il y a du cas du Theorême précédent à celui-ci, eſt que la ligne droite AB qui paſſe par ces points communs, eſt le petit axe, & qu'ici elle eſt le grand axe, de ſorte que l'ellipſe eſt toute au-dedans du cercle de la ſphere dans ce cas, & tout au-dehors dans le précédent.

D'où il ſuit que l'axe courbe de la ſection ſolide, qui eſt une ellipſimbre dans l'un & l'autre cas, s'approche du centre de la ſphere dans le premier, & s'en éloigne dans le ſecond.

Au reſte les ordonnées à l'axe courbe de la ſection, ſeront toujours égales à celles de l'ellipſe appliquée à ſon grand axe AB, comme nous l'avons démontré à l'égard du petit, à la propoſition précédente, ce qui pourroit ſuffire pour l'établiſſement de la preuve de l'énoncé de celle-ci.

Cependant comme il importe de bien concevoir la nature & les propriétés de cette courbe, qui eſt la clef de toutes celles qui ſe forment par la pénétration des corps, nous en allons reprendre l'explication pour la rendre plus intelligible, en la préſentant ſous une autre face par une figure plus diſtincte, ou pour éviter la confuſion des lignes, on ne repréſente qu'une moitié des corps qui ſe pénetrent, parce qu'il eſt très-aiſé de conclure pour l'autre moitié.

Fig. 40. Soit (*Fig.* 40) KL*e*RQE la repréſentation en perſpective de la ſection faite par un plan paſſant par l'axe du cylindre juſqu'au diametre

diametre RQ de la ſphere, perpendiculairement au plan paſſant par le même axe & les points A & B, de ſorte que C^2 M de de la Fig. 38. eſt la même que $C^2 M^2$ de la Fig. 40, le demi cercle QSR, ſera la ſection que ce plan fait dans la ſphere, & le parallelogramme K *l* celle de ce même plan dans le cylindre. Soit un autre plan parallele à celui-ci, paſſant par T *t*, *q r*, qui fait auſſi deux ſections de même nature, ſçavoir, un demi-cercle *q s r*, & un parallelogramme T *t* V *u*; Il eſt évident que les interſections des côtés de ces parallelogrammes avec les demi-cercles, feront des points communs aux deux ſurfaces de la ſphere & du cylindre, tels ſont les points E *e*, 2 3, par leſquels le contour de la ſection ſolide doit néceſſairemenr paſſer de même que par les points A & B; la courbe E 2 B 3 *e* ſera donc à la rencontre des ſurfaces, depuis ſon axe droit E *e*, correſpondant du diametre de la baſe du cylindre KL juſqu'au point B, où elle va toucher la ſection plane de l'ellipſe paſſant par AB, que nous repréſentons ici par la courbe A G B *g*. Cela ſuppoſé: Pl. 3. Fig. 40.

Puiſque le diametre KL de la baſe du cylindre eſt perpendiculaire à l'axe C^2 M, que l'on ſuppoſe droit, & que les moitiés de ce diametre KM & ML ſont égales, les lignes KE & L *e* menées de leurs extrêmités parallelement à cet axe, feront égales entr'elles (par l'Art 39.) donc E *e* ſera parallele & égale à KL; mais parce que, par la ſuppoſition, le plan AGB *g* eſt perpendiculaire au plan MN *n* C^2 paſſant par l'axe du cylindre MC^2 & par la ligne AB, les angles G *c* M, & *g c* M ſont droits; donc G *g* eſt parallele à KL, & par conſéquent à E *e*; mais auſſi à cauſe des paralleles K *k*, L *l*, qui ſont les côtés du cylindre, E *g* eſt un parallelogramme; donc E *e* & G *g* ſont deux lignes égales: & par la même raiſon H *h* & 2 3 le feront auſſi. Or G *g* & H *h* ſont des ordonnées de l'ellipſe plane au grand axe AB; & E *e*, 2 3, des ordonnées de la ſection ſolide à ſon axe courbe D *x* B, partie de tout l'axe AD *x* B; donc les ordonnées de cette ſection ſont égales à celles de l'ellipſe AGB *g* paſſant par les points communs A & B; donc cette courbe eſt du nombre de celles que nous avons appellées *ellipſimbre*; *ce qu'il falloit démontrer.*

92. Il reſte à faire voir que l'axe courbe AD *x* B, qui eſt dans le même plan que le ſous-tendant AB, lequel eſt le grand axe de l'ellipſe AGB *g*, s'en éloigne & s'en approche dans le rap-

Pl. 3. Fig. 40. port des ſinus verſes des arcs de cercle de la ſphere, dont les ordonnées de l'ellipſe & de l'ellipſimbre ſont les ſinus droits dans les ſections circulaites de la ſphere, faites par les plans paſſant par ces ordonnées parallelement à l'axe du cylindre M C^2.

Car ſi du centre C^2 on mene les rayons C^2 E & C^2 *e*, aux extrêmités de l'ordonnée E *e*, qui eſt la corde de l'arc ES *e*, on verra clairement que ces moitiés ED, *e* D ſont les ſinus droits des moitiés de cet arc, dont DS eſt la fleche ou ſinus verſe. De même ſi du centre O du demi-cercle *q s r* on menoit des lignes aux points 2 & 3 de la corde 2 3, autre ordonnée à la ſection, on reconnoîtroit que ſa plus grande profondeur dans le cercle, qui eſt *x s*, ſeroit la fleche de cette corde, & le ſinus verſe de ſa moitié 2 *x* ou 3 *x*, ce qui eſt clairement exprimé dans les deux figures 35 & 36, en *h*S & VS, comme nous l'avons expliqué au Théorême précédent.

Il en ſera de même de toutes les ordonnées poſſibles entre les points A & D, & D & B, dont les profondeurs diminueront depuis l'axe droit E *e*, juſqu'à ces points A & B où elles ſe réduiront à rien, parce que les ordonnées du cercle AFB *f* de la ſphere & de l'ellipſe AGBS, dont la différence cauſe celle de la profondeur de la ſection, deviennent égales à o en ces points.

COROLLAIRE.

93. D'où il ſuit que l'ellipſimbre ne fait que toucher les ſections planes, circulaire & elliptique, parce que ces deux dernieres ſe touchent ſeulement & ne ſe coupent point, & que dès le moment qu'il commence à y avoir de la différence entre les ordonnées à leurs diametres communs, dès ce moment auſſi il commence à y avoir quelque profondeur ou diſtance des ſections planes à la ſolide, dont l'axe courbe commence à s'éloigner du ſous-tendant; donc la circonférence courbe de l'ellipſimbre ne fait que toucher les circonférences des ſections planes du cylindre & de la ſphere.

94. Nous avons donné au Théorême précédent la maniere de trouver les ſinus verſes, qui ſont la profondeur de l'axe courbe par le moyen du compas; mais ſi l'on vouloit pour une plus parfaite opération, les trouver par le calcul, il ne ſeroit pas difficile. Il faut ôter du quarré du rayon du cercle de la ſection de la ſphere C^2 S ou *o s*, le quarré de l'ordonnée ED ou 2 *x*, & il reſtera le quarré de C^2 D ou de *o x*, dont la racine

quarrée étant ôtée du rayon C^2 S ou *o s*, il reſtera le ſinus verſe DS ou *x s* pour la profondeur de l'axe courbe AD*x*B dans la ſphere.

Et ſi l'on veut trouver la différence des profondeurs des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide, il ne s'agit que de faire encore une opération, qui eſt d'ôter du rayon C^2 S ou C^2 F le quarré de l'ordonnée *c*F du cercle de la ſection plane AFB*f*, il reſtera le quarré de C^2*c*, dont la racine étant ôtée du rayon, reſtera *c*S, dont ôtant D*s* trouvé ci-devant, reſtera *c*D, différence de la profondeur de la ſection plane dans la ſphere, & de la ſection ſolide, laquelle eſt la diſtance des deux ordonnées correſpondantes dans l'ellipſimbre & dans l'ellipſe plane, *ce qu'il falloit trouver.*

95. Nous avons dit dans le cas du Théorême précédent, que la plus grande diſtance de l'ellipſe plane à l'ellipſimbre, qui eſt à l'axe droit, étoit au milieu de la ſection ſolide, à diſtance égale des points A & B; il n'en eſt pas de même dans celui-ci, car 1°. l'axe droit n'eſt pas à égale diſtance des points A & B; 2°. ce n'eſt pas à l'axe droit que la ſection ſolide eſt le plus éloignée de la ſection plane.

Que l'axe droit E*e* ne ſoit pas équidiſtant des points A & B, cela eſt évident : puiſque l'axe du cylindre étant incliné à l'axe ſoutendant AB, l'angle D*c*B eſt aigu, & D*c*A eſt obtus; donc le point D qui eſt le centre de l'ellipſimbre, eſt plus près de B que de A.

Secondement. Pour prouver que le point D n'eſt pas le plus éloigné de la ſection plane qui paſſe par AB, ſoit fait à part (*Fig.* 39) l'arc de cercle majeur a T*b* égal au ſegment que la ligne AB retranche d'un grand cercle de la ſphere, dont le milieu de la corde eſt en C, par où on fera paſſer une ligne C*e*, qui fera avec a*b* l'angle *b*C*e* égal à celui de l'inclinaiſon de l'axe du cylindre ſur la ligne AB, égal à l'angle LAB (*Fig.* 38). Soit auſſi a L *d b* l'axe courbe de la ſection ſolide, & a*b* le grand axe de la ſection plane elliptique, la plus grande ordonnée à cet axe, qui eſt le petit axe, correſpond à celle qui paſſeroit par D de l'ellipſimbre, qui tient lieu de centre de cette courbe; il faut prouver qu'il peut y avoir un autre point, par exemple L, qui ſoit plus éloigné de a*b* que le point D. Pour cela, ſi du point C on fait CT perpendiculaire ſur a*b*, & que du point T, où elle coupe l'arc a T*b*, on mene une tangente T*e* à cet

Fig. 39.

Fig. 38.

Fig. 39. arc, que du même point T on abaisse TL*f* parallele à *d* C le point L, où elle coupera l'axe courbe, sera le plus éloigné de l'axe sous-tendant a *b*; car les lignes *e* C, T*f*, qui sont entre les mêmes paralleles a *b*, T *e*, sont égales entr'elles, & parce que SC n'est que partie de *e* C, elle sera plus petite que T*f*; or S*d* représente le sinus verse de l'arc, dont l'axe droit qui passe par D est la corde dans le cercle, qui est la section de la sphere par l'axe du cylindre perpendiculairement au cercle a S*b*, & LT représente le sinus verse ou la fleche, dont la double ordonnée qui passe par le point L est la corde, laquelle étant égale à celle qui passe par le point *f* de l'ellipse plane peut être très-petite; de-là on peut conclure, que son sinus verse peut être plus petit que *d* S, qui est dans un plus grand cercle que celui qui passe par L*f*, lequel est plus loin du centre C de la sphere (*Fig.* 34.); mais quand nous supposerions ces sinus verses égaux, il sera toûjours évident qu'ôtant des deux lignes inégales SC, T*f* des quantités égales S*d*, TL, la partie L*f* restera plus grande que *d c*, qui est plus petite que T*f*; donc la distance oblique L*f* étant plus grande que *d* C, la distance perpendiculaire L *x* sera aussi plus grande que *d y*, *ce qu'il falloit démontrer.*; car les triangles L*f x* & C*d y* seront semblables.

COROLLAIRE I.

96. D'où il suit que plus la ligne AB est inclinée à l'axe CS, plus il doit y avoir d'irrégularité dans l'écartement des ordonnées de l'ellipsimbre de celle de l'ellipse plane, comme aussi dans la distance de ces ordonnées entr'elles sur leur axe courbe a*d b*, comme on voit à la Figure 41, puisque les intervalles
Fig. 41. A 2, 2 3, 3 *d* sont très-inégaux, mesurés sur cette courbe A*d*B, quoiqu'ils soient égaux étant mesurés sur la droite AB en *p q c*, ou sur une perpendiculaire à leur direction, comme en *m n o*; puisque ces ordonnées à l'axe courbe aux points 2, 3, *d*, 4, 5, sont émanées de celles de l'ellipse plane, aux points *p q* C, &c. ou de la base du cylindre aux points *m n o*.

COROLLAIRE II.

97. D'où il suit encore que les ordonnées à l'axe courbe de l'ellipsimbre ne sont pas en plus grand nombre que celles de

l'ellipſe plane de part & d'autre du centre C ou D, mais qu'elles ſont plus preſſées d'un côté que de l'autre.

Remarque ſur la différence des cas qui peuvent arriver dans les cylindres ſcalenes.

98. Nous avons ſuppoſé, dans l'énoncé de ce Theorême, que le cylindre qui pénetre la ſphere eſt droit, parce que s'il étoit ſcalene, il pourroit arriver que la ſection commune aux deux ſurfaces ſeroit un *cercle*, & non pas une ellipſimbre, comme on peut le connoître par la Figure 37; car ſi du centre H de la baſe AB du cylindre ſcalene ABDE, on abbaiſſe une ligne HC perpendiculaire au plan de cette baſe, & que du point C pris ſur cette ligne à volonté, & de l'intervalle CA ou CB pour rayon, on décrive un cercle GABDE, il pourra être un des majeurs d'une ſphere, qui auroit pour centre C; or ſi l'on prolonge les côtés du cylindre ABFE vers D, il eſt évident que ce cercle coupera les côtés du cylindre en DE de la même maniere qu'en AB, de ſorte que l'angle EDB ſera égal à l'angle ABD. *Fig.* 37.

Pour en ſentir la vérité il n'y a qu'à mener CG perpendiculaire ſur les côtés du cylindre juſqu'à la circonférence du cercle en G, alors on reconnoîtra que les arcs GA, GE égaux entr'eux, * étant ôtés des arcs GD, GB, auſſi égaux entr'eux par la même raiſon, les reſtes AB & ED ſeront égaux, de même que leurs cordes qui ſont les diametres de la baſe du cylindre, donc la ſection ED ſera égale à la baſe EF, égale par la ſuppoſition de la baſe AB, parce qu'elle eſt ſous-contraire, * l'angle EDB étant égal à ABD, puiſque tous les deux ſont appuyés ſur le même arc AGE; donc ED eſt un cercle; *ce qu'il falloit démontrer.*

*Eucl. l. 3. p. 3. & 28.

* Art. 49.

Le même raiſonnement ſert auſſi à prouver que les ſections oppoſées AB, ED (*Fig.* 38.) ſont égales entr'elles; puiſque leurs grands axes AB, ED ſont égaux, & que les petits axes ſont égaux à ceux de la baſe du cylindre. *Fig.* 38.

COROLLAIRE III.

99. Il ſuit auſſi que plus les axes AB, ED ſeront inclinés à l'axe M*m* du cylindre, plus les ſections oppoſées ſe rapproche-

ront, & qu'enfin si le côté du cylindre *ll*, *ff* devient tangent à la sphere, les sections opposées a T, *d* T se toucheront au point T, & si ce côté du cylindre est hors de la sphere, ces sections se croisent également, & se mutilent réciproquement, comme nous l'expliquerons au Théorême suivant.

Application à l'usage.

100. Cette proposition sert à faire connoître quelle est la courbe de l'arrête d'enfourchement des lunettes en berceau, pratiquées pour des fenêtres, ou pour la décharge ou pour la décoration dans une voute sphérique ; car ces lunettes étant ordinairement, ou au-dessus de l'imposte de la voute sphérique, ou inclinées en abajour, ou rampantes, ce sont des moitiés de cylindre ou des cylindres entiers, dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere, & qui doivent être censées faire le même effet que si un cylindre entier entroit dans la sphere de toute sa circonférence ; par exemple, si la fenêtre étoit un œil-de-bœuf, comme sont ceux des quatre petits dômes de S. Pierre de Rome, dont la direction ne tend pas au centre de la voute, mais au-dessous, parce que l'abajour est fort incliné, il n'y a d'autre changement que l'addition d'une moitié de contour de même nature.

THEOREME XI.

La section faite par la pénétration d'un cylindre qui n'entre dans la sphere que d'une partie de sa circonférence, est une ellipsimbre composée.

Soit la sphere BV*b*P, dont le centre est C, pénetrée par le cylindre YLND, qui n'entre qu'en partie de sa circonférence dans la sphere, ensorte que la partie RP de son diametre RT, (lequel étant prolongé passe par le centre de la sphere) en reste dehors. *Fig. 42.*

Ayant supposé comme dans les Théorêmes précédens, un plan qui passe par le centre C, & l'axe M*m* du cylindre, dont la section sera un parallelogramme YLND, & celle dans la sphere un cercle majeur BV*b*P, on reconnoîtra que les points B & *b* sont communs aux deux surfaces du cylindre & de la sphere ; puisqu'ils sont la rencontre du côté du cylindre & du cercle majeur de la sphere, & que le point P, qui est commun aux deux diametres RT du cylindre, & PV de la sphere, ne l'est pas

aux surfaces, puisqu'il est dans le cylindre de la profondeur RP qui est la moindre, & que l'ordonnée P*p* au diametre PV, qui passeroit par ce point, seroit toute hors de la sphere étant une tangente; donc elle ne pourroit être commune aux deux sections qui seroient faites par un plan perpendiculaire au premier, & passer par RV, lequel plan en feroit deux circulaires; sçavoir RST dans le cylindre, & PBV dans la sphere, qu'il faut imaginer en l'air, & non pas comme le représente la Figure sur le plan passant par l'axe du cylindre & le centre de la sphere; mais parce que l'intersection des deux cercles RST du cylindre, & PSV de la sphere, se fait en P, il suit que ce point S est à la circonférence des deux surfaces, d'où ayant mené l'ordonnée S*q* au diametre RT, on voit que sa partie PT est commune aux diametres de ceux des deux corps; sçavoir, RT, PV. Pl. 3. Fig. 42.

Présentement si le cylindre YLND étoit scalene, & que la section par *q* & B, c'est-à-dire, E*q*B fût un cercle, elle auroit pour son égale & sous-contraire F*qb*, ausquelles *q*S seroit une ordonnée commune aux deux sections des plans, coupant le cylindre par EB & F*b*, & aux deux cercles sur *e*B & *fb*, que ces mêmes plans feroient dans la sphere, de sorte qu'il est visible que ces deux sections planes, quoique de même espece, ne pourroient être communes aux deux surfaces, puisque ce sont deux cercles de différens diametres qui se touchent aux points B & *b*, dont le plus petit qui a pour diametre *e*B, seroit tout entierement dans le cylindre, & que le grand EB seroit dans toute sa circonférence hors de la sphere.

La différence sera plus grande, si le cylindre est droit, parce que la section EB dans le cylindre est une ellipse, & que *e*B dans la sphere est un cercle fait par le même plan perpendiculaire à celui qui passe par l'axe du cylindre & par la sphere. Il en est de même de la section faite par le plan F*b* passant par *q* & *b*, l'ordonnée commune *q*S retranchera une partie de ces sections planes, depuis *q* vers E, & depuis le même point *q* vers F, tant de l'ellipse que du cercle fait par chaque plan coupant les deux corps, qui est hors de la sphere; mais parce que la section commune à leurs surfaces ne peut être en même-tems un cercle & une ellipse, il suit qu'elle ne peut être dans le plan EB ni F*b*, quoiqu'elle y ait un point B ou *b*; donc elle s'en éloignera en se courbant vers la circonférence du cercle de la sphere, en sorte que les ordonnées à l'axe courbe *qu*B deviennent communes

Pl. 3. Fig. 42. au cylindre en *u x* de la base F *x* K, & au cercle de la sphere 2 *x* Z *y*; donc elle sera une ellipsimbre de même nature que celle du Théorême précédent, sur chaque côté EB & F *b*, mais imparfaite, & mutilée par l'ordonnée commune *q* S où elles se rencontrent, & font un angle, de sorte que la section totale depuis B en *b* par *q* est composée de deux parties d'ellipsimbre, *ce qu'il falloit démontrer*.

Pour rendre cette explication sensible, nous supposerons un cylindre scalene MLN *m* plus petit que le précédent, dont le côté M *m* coupe la sphere aux points 2 & 4, & que la section faite par un plan passant par 4 B, & un autre par 2 *b*, est un cercle parallele à sa base, ou en section sous-contraire; il est évident que le même cercle sera aussi la section plane de la sphere de chaque côté en 4 B & 2 *b*; donc la section courbe commune *b* 5 B sera la rencontre de deux portions de cercles égales, qui ont une ordonnée commune au point 5, laquelle est l'intersection de deux plans, qui feroient une figure sembla-
Fig. 43. ble à celle qui est représentée à la Figure 43 en A ou en B, selon que le point 5 s'approchera d'un côté du cylindre ou de l'autre; car si ce point de l'intersection des plans se faisoit à la
Fig. 38. Fig. 43. tangente comme en T (*Fig.* 38) les deux arcs de cercles aboutiroient l'un à l'autre, & l'angle B (*Fig.* 43) tomberoit sur le point *t*; mais à mesure que le point 5 rentrera, le point B, qui est la rencontre des deux arcs, s'éloignera de *t*.

La même chose arrivera aux portions d'ellipsimbre, lorsque le cylindre est une partie hors de la sphere, alors ces deux courbes feront une inflexion au milieu en angle saillant, tel est l'an-
Fig. 42. gle curviligne 9 Z^2 10, quand la sphere passera au-delà de l'axe du cylindre, comme en P; mais si l'axe du cylindre passe audehors de la sphere, alors la section composée fait un angle rectangle, comme on voit dans la Figure A (*Fig.* 43); la raison en est bien sensible, si l'on fait attention que jusqu'à l'axe du cylindre la section monte dans la raison des ordonnées à la base RST, & au contraire que depuis l'axe elle baisse dans la même raison jusqu'au point R auquel elle se joint, lorsque le côté YD est tangent à la sphere, comme nous l'avons dit du point T, (*Fig.* 38.)

COROLLAIRE.

101. D'où il suit que pour trouver les points de l'ellipsimbre composé,

composée, il ne s'agit que de trouver les ordonnées communes aux sections circulaires de la sphere & du cylindre, & pour cela il faut leur trouver des diametres en partie communs, ce qui se fait en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe M*m* du cylindre qui coupent le cylindre & la sphere, comme F*y*', RV, *dff*, dont les parties 2K, PT, *gh*, sont communes aux diametres du cylindre FK & 2*y* de la sphere, sçavoir RT, PV; *dh*, *gff*; si sur chacun de ces diametres on éleve des demi-cercles F*x*K, 29*y*, RST, PBV, *dih*, *g*G*ff* leurs interfections *x*, S, *i* seront des points à la circonférence de la courbe, & les perpendiculaires menées de ces points aux diametres communs, qui les couperont en *u*, *q* & 7, donneront les points de l'axe courbe, & seront des ordonnées communes, lesquelles étant portées de W en Y, de C en Z^2, & de H en h^2, marqueront sur un plan qui auroit pour base la ligne 9, 10 des points par lesquels faisant passer une courbe 9 Y Z^2 h^2 10, on aura une expression du contour de l'ellipsimbre composée, ce que nous expliquerons plus au long dans les Problêmes du Livre suivant. Pl. 3. *Fig.* 42.

Il sera encore vrai dans le cas de ce Théorême, comme dans le précédent, que les profondeurs de la section solide dans la sphere, seront dans la même raison des sinus verses, dont les ordonnées seront les sinus droits, comme on le voit en 2*u*, P*q*, *g*7.

Si le côté LN du cylindre passe par le centre C de la sphere, & que son demi-diametre ML ne soit pas plus petit que le rayon CS de la sphere, il sera aisé de décrire l'ellipsimbre composée avec un compas, dont on mettra une pointe sur ce côté, par exemple en T, l'autre point le décrira.

La raison en est claire, car le rayon CS ne peut tourner autour d'un point fixe qu'en parcourant la surface d'une sphere par l'autre extrêmité mobile.

Application à l'usage.

102. Cette proposition fait voir quelle est la courbe de l'arête d'enfourchement, qui se forme à la rencontre de la surface d'une tour ronde, qui entre en partie dans une voute sphérique, comme pourroit être un escalier à vis dans un dôme, ou un puits sur le bord d'une citerne voutée en cul-de-four, ou d'une

tour verticale, dans laquelle ſont des renfoncemens en niche ſphérique, comme ſont les trois du dôme du Val-de-Grace, l'un ſur le Baldaquin, & les deux autres en croix ſur le Chœur & la Chapelle oppoſée, qu'on appelle niche en tour creuſe, ou encore d'une voute ſphérique établie ſur quatre portions d'arc-de-cloître, ou qui rachete un berceau. Dans tous ces cas l'on doit remarquer que ſi la voute ſphérique n'avançoit pas juſqu'à la clef, il ſe feroit un angle en *ſurplomb*, contraire à la ſolidité, parce que les *contre-clefs* pouſſeroient à vuide.

De la rencontre des ſurfaces des ſpheres avec celles des cônes.

THEOREME XII.

La ſection faite par la pénétration des ſurfaces d'une ſphere & d'un cone droit, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt un cercle.

Pl. 4. Fig. 44. SOIT la ſphere ABED pénetrée par le cone SLN, dont l'axe SM paſſe par le centre C; ſoit auſſi la courbe DKE, la ſection faite par la rencontre de leurs ſurfaces, ſur laquelle ayant pris à volonté un point K, on menera du ſommet S la ligne KS qui ſera à la ſurface du cone; puiſque le point K eſt ſuppoſé commun à ſa ſurface, auſſi-bien qu'à celle de la ſphere. Si par les points D, K, E, on mene des lignes au centre C de la ſphere comme DC, KC, EC, & que du même centre C on tire des perpendiculaires CF, CG, CH aux côtés du cone SD, SK, SE, on reconnoîtra que les triangles FCS, HCS, GCS ſont égaux en tout; puiſqu'ils ont le côté SC commun, qu'ils ſont rectangles en F, G, H, & qu'ils ont les angles en S égaux entr'eux, qui ſont ceux de l'axe du cone avec les côtés; donc les parties de ces côtés SF, SG, SH ſont égales. De même les autres triangles FCD, GCK, & HCE ſont auſſi égaux en tout, car ils ſont rectangles par la conſtruction, ils ont les côtés DC, KC, EC égaux, puiſqu'ils ſont rayons de la même ſphere, & les côtés FC, CH, CG, comme nous venons de le démontrer, auſſi égaux entr'eux; donc les côtés DF, KG, HE le ſeront auſſi, leſquels étant ajoutés aux lignes égales SF, SG, SH, on aura SD = SK = SE; par conſéquent les triangles SDI, SKI,

27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43.

SEI seront égaux entr'eux, puisqu'ils sont rectangles en I, qu'ils ont les angles en S égaux, & le côté SI commun. Or les côtés ID, IK, IE étant égaux, & la ligne SI leur étant perpendiculaire, ils sont tous dans le même plan, * & par conséquent à la circonférence d'un cercle, dont le centre est en I. Mais, par la supposition, les points D, K, E, sont à la surface de la sphere, & à celle du cone dans l'intersection faite par leur pénétration; donc la section d'un cone droit qui pénetre la sphere, & dont l'axe passe par son centre, est un cercle: *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Eucl. l. 11. p. 5.*

On démontrera la même chose de la section opposée AB vers le sommet du cone, qui est évidemment toujours plus petite que celle qui se fait vers la base.

Application à l'usage.

103. Cette proposition fait voir quelle est la courbe de l'enfourchement d'une trompe, d'une *lunette ébrasée*, ou voute en canoniere droite, qui rachete une voute sphérique, lorsque leurs impostes sont de niveau, & leur direction tendant au centre de la voute sphérique.

Si la trompe ou la lunette étoit biaise, quoique la direction de leur milieu tendit au centre de la sphere, la courbe ne seroit plus un cercle, de même que si la direction ne tendoit pas au centre, comme on va le démontrer.

THEOREME XIII.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cone scalene, dont l'axe passe par le centre de la sphere, est une ELLIPSOIDIMBRE, *ou un cercle, si elle est sous-contraire.*

Soit une sphere a*b* BA (*Fig.* 45) dont le centre est C, par lequel passe l'axe SX du cone scalene SDE qui la pénetre; il est clair, comme dans la proposition précédente, que si l'on suppose ces deux corps coupés par un plan, passant par l'axe SX du cone, les quatre points a, *b*, B, A seront communs à la surface du cone, & à celle de la sphere, puisqu'ils sont l'intersection d'un cercle majeur de la sphere & du triangle par l'axe du cone. *Fig.* 45.

Si l'on suppose encore un plan perpendiculaire au premier,

Pl. 4. Fig. 45. & passant par A & B, il sera deux sections différentes ; sçavoit, un cercle dans la sphere, que nous représentons ici par AKB, & dans le cone scalene (la section AB n'étant pas souscontraire) une ellipse que nous représentons ici par ALB, lesquelles sections n'ayant de communs que les points A & B, ne pourront être ni l'une ni l'autre commune aux deux surfaces ; donc la section solide passera au-dehors des deux plans, avec lesquels elle doit cependant avoir les deux points A & B communs.

Soit menée *h i* parallele à la base DE par le point M, intersection de l'axe SX & de la ligne AB, il est évident que *h i* sera le diametre d'un cercle dans le cone, dont la moitié M*h* portée en ML perpendiculairement sur AB, sera une ordonnée commune à l'ellipse sur l'axe AB.

De même si l'on mene *d e* parallele à DE par le point *m*, milieu de l'axe sous-tendant AB, & qu'on prenne une moyenne proportionnelle entre *dm* & *m e*, cette ligne que nous supposons ici égale à *m* L sera aussi une ordonnée de l'ellipse, qui sera égale à la moitié du grand axe de la section elliptique du cone, puisqu'elle est sur le milieu *m*, & qu'elle est plus grande que *m r*, rayon de cercle fait sur le diametre AB plus petit que *d e*.

Soit de plus menée par le point *m* la ligne S *m*, du sommet du cone S, qui coupera le cercle a *b* B A en H & I ; sur HI, comme diametre, on décrira le demi-cercle H *f* I, qui sera une section de la sphere perpendiculaire au cercle majeur A B *b* a, puis sur la même HI on élevera au point *m* la perpendiculaire *mg* égale à *m* L ; si du point *g* on mene au sommet S la ligne *g* S, elle coupera le cercle H *f* I, de la sphere au point *f*, qui sera commun aux deux surfaces, par conséquent à la section, puisque S*g* est un côté du cone qu'il faut se représenter en l'air perpendiculairement au plan ASB. A présent si du point *f* on mene *fy* parallele à S*m*, à cause des triangles semblables *g f y* & *g* S *m*, on aura S*m* : *mg* : : *fy* : *yg*, c'est-à-dire que la distance S*m* du sommet du cone à l'ordonnée de l'ellipse plane, qui en est la section par AB, sera à cette ordonnée comme la distance de l'ellipse à la section solide, prise sur un plan passant par le sommet du cone, est à la différence *g y* des ordonnées *g m*, *f x* de l'ellipse plane, & de la section solide A *x* B, ce qui est, suivant notre définition 4, * la propriété de *l'ellipsoïdimbre* ; mais

* Art. 79.

parce qu'on peut trouver autant de points *f* que l'on voudra, qui donneront toujours une pareille analogie, quoique leur distance *fy* soit plus ou moins grande, il suit que la courbe est une ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

104. D'où il suit que si par le point *f* on mene *f x* parallele à *g m*, & qui coupe la ligne S*m* au point *x*, ce point sera celui de la profondeur de l'axe courbe dans la sphere au-delà du point *m*, correspondant dans la section plane AB, & parce que les points *m* & M, & tout autre pris à volonté, produiront suivant la même construction différens points *f* plus près de *y*, on aura autant de points *x* que l'on voudra, sur différentes lignes S*m* ou SM, venant du sommet S du cone sur l'axe sous-tendant AB, & par conséquent ils donneront la courbure de l'axe A *x* B.

COROLLAIRE II.

105. Il suit encore que lorsque AB est le petit axe de l'ellipse plane de la section du cone, la section solide s'approchera du côté du sommet S dans la grande section AB, & s'en éloignera dans la petite opposée a*b*; & au contraire, si AB est le grand axe de l'ellipse, comme nous le verrons dans le Théorême suivant, qui servira d'explication à celui-ci.

THEOREME XIV.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cone, qui la pénetre de toute sa circonférence, & dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere, est une ellipsoïdimbre. Si le cone est scalene, elle peut être un cercle.

Soit la sphere A a *b* B (*Fig.* 46.) pénetrée par le cone DSE, dont l'axe SX ne passe pas par le centre C de la sphere: soit aussi dans les mêmes circonstances qu'au Théorême précédent la ligne AB, par laquelle passe le plan perpendiculaire au triangle par l'axe coupant les deux corps, dans lesquels il fait différentes sections; sçavoir, une ellipse ALB dans le cone qu'il coupe obliquement, & un cercle AKB dans la sphere; il sera clair pour peu qu'on donne d'attention à cette figure, où l'on a *Fig.* 46.

Pl. 4. Fig. 46. mis les mêmes lettres qu'à la précédente, qu'il s'agit de la même ſection; car ni le cercle de la ſphere, ni l'ellipſe du cone, qui n'ont que deux points communs A & B, ne peuvent être la rencontre des deux ſurfaces qu'en ces deux points; par conſéquent la courbe faite par leur interſection, s'écartera de leur plan, & y reviendra aux points A & B par où elle doit paſſer.

Pour reconnoître en quels points de la ſphere entre les deux A & B, cette courbe doit paſſer, il faut ſuppoſer des plans perpendiculaires à celui qui paſſe par ASB, que nous ne pouvons repréſenter ici qu'en les couchant ſur le même plan, & ſur la ligne droite de leur interſection. Soit par exemple un de ces plans paſſant par SI, la moitié de la ſection de ce plan coupant la ſphere ſera le demi cercle H*u*I, qu'il faut imaginer en l'air; & parce que ſon diametre HI coupe AB en *m*, l'ordonnée *m*P à ce diametre ſera en partie commune à l'ordonnée de l'ellipſe à l'axe AB; mais elle excédera, parce que le cercle AKB de la ſphere eſt circonſcrit à l'ellipſe ALB du cone. Pour trouver donc où ſe termine cette partie commune, c'eſt-à-dire, la longueur de l'ordonnée de l'ellipſe paſſant par le point *m*, on ſçait qu'il n'y a qu'à prendre une moyenne proportionelle entre *dm* & *me*, puiſque *de* eſt le diametre du cercle fait par la ſection du cone parallelement à ſa baſe, lequel a une ordonnée commune avec l'ellipſe de la ſection oblique AB au point *m*.

Soit *mr* l'ordonnée de l'ellipſe égale à *m*R, la ligne S*r* paſſant par le ſommet du cone, & le point *r*, qui eſt à ſa circonférence, ſera le côté du cone; mais à cauſe que ce point *r* eſt dans la ſphere, il faut prolonger S*r* juſqu'à ce qu'il rencontre ſon cercle H*u*I au point *y*, lequel ſera commun au cone & à la ſphere; & ſi par ce point *y* on mene *yx* juſqu'à la rencontre de l'interſection des plans perpendiculaires en SI, le point *x* ſera un de ceux de l'axe courbe de la ſection ſolide. Or ſi l'on fait comme dans le Théorême précédent *rg* parallele à SI, à cauſe des triangles ſemblables S*mr*, S*yx*, *rgy*, on aura S*m* : *mr* :: *rg* : *gy*. C'eſt-à-dire, que la diſtance du ſommet du cone à l'ordonnée de l'ellipſe plane, ſera à cette même ordonnée, comme la diſtance de la ſection ſolide à l'ellipſe plane, meſurée ſur un plan paſſant par le ſommet S, eſt à la différence des ordonnées de la ſection ſolide & de la ſection plane du cone; & parcequ'on peut imaginer autant de plans que l'on voudra, perpendiculaires au plan ASB, comme S*o*, au lieu de S*m*, &

qu'on aura toujours la même analogie à l'égard des ordonnées de l'ellipſe & de la ſection ſolide ; il ſuit par notre quatrieme définition * qu'elle eſt une ellipſoïdimbre , *ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 79.

Pour une plus ample explication qui pourroit être un peu difficile aux commençans, nous avons jugé à propos de répeter la Fig. 46 en façon de perſpective, au nombre 47; mais dans un ſens différent, ce qui fait qu'on ne peut repréſenter les cercles que par des ellipſes. *Fig.* 47.

Soit APB*p* le cercle de la ſection plane de la ſphere par la ligne AB, lequel eſt perpendiculaire au triangle par l'axe ESF ; ſoit auſſi ARB *r* l'ellipſe de la ſection oblique du cone, qui paſſe par les mêmes points A & B ; puiſque la ſection ſolide n'eſt pas dans ce plan , elle paſſe par-deſſous, comme dans la partie A*hy*B. Nous n'en avons pas repréſenté davantage pour éviter la confuſion des lignes. Si l'on mene des ordonnées à l'axe AB, comme P*p*, Q*q*, qui coupent l'axe AB en M & O, & que par ces points on mene des lignes du ſommet, comme S*x*, S*z*, & d'autres par les extrêmités des ordonnées de l'ellipſe, comme S*y*E, SYF, SV*h*, S*u*H; ces lignes qui feront des côtés du cone , rencontreront la ſurface de la ſphere en quelque point, comme en *y*, Y, *h* & H, par leſquels on menera des paralleles aux ordonnées de l'ellipſe *y*Y, *h*H , leſquelles feront les ordonnées de la ſection ſolide; enfin ſi par les points *r*, R, V, *u*, de l'ellipſe on mene des paralleles aux lignes S*x*, S*z*; ſçavoir, *rt*, RT, V*i*, *u*I, on reconnoîtra, comme dans la démonſtration précédente, que les triangles *yrt* , *y*S*x*, *r*SM feront ſemblables , de même que *h*V*i*, *h*S*z*, V SO; donc SM : M*r* : : *rt* : *ty*, & SO : OV : : V*i* : *ih*, donc la courbe B*yh*A eſt une portion d'ellipſoïdimbre, *comme il a été démontré ci-deſſus.*

106. On voit qu'ici les ordonnées de la courbe ſolide excédent celles de l'ellipſe ; le contraire arrive à la ſection oppoſée *ab* vers le ſommet, où les ordonnées de la courbe ſont plus petites que celles de l'ellipſe plane de la propoſition précédente, où l'on a vû le contraire dans l'une & l'autre ſection, comme nous l'avons remarqué ; la petiteſſe de la figure ne nous a pas permis de trouver celle qui eſt près du ſommet, mais pour peu d'attention qu'on y donne la choſe eſt claire , & ne mérite pas une plus longue explication ; puiſqu'il eſt évident que

la section solide sera toujours plus grande ou plus petite que l'ellipse plane, parce que les côtés du cone étant essentiellement convergens, ne peuvent passer par l'extrêmité de deux ordonnées paralleles & égales.

107. Il faut remarquer que l'excès, ou le défaut des ordonnées de la section solide sur la section plane elliptique, n'est pas proportionnel d'une ordonnée à une autre, entre l'axe droit yY, & le point A ou B, mais qu'il augmente à mesure que l'ordonnée approche de l'axe droit yY, & diminue en tirant vers A ou B, parce que le sommet du cone S étant commun à tous les triangles formés par la section des plans qui le coupent par ces ordonnées, ces plans sont inclinés entr'eux. Or si Mr étoit à xy, comme OV à zh, Sx seroit à SM comme Sz seroit à SO; donc xz seroit parallele à MO, ce qui est contre ce que nous avons démontré ci-devant; puisque l'axe courbe $BxzA$ doit passer par A & B, & s'éloigner du plan de la section plane passant par A & B; donc Mr n'est pas à ty comme OV est à ih; & par conséquent les ordonnées de l'ellipsoïdimbre ne seront pas en même raison entr'elles que celles de l'ellipse, comme dans *l'ellipsimbre*; d'où vient que nous l'appellons *ellipsoïdimbre*, c'est-à-dire qui imite seulement en quelque chose l'ellipsimbre. En effet cette courbe a un rapport essentiel avec l'ellipse dans les ordonnées prises dans la section triangulaire d'un plan qui passe par le sommet du cone & l'ordonnée de l'ellipse quelconque, dont l'excès ou le défaut est proportionné à l'éloignement des deux sections mesuré sur le même plan de la section triangulaire, & non pas à la distance absolue qui seroit prise sur deux plans paralleles passant par les mêmes ordonnées.

COROLLAIRE I.

108. Il n'est pas moins facile dans cette proposition que dans la précédente, de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe de l'ellipsoïdimbre, ce qui donne un moyen commode d'en faire la projection, comme nous le dirons en son
Fig. 46. lieu; car (*Fig.* 46) si l'on veut avoir les points x & z de l'axe courbe correspondans aux points m & o, ayant mené par ces points des lignes de, hi paralleles à la base DE, & par ces mêmes points des lignes SmI, SoQ, qui couperont le cercle majeur

jeur de la sphere en H & I, q & Q, on décrira sur ces lignes comme diametres, des demi-cercles, comme HuI, auquel on menera par le point m, mP perpendiculaire à HI, ensuite ayant pris sur m P la longueur mr égale à la moyenne proportionelle entre dm & me, du sommet S on menera par le point trouvé r la ligne Sry, qui coupera le demi-cercle HuI au point y, par lequel menant y x parallele à mP, le point x, où elle coupera la ligne SI, sera celui que l'on cherche; car le cercle H uI est une section de la sphere par un plan qui passe par le sommet S, & le point r, qui est à la circonférence de l'ellipse de la section oblique du cône, donne le côté du cone Sy qui coupe le cercle en y; donc ce point est commun aux deux surfaces; & parce que ce plan est perpendiculaire à celui qui passe par ASB, lequel est aussi perpendiculaire à celui qui passe par AB, l'intersection de ces trois plans sera une ligne perpendiculaire au plan Smx, sur lequel doit être mesurée la distance du point m au point x par une parallele à l'ordonnée de l'ellipse plane, & qui passe par le point y; donc x est un point de l'axe courbe, correspondant au point m, *ce qu'il falloit trouver*. Pl. 4. Fig. 46.

109. Si l'on veut trouver cette distance par une analogie, connoissant la distance du sommet à l'ellipse sur le côté du cone, en divisant le rectangle Prp par rb, on aura ry, parce que la propriété du cercle P$r \times rp = br \times ry$; & alors à cause des triangles semblables Smr & rty, ou (*Fig.* 46) rgy, on aura Sr : ry : : Sm : rt ou rg. Fig. 47.

COROLLAIRE II.

110. Il faut remarquer que l'axe du cone ne passe pas ordinairement par le centre de l'ellipsoïdimbre, parce qu'il ne passe pas par celui de l'ellipse plane; car l'axe du cone SX divise en deux également l'angle du sommet DSE du triangle par l'axe; donc, par la huitieme du sixieme d'Euclide, AS: AB : : AO : OB; or AS est plus petit que SB; donc AO est plus petit que OB; mais le centre de l'ellipsoïdimbre doit se trouver au point correspondant à G, milieu de AB, dans une ligne menée du point S par G; donc le point z, où l'axe du cone coupe l'axe courbe de l'ellipsoïdimbre, n'est pas le centre de cette courbe, *ce qu'il falloit démontrer*. Fig. 46.

111. Nous avons excepté dans l'énoncé de ce Théorême, touchant la pénétration du cone dans la sphere, le cas qui peut

Fig. 48. arriver si le cone est scalene, lorsque la section plane faite par la ligne ab (*Fig.* 48) est sous-contraire, parce qu'alors étant un cercle dans le cone comme dans la sphere, elle peut être commune à la surface des deux corps, non-seulement dans une section comme ab, mais encore dans son opposée ef, c'est-à-dire, dans l'emmersion & dans l'emmersion du cone dans la sphere, sans que l'axe de l'un passe par le centre de l'autre; car puisque le rectangle $fS \times bS = eS \times aS$, $eS : Sf :: Sb : Sa$; & si l'on mene fh parallele à ba, les triangles fSh, fSe seront semblables, & l'on aura $bS : Sa :: fS : Sh :: eS : Sf$; donc les angles Sfh, Sef seront égaux, c'est-à-dire, que la section ef sera sous-contraire de la section ab, *ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE III.

112. Plus le côté Sf s'éloigne du centre C, & plus les sections opposées ab & ef se rapprocheront, de sorte que s'il devient tangent à la sphere, comme s'il passoit par le point T, les sections aT & Te se toucheront en ce point T; & si le côté SK est hors de la sphere, alors il se formera une section composée de deux courbes, qui ne seront plus des arcs de cercles, parce qu'ils ne pourront être communs à la sphere & au cone qui est en partie dehors, mais de deux portions d'ellipsoïdimbre, comme nous l'allons expliquer ci-après.

Application à l'usage.

113. Ces deux Théorêmes font voir quelle est la courbe de l'enfourchement d'une trompe ou lunette ébrasée, ou voute en canoniere, qui rachete une voute sphérique de biais, soit parce que la direction de leur milieu ne tend pas au centre de la voute sphérique, soit que lorsqu'elle y tend, elle soit surhaussée ou surbaissée dans son ceintre primitif qui tient lieu d'arc droit.

THEOREME XV.

La section faite par la rencontre des surfaces de la sphere & d'un cone dont l'axe ne passe pas par le centre de cette sphere, & qui ne la pénetre pas de toute sa circonference, est une courbe composée de deux portions d'ellipsoïdimbre, ou d'autres courbes de même nature appartenant au cercle, à la parabole, ou à l'hyperbole.

Fig. 49. Soit la sphere aTe (*Fig.* 49) pénetrée par le cone SGL,

en partie ſeulement, en ſorte que le côté SG ſoit hors de la ſphere. Soit menée du point S une tangente ST, qui touche le cercle majeur a T *e* au point T; ſi l'on ſuppoſe les deux points a & *e* communs aux ſurfaces des deux corps, & des lignes a T *b*, *e* T *f* menées de ces points à celui d'attouchement T, qu'on peut conſidérer comme les ſections de deux plans perpendiculaires au plan du triangle par l'axe paſſant par le centre de la ſphere, les parties de ces lignes qui ſont dans la ſphere, comme a T, *e* T, ſeront les diametres des cercles des ſections de la ſphere, & les lignes *ef*, a *b* ſeront les grands axes des ellipſes faites par les ſections obliques du cone; or ces cercles & ces ellipſes n'ont rien de commun que les points a & *e*, donc ni les unes ni les autres de ces figures ne peuvent être les ſections communes aux ſurfaces de ces corps; donc les ſections ſolides ne ſeront pas dans leurs plans *ef* & a *b*, & ne pourront avoir deux points communs avec chaque ſection plane, puiſque les points *f* & *b* ſont hors de la ſphere, & les parties de l'ellipſe qui ſe croiſent au point T & qui ſont hors de la ſphere, ſont mutilées par le plan qui paſſeroit par la tangente T, perpendiculairement au plan a T *e*, lequel en retranche les parties T *f* & T *b*, & la jonction de ces plans a pour interſection l'ordonnée commune, qui paſſe par le point T; mais comme ces ellipſes ne ſont pas communes aux ſurfaces des deux corps, donc la ſection eſt une ellipſoïdimbre, par le Theorême précédent, il ſuit qu'on aura deux portions de cette eſpece de courbe, correſpondantes aux deux portions d'ellipſes, ce que nous appellons une *ellipſoïdimbre compoſée.* Pl. 4. *Fig.* 49.

114. Il faut remarquer que puiſque les ſections ſolides s'écartent des plans des ſections planes, l'ordonnée commune aux deux portions d'ellipſoïdimbre, ne ſera pas au point T, mais en quelqu'autre comme *x*, parce que l'une *e d f* paſſe au-deſſus de *f e*, & l'autre a *g b* paſſe au-deſſous de a *b*, comme nous l'avons dit des cas où la ſection elliptique du cone eſt au-dehors de la ſection circulaire de la ſphere.

COROLLAIRE I.

115. D'où il ſuit que l'ellipſoïdimbre compoſée ſera toûjours un angle d'inflexion; non pas à ſon milieu, comme l'ellipſimbre compoſée, mais plus près d'un des points communs a ou *e* que

de l'autre, parce que les sections opposées étant essentiellement inégales à cause de la diminution du cone vers son sommet, la partie de la courbe qui en est plus près, comme a x, sera plus petite que celle qui est vers la base, comme ex, ainsi qu'il est représenté dans la Figure 49 par les courbes eiX & x g a.

Fig. 49. Secondement, que cette inflexion sera un angle saillant, si les sections opposées se croisent au-delà du centre de la sphere, & un angle rentrant si elles se croisent en-deça comme nous l'avons dit des ellipsimbres composées ; de sorte que si la tangente SH étoit le côté du cone, l'angle d'inflexion seroit le plus saillant & le plus aigu qu'il puisse être, puisque les axes ne peuvent se croiser plus loin des points a & e, & cet angle diminuera à mesure que le point x se rapprochera de la ligne a e.

Nous donnerons dans la suite la maniere de tracer cette courbe composée, soit par la projection sur un plan, comme nous l'avons déja indiquée par celle de tracer l'ellipsimbre composée, soit en effet dans son contour naturel sur un cone ou sur une sphere.

COROLLAIRE II.

116. Quoique nous ayons parlé dans cette proposition de la section qui produit l'ellipsoïdimbre, nous n'avons pas prétendu qu'il n'en puisse arriver d'autres cas où elle ne produit pas la même figure. Le cone en effet peut être situé de bien des façons à l'égard de la sphere qu'il ne pénetre qu'en partie, ce que l'on pourra connoître par la combinaison des différentes situations des côtés de son triangle par l'axe, & de l'inclinaison des axes des sections planes, qu'on suppose toujours passer par les points communs aux côtés de ce triangle, & aux cercles majeurs de la sphere, coupée par le même plan, qui forme le triangle par l'axe du cone, & enfin par le point d'attouchement de la ligne menée du sommet du cone, tangente au cercle majeur de la sphere.

117. Premierement, puisqu'un des côtés du cone doit couper la sphere en deux points, & que sa base ou un second plan passant par un point commun aux deux surfaces, & par le point d'attouchement d'une ligne menée du sommet, doit couper les côtés du cone ; il suit que dans toutes ces sections composées de portions de courbes, il y en aura toujours une relative au cercle ou à l'ellipse ; mais parce qu'un des deux plans que nous supposons com-

me l'origine de ces ſections, peut être ſitué de maniere qu'il ne coupe le cone que d'un côté, la ſection qui en réſultera appartiendra à la parabole ou à l'hyperbole, & ſera une courbe à laquelle nous pouvons donner le nom de paraboloïdimbre ou d'hyperboloïdimbre ; c'eſt-à-dire que dans toutes ces ſections il ſera toujours vrai que les ordonnées à leur axe courbe qui eſt dans le plan de l'axe droit de la ſection plane & du ſommet du cone, auront un excès ou un défaut ſur les ordonnées de la ſection plane correſpondantes, relativement à leur diſtance dans un plan paſſant par le ſommet du cone & par les deux ordonnées ; de ſorte que connoiſſant cette diſtance on pourra toujours connoître la différence des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide par cette analogie. Comme la diſtance du ſommet du cone à l'ordonnée de la ſection plane :

Eſt à la longueur de la même ordonnée ;

Ainſi la profondeur ou diſtance de l'ordonnée de la ſection ſolide à celle de la plane, priſe dans un plan paſſant par le ſommet du cone :

Eſt à la différence des deux ordonnées, c'eſt-à-dire, à l'excès ou au défaut de l'ordonnée de la ſection plane.

Il eſt clair que par le moyen de cette différence, ajoutée à l'ordonnée de la ſection plane, connue par les ſections coniques, ou retranchée de cette ordonnée, on aura un point du contour de la ſection ſolide, telle qu'elle puiſſe être, ellipſoïdimbre, paraboloïdimbre, ou hyperboloïdimbre.

Nous avons repréſenté dans les cinq figures ſuivantes, les différentes combinaiſons de ces ſections compoſées.

Dans la premiere figure où les points a & *e* ſont communs à la ſphere & au cone, & le point T celui d'attouchement de la tangente menée du ſommet S du cone au cercle majeur de la ſphere *e* a T ; le plan paſſant par *e* T perpendiculairement à la tangente ST, fait pour ſection un cercle dans la ſphere & un dans le cone, dont *ef* eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par les points a & T, fait une ellipſe dans le cone, dont le grand axe eſt a *b*. *Fig. 50.* *Fig. 51.*

Dans la Figure 2e. le plan paſſant par les points E & T, fait un cercle dans le cone dont EF eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par A & T, fait une parabole dans le cone, parce que A *b* eſt ſuppoſé parallele à SG. *Fig. 54.*

Dans la Figure 3e. le plan *e* T fait une ellipſe dans le cone ; *Fig. 50.*

dont le grand axe est *ef*, & le plan a T fait une parabole, dont l'axe est a *b*.

Fig. 52. Dans la Figure 4[e]. le plan ET fait un cercle dans le cone dont le diametre est EF, & le plan a T, qui rencontre le côté du cone SF, prolongé vers z, fait une hyperbole, dont a z est l'axe déterminé, & le point a son sommet.

Fig. 53. Dans la Figure 5[e]. le plan ET qui coupe les deux côtés du cone SE & S*f* fait une ellipse, dont E f est le grand axe, & le plan AT qui rencontre le côté *f*S, prolongé en *y*, fait une hyperbole, dont l'axe déterminé est A *y*, supposant toujours la ligne ST tangente au cercle majeur de la sphere EAT.

Application à l'usage.

118. Ce Théorême ne paroît pas d'une grande utilité pour la pratique; on ne l'a mis ici que pour la perfection de la doctrine, il sert seulement à faire connoître quelle seroit la courbe de l'arrête d'enfourchement d'une trompe ou voute en canoniere, qui racheteroit par le côté une voute sphérique, ce qui ne pourroit arriver que dans une construction bizarre.

CHAPITRE VI.

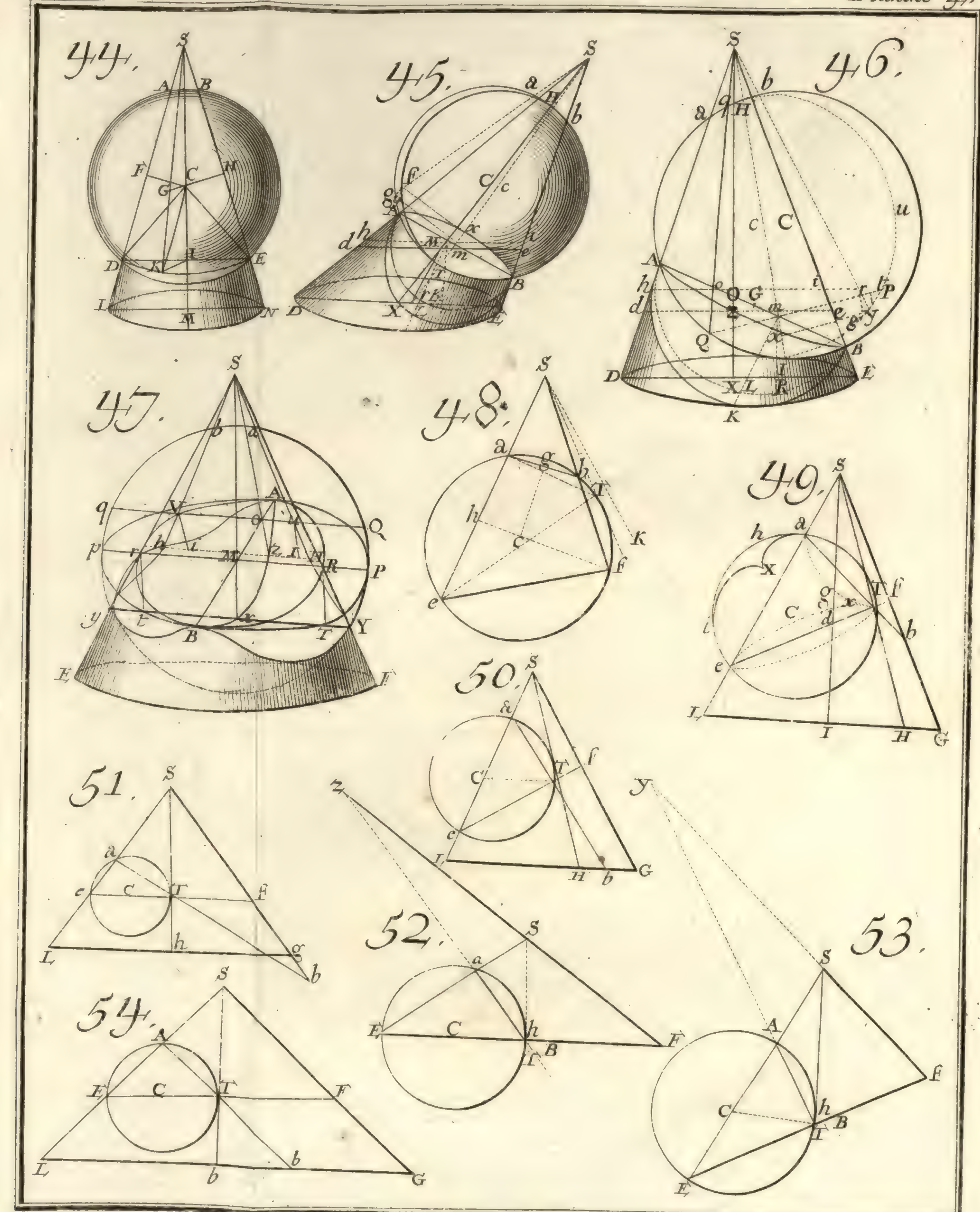
Des sections faites par la pénétration des cylindres entr'eux & avec les cones.

THEOREME XVI.

La section faite par la pénétration des cylindres de même nature, égaux ou inégaux, dont les axes sont égaux en longueur, & paralleles extr'eux, est un parallelogramme.

LA démonstration de cette proposion est trop facile pour s'y arrêter; car puisque la section d'un cylindre faite par un plan passant parallelement à son axe, est un parallelogramme (*Fig.* 55) ceux qui passeront par des cordes égales de leurs bases & dans une même longueur, seront égaux; or on voit que la ligne AB qui joint les points A & B de l'interfection des cercles des deux bases, est une corde commune aux deux cercles;

Pl. 5. *Fig.* 55.


44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.

donc le parallelogramme qui aura pour côtés cette corde & une égale longueur d'axe, sera commun aux deux cylindres.

Application à l'usage.

119. Cette proposition fait voir pourquoi les voutes Gothiques, qu'on appelle en *tiers-point*, font un angle rentrant à la clef, qui se continue en ligne droite, comme une division marquée entre les deux côtés, & les pendentifs de celles qui se croisent, parce que leurs ceintres sont composés de deux arcs de cercle CA, A*c*, qui sont les parties des bases de deux cylindres, dont les axes sont autant éloignés que les centres C & *c* de ces arcs, qui le sont ordinairement de la longueur de leur rayon CA; ainsi la rencontre AD de ces portions de cylindre est un des côtés du parallelogramme de leur intersection totale s'ils étoient entiers. Pl. 5. Fig. 55.

Dans l'appareil des angles des murs on trouve aussi fréquemment des cylindres qui se pénetrent dans la même circonstance, comme on en voit à l'ancien Temple de la Galluce & à l'Eglise de la *Sapience* à Rome, dont les plans sont des arcs de cercle inscrits dans un cercle entier, de sorte que les murs sont des portions de cylindre, qui se croisent parallelement à leurs axes; mais cet appareil n'a point de difficulté.

THEOREME XVII.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes se coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un diametre égal & semblablement posé sur un plan passant par leurs axes, est une ellipse; & si l'un des cylindres est droit & l'autre scalene, ou si tous les deux sont scalenes & de bases égales, elle peut être un cercle.

Premierement. Soient deux cylindres AF, FD (*Fig.* 56) égaux entr'eux, la diagonale menée par la rencontre de leurs côtés est également inclinée sur les uns comme sur les autres; donc le plan passant par cette diagonale, & perpendiculairement à celui qui passe par leurs axes, coupera les deux cylindres d'une obliquité égale, par conséquent sera une ellipse commune à tous les deux. Fig. 56.

Secondement. Si les deux cylindres sont inégaux, comme KE

Fig. W. & 57. & EN, *Fig.* W & 57) ou il y en aura un droit qt & un ſcalene, ou ils ſeront tous deux ſcalenes, comme KE : EN (*Fig.* W) dans ce cas il eſt clair que la diagonale BE, menée par la rencontre de leurs côtés KB, LE : & BN, ME, peut être le diametre du cercle de la baſe d'un cylindre ſcalene, & par conſéquent de l'autre, qui a ce cercle auſſi pour baſe, ſoit qu'il ſoit droit comme qt, ou ſcalene comme KE, de ſorte qu'il peut être commun aux deux cylindres qui ſe rencontrent.

Troiſiemement. Si la rencontre des cylindres inégaux ne ſe fait pas à leur baſe, il eſt évident que le plan paſſant par la diagonale BE (*Fig.* W) menée par les angles de rencontre de leurs côtés KB, LE : & BN, EM, & perpendiculairement au plan paſſant par les axes a C & CP, fera une ellipſe égale dans chaque cylindre, car l'axe BE de l'ellipſe eſt commun aux deux, & l'axe conjugué x X eſt ſuppoſé auſſi égal & ſemblablement poſé; donc la ſection ſera une ellipſe commune aux deux cylindres, puiſqu'elle eſt équivalente à deux égales; *ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. W.

120. Il en ſera de même des ſections des cylindres inégaux, ayant un diametre égal, lorſqu'au lieu de ſe rencontrer ſimplement par leur extrêmité, ils ſe croiſent, comme à la Figure 58, & ſe pénetrent reciproquement; car la ſection EB ſera commune aux quatre cylindres LEBK, gEBf, hBEi, nBEm, & la ſection AD ſera commune aux quatre cylindres hDAi, LDAK & fADg, mADn, qui aboutiſſent les uns aux autres, comme dans le cas précédent; donc BE & AD ſont deux ellipſes; mais ſi les cylindres ſont inégaux, & qu'ils n'ayent pas un diametre égal & ſemblablement poſé, leur ſection commune ne ſera plus une figure plane, comme nous le démontrerons au Theorême ſuivant.

Fig. 58.

Application à l'uſage.

121. Cette propoſition eſt des plus néceſſaires pour la connoiſſance des courbes des *enfourchemens* des voutes les plus uſuelles, qui ſont les berceaux; elle fait voir que lorſqu'ils ſont de même hauteur, quelle que puiſſe être leur largeur, leur ceintre d'enfourchement eſt toujours une ellipſe, ſoit qu'ils aboutiſſent l'un à l'autre perpendiculairement ou obliquement, & alors l'angle de leur rencontre eſt moitié rentrant vers l'angle ſaillant de leurs côtés, comme depuis C en B, ce que l'on appelle

Fig. W.

pelle alors partie de voute en *arc de cloitre*, & moitié saillant vers l'angle rentrant des côtés, comme de C en E, ce qu'on appelle partie de *voute d'arête*. Soit que les deux berceaux se croisent, & alors ils sont tous saillans, & font ce que l'on appelle proprement *voute d'arrête*. *Fig.* 58.

Cette observation est nécessaire pour faire connoître la fausseté du trait du ceintre surhaussé des voutes d'arrête barlongues dans le Livre de la Coupe des bois du sieur Blanchard, qu'il fait en tiers-point non-seulement dans la Figure de la Planche 17, mais encore dans le discours; car il dit, *page* 68, *que leurs élévations . . . tendent au centre supposé* 18 *de sa Planche* 27.

THEOREME XVIII.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres droits inégaux qui se pénetrent, & dont les axes se coupent perpendiculairement, est un cicloïmbre.

Soit le cylindre ABED, dont l'axe FG est perpendiculaire à l'axe CO d'un autre cylindre plus petit HILK, & dont la base est le cercle HMIN, ayant supposé un plan qui passe par les deux axes, si l'on en suppose d'autres qui lui soient perpendiculaires & à l'axe FG, ces plans qui seront paralleles entr'eux feront deux sections différentes chacun; sçavoir, un parallelogramme MNQR, dans le cylindre supérieur HILK, qu'ils couperont par l'axe, ou parallelement à son axe, & un cercle QSRT dans le cylindre inférieur ABED, qu'ils couperont perpendiculairement à son axe, lesquelles deux sections se rencontreront en deux points opposés RQ, *rq*, qui seront par conséquent communs à la surface des deux cylindres, & à la circonférence de la courbe qui est formée par l'intersection des deux surfaces, aussi-bien que les points K & L, qui sont à l'intersection des deux parallelogrammes formés par la section du premier plan passant par les deux axes des cylindres, de sorte que cette courbe passera nécessairement par les points KR *r* L d'un côté, & KQ *q* L de l'autre; & si l'on joint les points opposés par des lignes QR, *qr*, ces lignes seront perpendiculaires au plan passant par les deux axes des cylindres, qui les coupe en deux également aux points P & *p*, par où passe l'axe courbe de la section solide KP*p*L; or il est aisé de voir que ces ordonnées sont *Fig.* 59.

Pl. 5. Fig. 59. paralleles & égales à celles de la base du cylindre MN, *mn*; puisque cette base HMIN est perpendiculaire au plan passant par les axes, aussi-bien que QR & *qr*, qu'elles sont entre mêmes paralleles QM, RN, ou *qm*, *rn* qui sont les côtés du cylindre, étant dans le même plan MR, ou *mr* passant par l'axe OP, ou parallelement à cet axe; & s'il restoit quelque doute sur l'égalité des côtés MQ, MR, pour établir le parallelisme

Art. 39. de MN & QR, il n'y a qu'à se rappeller l'article 39, où l'on a fait voir que MN étant parallele à la tangente du cercle QSR par S, & les points M & N étant également éloignés du point O, qui est dans le diametre TS prolongé, les paralleles à ce dimetre MQ & NR, terminées à la circonférence du cercle, seront égales entr'elles; donc les ordonnées QR & *qr* sont égales aux correspondantes de la base du cylindre dans les mêmes plans MN & *mn*. On prouvera la même chose de toutes les ordonnées possibles; donc la section creuse KLRQ est celle que nous avons appellée un *cicloïmbre* par la premiere défini-

Art. 75. tion; *ce qu'il falloit démontrer.*

Il n'est pas nécessaire d'ajouter que les ordonnées de cette section solide ne sont pas dans un même plan, puisqu'il est évident qu'elles s'éloignent de celui qui passeroit par l'axe soustendant KL, à mesure qu'elles s'éloignent de ces deux points jusqu'au milieu QR qui répond au diametre MN, perpendiculaire au plan passant par les axes des cylindres. Or il est aisé de faire voir dans quelle raison elles s'éloignent ou se rapprochent de l'axe sous-tendant KL; car puisque toutes les sections faites dans le cylindre AE, par les plans passans par les ordonnées de la base HMIN au diametre HI, parallelement à l'axe OP, sont des cercles égaux à celui de la base AD; il suit que les ordonnées de la section solide, qui sont égales à celle de la base HMIN, sont autant de cordes inscrites dans un cercle égal à la base du cylindre AE, qu'on a mis en suite de la figure en a*d* par les lignes ponctuées PP^2, pp^2; de sorte que la profondeur de ces cordes dans le cercle est mesurée par la longueur de leurs fleches aP^2, ap^2 égales à SP, *sp*, qui font voir de combien la courbe s'éloigne du plan qui passeroit par l'axe KL, soustendant de l'axe courbe KP*p*L, à mesure qu'elle approche du milieu de ces deux points communs KL; de sorte qu'elles augmentent continuellement en longueur dans la raison de celle des ordonnées de la base HMIN, & de profondeur dans le rap-

port des fleches des doubles ordonnées, inſcrites dans la baſe du cylindre AE ; ou ſi l'on veut prendre les ordonnées pour des ſinus droits, leur profondeur ſera meſurée par les ſinus verſes ; ce qui montre évidemment que toutes les doubles ordonnées priſes enſemble forment une ſurface courbe en façon de tuile creuſe plus ou moins profonde ſelon la grandeur relative des deux cylindres, qui ſe pénetrent perpendiculairement ; de ſorte que s'ils ſont égaux, la ſection eſt la plus profonde qu'elle peut être, parce qu'alors la plus grande ordonnée du milieu, que nous appellons l'axe droit, paſſera par l'axe du cylindre AE, c'eſt-à-dire par le centre C^2 du cercle $aR^2\, dQ^2$, & alors la ſection change de nature, & devient plane comme au Theorême précédent, ſe diviſant en deux parties, qui font un angle rentrant KCL.

122. Il reſte à démontrer que tous les diametres de cette ſection ſolide ſont égaux, c'eſt-à-dire toutes les lignes, qui, paſſant par l'axe de profondeur SP, ſont terminées à la circonférence de la courbe. Premierement il eſt clair que l'axe ſouſtendant KL = HI eſt auſſi égal à l'axe droit QR = MN = HI, puiſque ce ſont les diametres du même cercle HMIN ; il en ſera de même des diametres WV & *u*U, qui ſeront entre mêmes paralles W*u*, & VU & d'une égale profondeur au-deſſous de KL, mais tous hors de la ſurface creuſe formée par les ordonnées, qui forment la circonférence de la ſection, car ils coupent l'axe SP au-deſſus du centre P, par exemple en *x* ; donc par la définition premiere la ſection ſera un cicloïmbre ; *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 75.

COROLLAIRE I.

123. Non-ſeulement les ordonnées au plan paſſant par KPL, dans lequel eſt l'axe courbe, ſont égales aux correſpondantes ordonnées au diametre HI ; mais encore celles qui ſeroient perpendiculaires au plan paſſant par QSR, dans lequel eſt l'axe droit, ſeroient égales aux paralleles à l'axe HI, correſpondantes dans un plan parallele à l'axe OP, leſquelles renfermeroient une portion cylindrique, terminée par la courbe KRLQ.

Lorſque nous avons dit que tous les diametres du cicloïmbre ſont égaux, nous n'avons entendu parler que des lignes droites, menées d'un point de la courbe à ſon oppoſé, en paſ-

Pl. 5. Fig. 59. ſant par l'axe de profondeur SP ; car ſi l'on vouloit appeller diametres les lignes courbes qui paſſent à la ſurface du cylindre par le point S, & les points oppoſés de la circonférence du cicloïmbre, on s'apperçoit bien que de tels diametres ſeroient tous inégaux en longueur & en courbure, le plus grand eſt l'arc de cercle QSR, dont l'axe droit QR eſt terminé à la courbe, & les autres ſeroient des portions d'ellipſe, toujours moins concaves à meſure qu'elles s'éloigneroient de cet arc de cercle, & qu'elles approcheroient de l'axe ſous-tendant KL, où l'arc elliptique ſe change en ligne droite dans la ſuppoſition qu'elles paſſent toutes par le milieu S ; & parce que tous ces arcs inégalement courbes, auroient pour corde des diametres droits égaux entr'eux ; il ſuit que ces courbes ſeroient toutes inégales en longueur développée, c'eſt-à-dire rectifiée.

COROLLAIRE II.

124. D'où il ſuit que le cicloïmbre, conſidéré comme une portion de la ſurface du cylindre, étendue en ſurface plane, ſeroit un ovale dont le grand axe ſeroit QSR, & le petit KL.

COROLLAIRE III.

125. Il ſuit encore que plus le cylindre HL ſera petit à l'égard du cylindre AE, moins la ſection ſolide ſera creuſe ; & au contraire plus le cylindre HL ſera grand à l'égard du cylindre AE, plus elle ſera creuſe, ſoit qu'on la conſidere comme portion de la ſurface du cylindre, ou comme une autre ſurface formée par une ſuite d'ordonnées à l'axe courbe KPL ; de ſorte qu'en cas d'égalité, comme nous l'avons dit, la ſection ſolide devient égale à deux moitiés de ſections planes elliptiques, qui ſe rencontrent au diametre paſſant par l'axe FG, parce qu'alors les côtés MQ, NR du cylindre HL deviennent tangens au cylindre AE, & par conſéquent ne le coupent qu'en un point chacun, qui eſt à l'extrêmité du diametre du cylindre AE ; de ſorte que la profondeur ſera SC, qui ne peut être plus grande, parce qu'au cas que le cylindre HL devienne encore plus grand, ce ne ſera plus lui qui pénetrera, mais qui ſera pénetré par le cylindre AE.

On remarque bien auſſi que dans le cas d'égalité des cylindres, les plans des demi-ellipſes qui ſe rencontrent en C, ſe

coupent à angle droit, puisque les rayons KS, SL & SC sont égaux, les angles imaginés en KCS & LCS sont de 45 degrés; doc KCL sera de 90, c'est-à-dire droit. Pl. 5. Fig. 59.

COROLLAIRE IV.

126. De ce que nous avons dit que la profondeur du cicloïmbre dans le cylindre, étoit mesurée par les fleches des cordes égales aux ordonnées à son axe courbe, inscrites dans la base du cylindre, on tire une maniere fort aisée de trouver autant de points que l'on voudra de son axe courbe; car ayant fait un cercle aR^2 d Q^2 à côté de la figure, & lui ayant mené par le point a une tangente t a T, perpendiculaire au diametre a d, on portera sur cette tangente les ordonnées PR, & pr en a T & a Z, & par les points T & Z on menera TR^2, Zr^2 paralleles au diametre a d, qui couperont la circonférence du cercle aux points R^2 r^2, par où menant des paralleles à la tangente a T, on aura sur le diametre a d qu'elles couperont, les fleches aP^2, ap^2, qui sont les profondeurs des points de l'axe courbe, correspondans aux ordonnées MN, mn de la base du cylindre HL, égales à celles du cicloïmbre.

Si l'on vouloit trouver ces profondeurs par le calcul, on se serviroit de la même méthode qu'on a donnée ci-devant au Theorême IX, pour trouver celle de l'ellipsimbre, avec cette différence qu'elle est plus aisée dans celui-ci, parce que toutes les ordonnées s'inscrivent dans un même cercle, & que pour l'ellipsimbre de ce Theorême, elles devoient toutes être inscrites dans des cercles inégaux.

Il est inutile de faire remarquer que les cicloïmbres opposés sont égaux dans l'immersion d'un cylindre dans un autre, comme dans son émersion; cette vérité se fait sentir par le parallelisme des côtés de l'un & de l'autre de ces solides.

Application à l'usage.

129. Rien n'est plus ordinaire dans les voutes que la courbe dont nous parlons, on voit presque par-tout les berceaux en plein ceintre, percés de lunettes droites aussi en plein ceintre, dont les impostes sont à même hauteur que la naissance de la voute, comme seroient celles de la nef du Val-de-Grace, si les

vitraux étoient parfaitement en demi-cercle. On connoît donc par cette proposition, que la courbe de l'arrête de leur enfourchement est un *cicloïmbre*. Cette courbe n'est pas moins commune dans l'Architecture militaire; car les soupiraux circulaires des souterrains en berceaux de niveau & en plein ceintre, & posés à plomb sur la clef, sont des cylindres qui en pénetrent d'autres perpendiculairement sur leur axe; tels sont encore les puits des citernes, posés au milieu des voutes en berceau.

THEOREME XIX.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres inégaux, dont les axes se coupent obliquement, & qui se pénetrent de sorte que l'un entre dans l'autre de toute sa circonférence, est une ellipsimbre.

La démonstration de cette proposition est si semblable à celle de la précédente, qu'on peut l'appercevoir à la seule inspection de la Figure 60; soit a*bed* un cylindre droit, dont l'axe est *fg*, pénetré par un autre cylindre *hikl* plus petit, c'est-à-dire d'un moindre diametre, dont l'axe *x*X coupe l'axe *fg* obliquement en C. Ayant supposé, comme dans la proposition précédente, un plan qui passe par ces axes, il fera pour section deux parallelogrammes, dont les intersections des côtés qui se couperont en K, L, V, *u* donneront les points K & L, communs aux deux surfaces. Si l'on suppose d'autres plans perpendiculaires à celui-ci, qui passent par l'axe *x*X, ou parallelement à cet axe comme M*y*; ces plans feront deux sections différentes; sçavoir, un parallelogramme MY ou *my*, dans le cylindre *hl*, & une ellipse SRT, ou *srt* dans le cylindre a*d*, dont les intersections R & *r* seront communes à la surface des deux cylindres, ce qui est évident. Si enfin l'on suppose un autre plan aussi perpendiculaire au premier, mais passant par KL, ou parallelement à a*b* par *h*I, ce plan fera pour section dans le cylindre *h*L une ellipse *h*MIN, dont toutes les ordonnées à l'axe *h*I comme NO, *no* seront égales à toutes les ordonnées RP, *rp* de la section solide, par les mêmes raisons que nous avons expliquées fort au long dans la proposition précédente; car la ligne MN étant (par la supposition) perpendiculaire à OC, puisqu'elle est l'intersection de deux plans *h*NI, ONYX perpendi-

Fig. 60.

culaires à un troisieme *h* ILK, elle sera parallele à la tangente, Pl. 5. Fig. 40.
qui passeroit par le point S; donc NR & MQ qui sont paralleles, étant les côtés du cylindre, & également éloignées du diametre de l'ellipse SRT prolongé en O, couperont cette ellipse à des distances égales de N & M; donc RQ sera parallele à NM, elle lui sera aussi égale, puisqu'elle est entre mêmes paralleles NY, MZ. On démontre la même chose de l'ordonnée *rq*, dont toutes les ordonnées à l'axe courbe KPL de la section passant par KR *r* L, sont égales à celles de l'ellipse plane *h*MIN, correspondantes dans des plans paralleles entr'eux, & à l'axe *x* X du cylindre *h l*; or toutes ces ordonnées PR, *p r* ne sont pas dans un même plan, puisqu'elles s'écartent & se rapprochent de l'axe sous-tendant KL, auquel elles viennent se terminer à rien aux points K & L donc leur somme forme une surface creuse, comme celle du Theorême IX, dont le contour est une *ellipsimbre* suivant notre définition; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

128. On doit tirer les mêmes conséquences de ce Theorême que du précédent. 1°. Que plus le cylindre *hi* LK sera grand par rapport au cylindre a*b d e*, la section KRLQ sera plus profonde; de sorte que si les deux cylindres deviennent égaux, elle changera de nature, de section solide qu'elle étoit, elle deviendra une section plane, composée de deux ellipses qui se rencontrent au diametre du cylindre a*d* passant par l'axe *fg*, au point C & perpendiculairement au plan a*d*, où sera l'intersection des plans des deux demi-ellipses, ce qui retombe dans le cas du Theorême XVII & de la Figure 58, où deux cylindres inégaux ont un diametre commun ou semblablement posé à l'égard du plan passant par les axes des cylindres.

Et au contraire, plus le cylindre *h l* sera petit à l'égard de l'autre a*d*, moins la section sera profonde; car puisque les profondeurs de l'axe courbe sont déterminées par les fleches, dont les ordonnées de la section sont les cordes inscrites dans une commune ellipse, qui a pour grand axe la section oblique ST, plus les ordonnées seront petites, moins elles entreront dans l'ellipse, où les plus petites cordes sont toujours les plus éloignées du centre, de même qu'on l'a dit du cercle.

COROLLAIRE II.

PL. 5. Fig. 60. 129. Nous remarquerons aussi, comme au Theorême X, que la plus grande profondeur de l'ellipsimbre n'est pas au milieu des points K & L, parce que l'axe droit correspondant au petit axe MN de l'ellipse *h* MIN est plus près de L que de K, l'angle KSP étant plus grand que l'angle LSP, d'où il suit que les ordonnées à l'axe courbe KPL, qui sont en nombre égal à celles de l'ellipse plane *h* MIN à l'axe *h* I, seront plus pressées d'un côté que de l'autre; sçavoir, de P en L, que de P en K.

130. La méthode de trouver les profondeurs de la section, c'est-à-dire les points de son axe courbe KPL, est tout-à-fait la même que celle du Theorême précédent; la seule différence est que l'on inscrit ici dans une ellipse, qui est la section oblique du cylindre, les ordonnées qu'on inscrivoit dans le cercle de sa base.

Fig. 61. Si l'on fait l'ellipse SDTB (*Fig.* 61) égale à la section oblique, qui a pour grand axe ST, ou S *t* de la Fig. 60, & le petit axe BD égal au diametre *b d* de la base du cylindre a *d* (*Fig.* 60) ensuite que l'on fasse la ligne SH, perpendiculaire sur ST, grand axe, S 1 = PR & S 2 = *p r*, qu'enfin on mene par les points 1 & 2, les lignes 1 R, 2 *r*, paralleles à l'axe ST, qui rencontreront l'ellipse SRB aux points R & *r*, ces lignes 1 R, 2 *r*, ou leurs égales S *p*, SP, sont les profondeurs des points de l'axe courbe, correspondant aux points O & *o* de l'axe *h* I de l'ellipse *h* MIN (*Fig.* 60.)

Dans le cicloïmbre nous avons trouvé que ces lignes SP, S *p* étoient les sinus verses des sinus droits RP, *rp* ici ce sont des abscisses du diametre ST, lesquelles sont encore en même Fig. 62. raison que ces sinus verses; car si l'on fait l'angle LSC (*Fig.* 62) égal à l'angle LSC de la Fig. 60, & S *i* perpendiculaire sur SC, & que l'on prenne sur SC les parties SP & S *p*, égales aux abscisses de la fig. 61, si par ces points P & *p*, on mene PO, & *po* perpendiculaires à la ligne SL, les lignes SO, S *o* seront les abscisses de *h* I; or il est clair que SP : SO :: S *p* : S *o* à cause des paralleles *p o*, PO. Si enfin l'on fait l'angle LS *i*, égal à l'angle IH *i*, & que l'on mene des points *o* & O les lignes *o f*, OF, perpendiculaires sur S *i*, les lignes S *f*, SF représenteront les abscisses du cercle, c'est-à-dire les fleches, dont les doubles ordonnées

ordonnées de la ſection ſolide ſont les cordes, ou les ſinus verſes des ordonnées conſidérées comme ſinus droits, leſquelles ſont encore en même raiſon; car SO : SF : : *So* : *Sf* : : SP ; *Sp*, *ce qu'il falloit démontrer*, c'eſt-à-dire, que les abſciſſes de l'axe ST de l'ellipſe SRTQ ſont à celles de l'axe *h*I, de l'ellipſe *h*MIN, comme celles-ci ſont à celles du cercle.

Application à l'uſage.

131. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une lunette biaiſe dans un berceau, lorſque les impoſtes de l'une & de l'autre ſont ſur un même plan, ou la courbe de l'enfourchement d'un puits ou d'un ſoupirail circulaire, qui rachete un berceau rampant, comme on en voit au Fort S. Jean, à Marſeille, & en pluſieurs fortereſſes.

THÉOREME XX.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonférence, perpendiculairement ou obliquement à ſes côtés, ſans que leurs axes ſe rencontrent, eſt une ellipſimbre.

Pour rendre la figure néceſſaire à l'intelligence de la démonſtration de ce Theorême auſſi ſimple qu'il eſt poſſible, nous ne ſuppoſerons qu'une tranche du grand cylindre (*Fig.* 63) faite par deux plans paralleles entr'eux, perpendiculaires à ſon axe, & tangens au petit cylindre HILK, que nous ſuppoſons premierement perpendiculaire aux côtés du grand cylindre, enſorte que ſon côté HB tombe à angle droit ſur le côté V*u* du grand cylindre; nous verrons ci-après qu'il peut tomber obliquement ſans qu'il arrive de changement à la ſection ſolide. *Fig.* 63.

Si (comme dans toutes les propoſitions précédentes) nous commençons par ſuppoſer un plan paſſant par l'axe du petit cylindre HL, & perpendiculairement à celui du grand, nous verrons qu'il fera deux ſections différentes; ſçavoir, un parallelogramme HILK dans le petit, & un cercle DVG*u* dans le grand, qui ſe couperont aux points AB, EF, leſquels ſeront par conſéquent communs aux deux ſurfaces des cylindres. Si par deux de ces points A & B, on fait paſſer un ſecond plan

parallele à l'axe du grand cylindre, il fera aussi deux sections différentes dans ces deux corps ; sçavoir, un parallelogramme ST*u*V dans le grand, & une ellipse AMBN dans le petit qu'il coupe obliquement dont le grand axe sera AB, & le petit MN, égal au diametre de la base HI, & les côtés du parallelogramme ST*u*V seront tangents de cette ellipse à l'extrêmité de ses axes, & par conséquent au-dehors du cylindre ; donc il ne peut être la section commune aux deux surfaces. L'ellipse AMBN ne peut aussi être une section commune, puisqu'elle est toute au-dedans de la surface du grand cylindre, avec laquelle elle n'a de commun que les points A & B ; donc la section commune faite par la rencontre des surfaces, sera une courbe différente de ces deux figures avec lesquelles elle doit cependant avoir les points A & B communs, par conséquent elle ne sera pas dans un plan, mais une courbe à double courbure ; cependant elle aura toutes les ordonnées à son axe courbe égales à celles de l'ellipse, qui est la section oblique du petit cylindre par les points communs A & B.

Pour trouver les points par où cet axe courbe passe, il est plus aisé dans cette proposition que dans toutes les précédentes ellipsimbres, puisqu'il n'est pas une courbe inconnue, mais un arc de cercle APB, qui est portion de celui de la surface du grand cylindre, coupé par un plan perpendiculaire à son axe, & passant par les points DBAV, si le cylindre HL tombe perpendiculairement sur les côtés du grand.

Ou dans un autre cas cet arc courbe sera une portion de l'ellipse faite par un plan passant par l'axe du cylindre HL, & coupant obliquement le grand cylindre par les points A & B.

Soient les points RQ & *r q* la rencontre des deux surfaces, les ordonnées menées par ces points à la courbe de la section solide seront donc sur la surface du grand cylindre, dont elles seront partie des côtés, telles sont ici PR, *p r*, lesquelles seront paralleles & égales aux correspondantes NC, *n* O dans l'ellipse plane AMBN sur des plans paralleles à l'axe *x* X ; car les lignes passant par ces points NR, *n r* parallelemens à l'axe *x* X sont des parties de côtés du cylindre HL, par conséquent paralleles entr'elles ; mais parce que les doubles ordonnées NM, *n m* sont paralleles à l'axe du grand cylindre, elles le seront aussi aux côtés du même cylindre ; donc RM & *r m* sont des parallelogrammes, par conséquent

$rq = nm$, & RQ = NM; c'eſt-à-dire, que les ordonnées ou doubles ordonnées de la ſection ſolide ſont égales à celles de l'ellipſe plane dont le grand axe eſt le ſous-tendant de l'axe courbe BPA ; donc la ſection eſt une ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

132. D'où il ſuit que cette ellipſimbre eſt beaucoup plus parfaite & plus ſimple que celles des propoſitions précédentes ; plus parfaite en ce que ſon axe courbe eſt une portion réguliere de cercle ou d'ellipſe ; & plus ſimple en ce que ſes ordonnées ne font pas une ſurface différente de celle du grand cylindre, comme dans les ellipſimbres précédentes, & par conſéquent le centre P de cette ſection ſe trouve à la ſurface du cylindre, où eſt auſſi l'axe droit RQ, qu'il diviſe en deux également. Tous les autres diametres courbes qui paſſeront par le centre P feront des portions d'ellipſes, dont les cordes ſeront les diametres droits de la ſection, égaux auſſi à ceux de l'ellipſe plane ſous-jacente AMBN.

Au reſte cette ellipſimbre a toutes les propriétés des autres ; ſes ordonnées par exemple ſont plus ſerrées d'un côté que de l'autre, excepté qu'elle eſt encore plus ſimple dans les profondeurs de ſon axe courbe, leſquelles ſe trouvent naturellement en faiſant d'un point donné ſur l'axe ſous-tendant a*b*, mis au bas de la Figure 63, l'angle *p* O a ou PC a égal, à celui de l'axe *x* X, avec la ligne AB, & toutes les lignes paralleles à PC, ou *p* O iront ſe terminer à l'arc de cercle *b*PA de la baſe du grand cylindre, ſi le petit le traverſe perpendiculairement à ſes côtés, ou à un arc d'ellipſe *b*PA, s'il le traverſe obliquement, comme à la Figure 64 ; ſi l'on veut avoir les profondeurs perpendiculaires à l'axe ſous-tendant *b* a, il ſera bien aiſé d'abbaiſſer des perpendiculaires *p d*, PD ſur cet axe, elles donneront ces profondeurs. *Fig. 64.*

133. Il nous reſte à faire voir que ſoit que le petit cylindre traverſe le grand perpendiculairement à ſes côtés, comme nous l'avons ſuppoſé (*Fig.* 63), ſoit qu'il le traverſe obliquement, la ſection ſera toujours une ellipſimbre, ce qui eſt aſſez clair de ſoi-même ; car ſoit que le côté HB tombe d'une façon ou de l'autre ſur VB, le plan VST*u* ſera toujours un parallelogramme dans le grand cylindre, & une ellipſe AMBN dans le pe- *Fig. 63.*

tit : la ſeule différence eſt, que la ligne AB (*Fig.* 63) eſt néceſſairement le grand axe de l'ellipſe, & que ſi le cylindre *h* L (*Fig.* 64) eſt oblique ſur le côté AB du grand cylindre, elle peut devenir le petit axe.

134. Nous ſuppoſons dans l'un & l'autre cas le petit cylindre droit : s'il étoit ſcalene, le plan VST *u* pourroit le couper, de maniere que ſa ſection ne ſeroit plus une ellipſe, mais un cercle ; & alors la ſection ſolide ne ſeroit plus une ellipſimbre, mais un cycloïmbre, parce que l'axe ſous-tendant *b* a ſeroit
Fig. 64. égal à l'axe droit AB, & toutes les ordonnées de la ſection ſolide & de la plane étant paralleles & égales, les diametres droits ſeroient égaux entr'eux, ce qui eſt la propriété du *cicloïmbre*, qui en conſtitue la différence avec l'ellipſimbre où ils ſont tous inégaux.

135. L'obliquité du petit cylindre ſur les côtés du grand, occaſionne encore une différence dans la maniere de trouver les profondeurs perpendiculaires de la ſection ſolide ſur la ſection plane. Premierement, en ce qu'au lieu d'un arc de cercle pour ſon axe courbe, il faut trouver l'arc de l'ellipſe formée par l'obliquité du plan paſſant par l'axe du petit cylindre de laquelle le grand axe ſera FG & le petit *hi*, baſe du petit cylindre ; mais ce n'eſt pas aſſez d'avoir trouvé cet arc *b* a, car les perpendiculaires *p d*, PD, ſur la corde *b* a, ne ſont pas perpendiculaires au plan VST *u* de la Figure 63, lequel eſt parallele à l'axe du grand cylindre, parce que la ligne PD & la parallele *p d* eſt en-
Fig. 64. core inclinée au côté du grand cylindre *d k* ; de ſorte que pour trouver cette inclinaiſon il faut faire à part l'angle PD*y* égal à l'angle FCH ou *x* CH de l'axe *x* X avec le côté LH du grand cylindre, la perpendiculaire P*y* ſur le côté D*y* ſera la profondeur que l'on cherche.

COROLLAIRE II.

Fig. 63. 136. D'où il ſuit, comme au Théorême X, que plus le côté HK du petit cylindre s'approchera de l'extrêmité D du rayon CD, perpendiculaire à l'axe *x* X, plus la ſection ſera allongée, & plus les ſections oppoſées AB, EF ſe rapprocheront, de ſorte que ſi le côté HK devient tangent au cercle DVG *u*, les ſections ſe toucheront au point D ; & qu'enfin s'il eſt hors du grand cylindre, elles ſe tronqueront réciproquement, & la

fection totale fera compofée de deux portions d'ellipfimbre, comme nous l'avons dit ailleurs.

Application à l'ufage.

Cette propofition fait connoître quelle eft la courbe des arrêtes des lunettes droites ou biaifes, dont la naiffance eft audeffus des impoftes d'une voute en berceau, dans laquelle elles font pratiquées, foit que leurs clefs ne montent pas à la hauteur de celle du berceau, comme font celles de la nef du Valde Grace à Paris, & de la Chapelle de Verfailles, foit que leurs clefs foient de niveau, comme aux traverfes du rampart de Landau à la gorge des tours baftionnées, ce qui eft le cas du fecond Corollaire, où le côté du petit cylindre HK devient tangent au grand au point D; alors il fe forme une voute d'arrêtes difformes en ce qu'elles ne peuvent pas fe bornoyer en lignes droites dans les diagonales, comme aux voutes d'arrêtes, dont les clefs & les impoftes font de niveau. En effet, dans celles-ci les interfections font des ellipfes planes, comme nous l'avons démontré au Theorême XVII, & dans l'autre cas ce font des ellipfimbres, c'eft-à-dire, des courbes à double courbure, qui ne peuvent être bornoyées en ligne droite, en quelque fituation que le fpectateur puiffe fe mettre.

Si au lieu de faire attention aux rencontres des furfaces concaves des deux cylindres, on confidere la convexe de l'un & la concave de l'autre, on reconnoîtra la courbe de rencontre d'une tour ronde dans un berceau, ou fi l'on veut s'arrêter à de petits ouvrages, on remarquera que c'eft celle d'un pilier rond gothique, qui rachete un chapiteau octogone dans une moulure de cavet, comme on le voit ordinairement aux anciennes Eglifes entre la nef & les bas côtés.

On peut donner un grand nombre d'autres exemples de conftructions qui ont rapport à ce Theorême, comme font les abajours cylindriques qui éclairent des berceaux par une direction qui ne tend pas à leurs axes, comme font ceux des voutes fouterraines des tours baftionnées de Landau, lefquels font fort furbaiffés dans leur orifice, c'eft-à-dire que ce font des cylindres fcalenes, dont les rencontres avec les cylindres droits des berceaux font des courbes à double courbure en ellipfimbres.

On verra au quatrieme Livre, lorfque nous donnerons les

traits des descentes biaises qui rachetent un berceau, l'usage du petit triangle DPy, qui est sous la Figure 63, pour en trouver la double obliquité.

THEOREME XXI.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de sa circonférence, & dont les axes ne sont pas paralleles, est une ellipsimbre *composée.*

Fig. 65. Soit, comme dans la Figure 63, une tranche de cylindre gVHu (*Fig.* 65) représentée en perspective, laquelle est pénetrée par le cylindre HL, qui n'y entre qu'en partie de sa circonférence, le côté IL étant hors du grand cylindre; je dis que la section formée par la rencontre de leurs surfaces sera composée de deux portions d'ellipsimbre.

Car si l'on suppose un plan passant par l'axe xX du petit cylindre perpendiculairement à l'axe du grand, il sera dans l'un un parallelogramme, & dans l'autre un cercle, lesquels se coupant aux points A & a marqueront que ces points sont communs aux deux surfaces des cylindres, & si par le point D, équidistant des points A & a, pris sur la circonférence du cercle udVD, on fait passer deux plans coupans les deux cylindres par les points A & a parallelement à l'axe du grand cylindre, ils feront chacun deux sections différentes; sçavoir, un parallelogramme dans le grand cylindre, & une ellipse dans le cylindre HL, laquelle sera en partie hors du grand cylindre, & parce que ces plans se croisent en D; leur commune intersection GH sera une ordonnée commune aux deux ellipses AHBG & aHbG; mais parce que la section commune aux deux surfaces des cylindres qui se coupent, est une ellipsimbre, par le Theorême précédent, il suit que chaque section plane elliptique correspondra à deux portions d'ellipsimbre qui se tronqueront mutuellement, comme les ellipses avec les ordonnées, dès qu'elles ont un rapport d'égalité dans les plans paralleles à l'axe xX, & perpendiculaires au plan passant par les points ADa; donc la section totale sera composée de deux portions d'ellipsimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Cependant puisque par la proposition précédente la section solide peut être un cycloimbre, dans le cas où le cylindre qui

en pénetre un plus grand est scalene, il peut aussi arriver que la section totale soit un *cycloïmbre composé*. Pl. 5. Fig. 65.

137. Quelle que soit la section, si l'on veut trouver l'ordonnée commune aux deux courbes à laquelle elles se terminent réciproquement à leur angle d'inflexion, il n'y a qu'à mener du centre C de la section circulaire du cylindre *d*VD*u*, la ligne CF perpendiculaire sur l'axe *x*X, laquelle coupera les côtés du cylindre HL en E & F; sur EF comme diametre, ayant fait le demi-cercle ETF, on élevera du point D, section des lignes AB, a*b*, la perpendiculaire TD; cette ligne, qu'il faut imaginer couchée sur les côtés du grand cylindre parallelement à son axe, sera l'ordonnée que l'on cherche; car le point T & son opposé au diametre, passant par l'axe *x*X du cylindre HL, seront à sa circonférence, puisque ce cercle ETF est égal à la base, & que la ligne DT est à la surface du grand cylindre, quoique par la nécessité de joindre dans la figure les plans qu'on suppose perpendiculaires entr'eux, elle ne paroisse pas dans sa situation, qui seroit celle de DH & son double en GH.

COROLLAIRE.

138. On tirera la même conséquence de la différence des inflexions du milieu de l'ellipsimbre composée, que dans la proposition 11, c'est-à-dire, que plus & moins le cylindre HL entrera dans l'autre, plus l'inflexion sera sensible: que plus le point D approchera de l'axe, moins elle sera sensible; & que depuis le point D vers F elle fera un angle saillant, & au contraire depuis D vers E elle fera un angle rentrant.

Application à l'usage.

139. On voit par cette proposition quelle est la courbe de l'enfourchement d'une tour ronde qui rachete un berceau de niveau ou rampant, & qu'il n'est pas possible de supprimer les murs de la tour sous cet enfourchement, lorsqu'elle pénetre le berceau au-delà de la clef, parce que l'angle d'inflexion devenant saillant, les *contreclefs* de l'arcade qui devroient supporter la tour, pousseroient au vuide; au contraire en de-çà de la clef, il sera facile de faire porter la tour par une arcade, par-

ce que l'angle d'inflexion eſt rentrant, & fait l'effet d'une voute en tiers-point.

REMARQUE.

140. Il eſt conſtant que les ſections des cylindres entr'eux ſont les plus néceſſaires à connoître, parce que les plus communes de toutes les voutes ſont les berceaux circulaires ou ſurhauſſés ou ſurbaiſſés; or quels que ſoient les ceintres de leurs *arcs-droits*, c'eſt-à-dire, des ſections perpendiculaires à leurs axes, tant qu'ils ne varieront que du cercle à l'ellipſe, ou d'une ellipſe à une autre plus ou moins allongée, il n'arrivera aucun changement à la nature des courbes, qui ſe feront par les interſections de leurs ſurfaces, puiſque les cylindres ſurhauſſés ou ſurbaiſſés ſont de vrais cylindres, leſquels au lieu d'être droits, ſont ſcalenes; de ſorte qu'ils peuvent toûjours être coupés de maniere qu'ils auront pour baſe un cercle, comme nous l'avons dit dans les ſections cylindriques, ce qu'il n'eſt pas inutile de répeter, afin qu'on y faſſe attention dans la pratique.

Des Sections faites par la rencontre des ſurfaces des cones & des cylindres qui ſe pénetrent.

141. Il ſemble au premier abord, que ſoit que le cylindre pénetre le cone, ou que le cone pénetre le cylindre, il en doit réſulter une même ſection à leur ſurface. Cependant nous y ferons voir de la différence; dans le premier cas le cone embraſſe le cylindre, & dans le ſecond le cylindre embraſſe le cone. Or quoiqu'un cone d'une grandeur donnée n'embraſſe pas le cylindre donné, il eſt cenſé le faire, lorſqu'étant prolongé il le peut; ainſi les deux axes de ces corps étant paralleles, quoique le cylindre ne coupe qu'une partie du cone, il ne faut pas mettre en queſtion lequel des deux embraſſe l'autre; car il eſt évident qu'en prolongeant les côtés du cone, il s'élargira de maniere qu'il enveloppera le cylindre auſſi prolongé, & la section ſera toûjours la même, quoiqu'avant la prolongation elle fut moindre, parce qu'elle étoit imparfaite. Il n'en eſt pas de

même

même lorſque les axes ſe croiſent ſans ſe rencontrer, la ſection eſt tellement mutilée, que le prolongement du cone ne peut la rendre plus complete.

THEOREME XXII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cone & d'un cylindre droits, ou d'un cone & d'un cylindre ſcalenes de même obliquité ſur leurs baſes, dont les les axes ſe confondent, eſt un cercle.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi aiſée qu'elle ſe préſente d'elle-même ; car puiſque les ſections de ces corps coupés par des plans paralleles à leurs baſes, ſont des cercles, il eſt évident que les ſections FG (*Fig.* 66) & *fg* (*Fig.* 67) ſont paralles aux baſes AB, & a*b*; car les corps étant coupés par un plan paſſant par leurs axes communs SC, KC, les triangles ADF, BEG ſeront égaux; par conſéquent F & G équidiſtans de D & E, (*Fig.* 66.) & dans la Fig. 67, à cauſe des paralleles *hd*, *ie* on aura *be* : *eg* : : *b*C : CS, & a*d* : *df* : : aC : CS, mais aC=C*b*, & a*d*=*be*, donc *eg* : CS : : *df* : CS, donc *eg*=*df*, par conſéquent *fg* eſt parallele à a*b*, & la ſection faite par un plan paſſant par les points communs *f* & *g*, qui ſera un cercle dans le cylindre comme dans le cone, ſera commune aux deux ſurfaces, dont elle ſera l'interſection à leur rencontre. On peut démontrer la même choſe en ſuppoſant le point R à la circonférence de la ſection; car on connoîtra (*Fig.* 66) que les trois triangles rectangles en L, SLF, SLG, SLR, qui ont le côté SL commun, & les angles en S égaux, ſont égaux en tout, par conſéquent que les trois lignes LF, LR, LG ſont égales, & dans un même plan *, & les rayons d'un même cercle ; & (*Fig.* 67) à cauſe de l'égalité des rayons de la baſe Ca, CP, C*h*, & des triangles ſemblables aCS, F*l*S ; PCS, R*l*S ; *b*CS, *gl*S les lignes *lf*, *l*R, *lg* ſont égales, & dans un même plan parallele à a*b*; par conſéquent rayons d'un même cercle comme au cone & au cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 66 & 67.

* *Eucl.* l. 11. p. 5.

142. Quoique les axes du cone & du cylindre ſe confondent dans leur pénétration, ſi l'un de ces deux corps eſt droit & l'autre ſcalene, comme ſi (*Fig.* 68) le cylindre D*d*E*e* étoit droit ſur la baſe circulaire *de*, la ſection ne ſeroit plus un cercle, mais une autre courbe à double courbure. *Fig.* 68.

Application à l'usage.

143. On voit par cette propoſition que le ceintre de l'ébraſement d'une porte étant de même nature que celui de la porte circulaire, droit ou biais, par tête & en plein ceintre, l'arrête d'enfourchement de la partie qui fait berceau avec celle qui eſt ébraſée eſt un cercle, c'eſt-à-dire, une portion de cercle égale à celle de la porte, qui peut être d'une moitié ou d'un arc moindre, comme à celles qui ſont ſimplement bombées.

THEOREME XXIII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un cone qui ne ſont pas de même nature, c'eſt-à-dire, dont l'un eſt droit & l'autre ſcalene, & dont les axes ſe confondent, eſt une ellipſoïdimbre.

Fig. 68. Soit (*Fig.* 68) le cone BSA ſcalene, pénetré par le cylindre droit DE*ed*, dont l'axe *x*X eſt en partie commun avec l'axe SC du cone. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par ces axes, qui fera deux ſections différentes; ſçavoir, un triangle BSA dans le cone, & un parallelogramme DE*de* dans le cylindre, qui ſe couperont aux points *b* & a; on reconnoîtra que ces deux points ſont communs aux deux ſurfaces, par conſéquent à la circonférence de la ſection. On ſuppoſera enſuite un ſecond plan perpendiculaire au premier, paſſant par *h*a, lequel fera deux ſections différentes; ſçavoir, un cercle dans le cone ſcalene, parce que nous avons démontré que *b*a étoit parallele à la baſe BA (au Theorême précédent) & une ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement, leſquelles figures ſoient repréſentées par leurs moitiés *bg*a, demi-cercle & *bf*a demi-ellipſe, ayant pris un point P à volonté ſur le diametre commun *b*a, on abaiſſera une perpendiculaire P*g* ſur ce diametre, laquelle coupant le cercle & l'ellipſe, donnera les ordonnées de l'un & de l'autre, P*g* pour le cercle, & P*f* pour l'ellipſe. Du même point P ayant mené au ſommet du cone S la ligne PS, & ſur cette ligne une perpendiculaire. PF égale à P*f*; on prendra PF égale à P*f*; par le point F qui appartient à l'ellipſe, on fera paſſer une parallele à *x*X pour repréſenter un côté du cylindre, &

par les points G & S une ligne GS, qui repréſentera le côté du cone, & coupera celui du cylindre en *y*, où ſera un des points de la ſection des deux ſurfaces ; par ce point *y* on menera une parallele *yv* à PG, & une autre *yz* à PS : cette préparation étant faite. Pl. 6. Fig. 68.

A cauſe des triangles ſemblables GSP & G*yz* on aura SP : PG : : *yz* : *z*G, c'eſt-à-dire la diſtance du ſommet du cone eſt à l'ordonnée de l'ellipſe, comme la profondeur ou diſtance de la ſection ſolide à cette ordonnée, eſt à la différence des ordonnées du cercle & de la ſection ſolide ; donc cette ſection eſt une *ellipſoïdimbre*, par la quatrieme définition.

Et parce que *y* V eſt parallele à PG, le point V qui eſt dans le plan paſſant par les axes, & les *points b* & *a* ſeront à l'axe courbe *b* V a de l'ellipſoïdimbre. Art. 83.

Quelque point P que l'on prenne dans l'axe, on aura toujours la même conſtruction & la même analogie ; puiſque le plan *b* a étant perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes, toutes les lignes menées du ſommet du cone à la ligne *b* a ſeront perpendiculaires aux ordonnées des ſections de la circulaire *b g* a & de l'ellipſe *b f* a, & parce que les intervalles de ces deux courbes ſont toujours inégaux, les points *y* ſeront toujours inégalement éloignés du plan paſſant par *b* a, où ſont les ordonnées du cercle, qui eſt la ſection conique, de ſorte que le point *y* ſe rejoindra en *b* & en a, ſi les points P ſont pris en *b* & en a.

Application à l'uſage.

144. Cette propoſition fait voir que ſi l'*arc-droit* d'un berceau ou d'une porte eſt en plein ceintre, & qu'on lui faſſe une lunette ou un ébraſement en biais auſſi en plein ceintre, l'arrête d'enfourchement de l'ébraſement & du berceau ſera une courbe à double courbure, de ſorte que les *aplombs*, c'eſt-à-dire les verticales, tirés de pluſieurs de ſes points, ne tomberont pas ſur une ligne droite. La même choſe arrivera, mais en ſens contraire, ſi l'ébraſement eſt ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, & le biais du berceau en plein ceintre par tête.

THEOREME XXIV.

La section faite par la pénétration d'un cylindre & d'un cone, dont les axes se coupent obliquement, peut être dans un seul cas (exposé ci-après) une ellipse plane.

Fig. 69. Soit (*Fig.* 69) le triangle BSA, la section d'un cone par son axe SC, dont la base BA est indéfiniment prolongée vers D.

Soit EL le diametre de la section elliptique, faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe SC, lequel soit prolongé jusqu'à la rencontre de la base en F, ayant mené par le sommet S la ligne SD parallele à EL, qui rencontrera la même base prolongée en D, si l'on fait D x moyenne proportionelle entre BD & AD, & qu'on la place de D en x, sur le diametre de la base, le point x donnera la position du pied d'une ligne parallele à l'axe d'un cylindre, laquelle passant par le sommet du cone S, déterminera celle des côtés par les points E & L, en lui menant les paralleles Gg, Kk, je dis que la section faite par le plan passant par EL, perpendiculaire à celui qui passera par les axes du cone & du cylindre, sera l'ellipse ERLr, dont EL sera le grand axe, & que cette section plane sera commune aux deux corps.

Pour le démontrer, soit pris sur le grand axe EL un point P à volonté, par lequel ayant mené bi parallele à la base BA, qui coupera le cone aux points b & a, & le cylindre aux points g & i, sur les lignes ba & gi, comme diametres, on déccrira deux demi-cercles boa, goi, qui représenteront les sections faites dans le cone & dans le cylindre, par un plan passant par P perpendiculairement au triangle par l'angle BSA.

Si du point P on éleve une perpendiculaire PO, qui coupe le cercle du cone en R & celui du cylindre en O, on démontrera que cette ligne est une ordonnée commune aux deux cercles & à l'ellipse ERLr ; car dans le cone, à cause des triangles semblables EPb, SDB, aPL, LAF & SAD, on aura les analogies suivantes ; $\left.\begin{matrix} EP : Pb :: SD : DB \\ PL : Pa :: SD : DA \end{matrix}\right\}$ donc $EP \times PL : Pb \times Pa = \overline{PR}^2 :: \overline{SD}^2 : DB \times DA$. Dans le cylindre, à cause des triangles semblables EPg, iPL, SDx, on aura encore

les analogies ſuivantes; $\left.\begin{array}{l} EP : Pg :: SD : Dx \\ PL : Pi :: SD : Dx \end{array}\right\}$ donc $EP \times PL$ Pl. 6. Fig. 69.

$: Pg \times Pi = \overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2 : \overline{Dx}^2$, ou ce qui eſt la même choſe à $DB \times DA$. Donc les lignes PO & PR ont même rapport aux lignes PE, PL; donc elles ſont égales & ſe confondent en une terminée en P & en O ou R, qui deviennent un même point; & puiſqu'on peut prouver la même choſe de tous les points P pris à volonté, il ſuit que l'ellipſe du cylindre eſt la même que celle du cone, puiſque les ordonnées à l'axe EL feront toujours communes; donc la ſection d'un cone & d'un cylindre dont les axes ſe coupent obliquement, peut être une ellipſe plane, *ce qu'il falloit démontrer.*

Hors de ce cas la ſection faite par la pénétration de ces corps ne peut être une figure plane, comme nous le démontrerons dans la ſuite.

COROLLAIRE.

145. Il ſuit de cette propoſition qu'un cone BSA étant donné, & une ellipſe ERLr dans ce cône, il eſt facile de trouver le cylindre qui a pour ſection la même ellipſe; puiſqu'ayant trouvé une troiſieme proportionnelle aux lignes BD & DA, on aura ſur la baſe du cone un point x, lequel avec le ſommet S détermine la poſition de l'axe du cone, & les points E & L celle des côtés.

Nous donnerons l'inverſe dans les Problêmes, c'eſt-à-dire, la maniere de trouver le cone auquel convient l'ellipſe de la ſection d'un cylindre donné.

Application à l'uſage.

146. Cette propoſition fait voir qu'il faut examiner quelle eſt la poſition du cylindre dans le cone, lorſque les axes ſe coupent obliquement, pour reconnoître ſi la ſection eſt plane ou ſolide, comme elle eſt preſque toujours. Et dans la pratique elle peut être appliquée à la conſtruction d'une arriere-vouſſure conique ou ébraſement biais, rachetant un ceintre ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, dont la direction du milieu ſe croiſe avec celle de l'ébraſement.

THEOREME XXV.

La section faite par la rencontre des surfaces d'un cone & d'un cylindre qui le pénetre, ensorte que les axes de ces deux corps se croisent, ou soient paralleles entr'eux, est une ellipsimbre.

Ce Theorême renferme deux cas, & les comprendroit tous en le joignant aux précédens, s'il comprenoit celui où les axes ne se rencontrent pas & ne sont point paralleles ; mais il est si composé que nous le laissons à la recherche de quelque bon Mathématicien. Cependant quoique ce défaut rende notre théorie un peu imparfaite, la pratique ne s'en ressentira pas, parce que nous trouverons une maniere Géométrique de trouver autant de points qu'on voudra de la courbe de cette section, quoiqu'elle nous soit inconnue en général, on ne perd en cela qu'une formule générale d'Algebre qui embrasse tous les cas.

Premier cas, où les axes se coupent perpendiculairement ou obliquement.

Fig. 70. Soit (*Fig.* 70) ASB le triangle par l'axe du cone, & IGHK le parallelogramme par l'axe du cylindre, ou un autre plan CDFS passant par l'axe SC du cone, & par celui du cylindre *x*X, ce dernier plan coupera la surface du cone suivant une ligne droite SP suivant laquelle un troisieme plan perpendiculaire au plan CF sera supposé couper le cylindre & toucher le cone, de sorte qu'il ne fera qu'une section dans un des corps ; sçavoir, une ellipse dans le cylindre, qu'il coupe obliquement en E*m*LM, dont EL sera le grand axe, lequel est dans la ligne SP à la surface du cone, auquel cette ellipse étant tangente, sera toute au-dehors.

Si par les points M & *m*, N & *n*, pris à volonté sur la circonférence de cette ellipse, on mene des lignes QM, *q*N paralleles à l'axe du cylindre *x*X, prolongées jusqu'à la rencontre de la surface du cone, aux points Y & *y*, ces points seront à la circonférence de la section solide, aussi-bien que les points E & L, de sorte que la ligne E*y*YL sera au contour de la section solide ; & si par les mêmes points M & N, ou ceux qu'ils ont

produit à la base du cylindre Q R, *qr*, on mene des ordonnées au diametre GH, ou EL, par lesquelles on suppose des plans YR, *yr*, qui coupent le cylindre & le cone, ils feront deux sections différentes; sçavoir, des parallelogrammes *yr* & YR, dans le cylindre, & des cercles ou des ellipses dans le cône, dont YTV & *ytu* seront des arcs; mais parce que les ordonnées M*m* & N*n* sont tangentes à ces courbes, que les points M & *m* sont également éloignés du point d'attouchement T & *t*, de même que N & *n*, & que les lignes YM, *y*N, qui sont les côtés du cylindre, sont paralleles entr'elles; il suit que les ordonnées de la section solide YV & *yu* sont paralleles & égales aux ordonnées à l'axe EL de l'ellipse plane EML*m*, donc la courbe EYLV est une ellipsimbre, *ce qu'il falloit demontrer*.

Second cas, où les axes sont paralleles entr'eux.

Soit ASB le triangle par l'axe du cone, & un plan SFPC passant par l'axe X*x* du cylindre GH, ce plan fera deux sections différentes; sçavoir, un parallelogramme GH*hg* dans le cylindre, & un triangle aSP dans le cone, dont SP sera un côté, & par conséquent à sa surface. Si l'on suppose un troisieme plan qui lui soit perpendiculaire & tangent au cone, suivant la même ligne SP, il fera par sa section dans le cylindre une ellipse EML*m*, dont l'axe EL sera partie de cette ligne SP, laquelle ellipse sera toute hors du cone & dans le cylindre. Si ensuite on prend à la circonférence des points M & N à volonté, & que par ces points on mene des paralleles à l'axe *x*X, comme MY, N*y*; elles rencontreront la surface du cone en quelques points Y & *y*, qui seront à la circonférence de la section solide, puisqu'ils sont communs à la surface du cone & à celle du cylindre, dont ces lignes sont les côtés; donc la ligne courbe E*y*YL est celle de la section solide. Fig. 71.

Il reste à démontrer que les ordonnées à l'axe courbe de cette courbe seront égales à celles de l'ellipse à l'axe EL, ce qui est facile par l'application de la démonstration précédente, dont celle-ci n'est qu'une répetition; car les plans paralleles à l'axe du cylindre passant par les ordonnées de l'ellipse plane M*m*, N*n* font un parallelogramme dans le cylindre, & des hyperboles semblables dans le cone, dont les arcs YTV & *ytu* sont touchés aux points T & *t* par les ordonnées de l'ellipse plane

M *m* & N *n*, & les points M & *m*, N & *n*, également diſtants des points T & *t*; donc, par l'Article 39, les lignes MY, *m* V coupent l'hyperbole à des diſtances égales de la tangente MT *m*; par conſéquent les lignes YV, & *y u* ſont paralleles aux lignes M *m* & N *n*, & elles leur ſont égales, puiſqu'elles ſont entre mêmes paralleles, qui ſont les côtés du cylindre MY, *m* V; donc la ſection eſt une ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

147. Quant au troiſieme cas où les axes ne ſont pas paralleles & ne ſe coupent pas; quoique nous ne déterminions pas la figure qui réſulte de la rencontre des ſurfaces du cone & du cylindre par un Theorême général, nous donnerons dans les problêmes la maniere de trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe, en coupant le cone & le cylindre par des plans paralleles entr'eux; mais parce que l'inclinaiſon de ces plans peut changer quatre fois la courbe de la ſection du cone, & deux fois celle du cylindre, la rencontre des ſurfaces des deux corps ſera dans l'interſection de différentes ſections; quelquefois d'une parabole & d'une ellipſe, d'une hyperbole & d'un cercle, de deux ellipſes ou de deux cercles, de ſorte que la combinaiſon de ſes ſections devient fort compoſée, d'où réſulte une ſi grande variété, que je laiſſe à quelque Sçavant l'invention d'une formule algébrique, qui donne la ſolution de tous les cas de cette propoſition.

COROLLAIRE.

148. Il ſuit de la pénétration du cylindre dans le cone, que lorſque leurs axes ſont perpendiculaires entr'eux les ſections oppoſées ſont égales, & que lorſqu ils ſont obliques, elles ſont inégales. Celle qui eſt plus près du ſommet du cone eſt la plus petite, & ſon oppoſée la plus près de la baſe, la plus grande; cette obſervation eſt encore vraie, lorſque les axes ne ſe coupent pas, & qu'ils ne ſont pas paralleles.

Application à l'uſage.

149. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une voute en canoniere, percée de lunettes en berceau, comme il peut arriver au grand eſcalier du Vatican à Rome, ou celle d'un ébraſement fait au bout d'un berceau

ceau dont la naissance ne feroit pas de niveau avec celle du plein ceintre de l'ébrasement.

THEOREME XXVI.

La section faite par la pénétration d'un cone dans un cylindre est une ellipsoïdimbre.

Un cone peut pénétrer un cylindre de six manieres.

1°. Lorsque l'axe du cone coupe perpendiculairement celui du cylindre.

2°. Lorsqu'il le coupe obliquement.

3°. Lorsque l'axe du cone ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement sur son côté, & entre dans le cylindre de toute la circonférence de son contour.

4°. Lorsque dans les mêmes circonstances, son axe tombe obliquement sur les côtés du cylindre.

5°. Lorsqu'il ne pénetre le cylindre que d'une partie de sa circonférence, & que son axe tombe perpendiculairement sur le côté du cylindre.

6°. Enfin lorsqu'il n'y a qu'une partie de son contour qui entre dans le cylindre obliquement.

Dans tous ces cas la section est une ellipsoïdimbre de même espece, que celle dont nous avons parlé ci-devant au Theorême XXIII.

Pour le premier & second cas. Soit un cylindre D*d*F*f* (*Fig.* 72) pénetré par un cone BAS, dont l'axe CS coupe celui du cylindre KX perpendiculairement ou obliquement. Si l'on suppose un plan passant par ces deux axes, il coupera le cylindre suivant une ligne droite EL, dont les points E, L seront communs aux deux surfaces, étant à l'intersection du triangle par l'axe fait dans le cone, & du parallelogramme par l'axe du cylindre, à la surface duquel sera la ligne EL. Si l'on suppose un second plan tangent au cylindre suivant la ligne EL, que nous supposons oblique à l'axe CS, ce plan fera dans le cone une section elliptique, dont EL sera le grand axe; si ensuite l'on prend à sa circonférence autant de points que l'on voudra à volonté, comme M*m*, N*n*, par lesquels on mene des lignes droites au sommet S du cone, ces lignes rencontreront la surface du cylindre en quelques points Y & *y*, lesquels seront com- *Fig.* 72.

PL. 6. Fig. 72. muns aux deux ſurfaces, puiſqu'ils ſont à l'interſection des côtés du cone & du cylindre; donc la courbe E*y*Y L eſt celle de la ſection ſolide.

Si par les mêmes points M & N on tire des ordonnées à l'axe EL, elles toucheront le cylindre aux points T & *t*, & feront perpendiculaires aux lignes TS, *t* S, & les plans qui paſſeront par ces ordonnées feront dans le cone des triangles SM *m*, SN *n*, & des cercles ou des ellipſes dans le cylindre dont YTV, & *ytu* feront des arcs, & les ordonnées YV & *yu* de la ſection ſolide, feront leurs cordes. Il eſt viſible qu'à la ſection ſolide la plus près de la baſe, ces cordes feront plus petites que les ordonnés de l'ellipſe M*m* & N*n*, puiſque les lignes MV, N*u*, *m*Y, *ny* ſont convergentes, en ce qu'elles tendent toutes au ſommet S; or ſi l'on prend leur différence en tirant les lignes *h*Y, HV, & *yo* paralleles à l'axe CS, on aura des triangles ſemblables ST *m*, Y*hm*, & S*tn*, *yon*, dans leſquels on aura les analogies ſuivantes ST : T *m* : : Y *h* : *hm*, & S*t* : *tn* : : *yo* : *on*; c'eſt-à-dire, que la diſtance du ſommet du cone à l'ordonnée de l'ellipſe plane eſt à cette ordonnée, comme la profondeur de la ſection ou diſtance à l'ordonnée de l'ellipſe plane, eſt à la différence de cette ordonnée avec celle de la ſection ſolide; donc * la courbe E*y*Y L eſt une ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer*.

* Art. 79.

150. Il paroît inutile de répeter ici ce que nous avons dit de pareilles ſections, que les oppoſées avoient leur axe courbe tourné en ſens contraire, de ſorte que ſi dans l'une la différence des ordonnées de la ſection ſolide & de l'ellipſe plane eſt un excès, dans l'autre elle ſera un défaut, ſans que le rapport des analogies ſoit changé pour cela.

On ſçait encore que le même rapport de cette différence ne peut être appliqué à toutes les ordonnées, mais chacune d'entr'elles a un rapport différent à la correſpondante, car il eſt clair que le rapport de *on* à *tn* eſt bien plus petit que celui de *hm* à T *m*; la raiſon eſt que ſi les axes du cone & du cylindre ſe coupent à angle droit, les triangles S*tn*, ST *m* ſont de même hauteur, ayant leurs ſommets en S & leurs baſes inégales, *tn* étant plus petit que T *m*, & ſi les axes ſe coupent obliquement, ces différences de rapport ſubſiſteront encore, comme nous l'avons démontré au Theorême XXV, ce qui comprend le ſecond cas.

151. Dans le troisieme cas de cette proposition, si l'axe du cone ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement sur son côté, c'est-à-dire sur une ligne prise à la surface du cylindre parallele à son axe ; je dis que la courbe est encore la même.

Soit (*Fig.* 73) le triangle *b* S a, qui pénetre le cylindre G *g d* D, dont l'axe SC ne rencontre pas celui du cylindre KX, comme on le voit par le profil où S^2 C^2 ne passe pas par le centre *x* du cercle 2 *e l*, mais qui tombe perpendiculairement sur le côté du cone, comme si ST est perpendiculaire sur HI : si l'on imagine un plan SEL, coupant l'axe du cylindre perpendiculairement à la ligne HI, les points E & L, qui sont à l'intersection des côtés du cylindre Q*q*, R*r*, & de ceux du cone SE, SL, seront communs aux deux surfaces, & par conséquent à la circonférence de la section solide. Si ensuite on suppose un second plan passant par ces deux points parallelement à l'axe KX du cylindre, il fera deux sections, l'une dans le cylindre, qui sera un parallelogramme QR*rq*, & une ellipse EML*m* dans le cone qu'il coupe obliquement, parce que l'axe SC du cone ne passe pas par le centre du cercle, qui est la section faite dans le cylindre par le plan ESL, où il faut remarquer que dans la figure on a représenté ce plan en perspective, ensorte qu'il n'est pas perpendiculaire à HI ; pour éviter la confusion des lignes, & faire voir l'arc ETL partie de ce cercle, qui auroit été confondu en une ligne droite. *Fig.* 73.

Si suivant notre méthode on mene des ordonnées M*m*, N*n*, à l'axe EL de l'ellipse, & que par les points de sa circonférence MN, *mn*, qui sont dans le cylindre, on tire des lignes au sommet du cone S, ces lignes seront à sa surface & couperont celle du cylindre (au-dessous de laquelle les points MN, *mn* sont enfoncés) en quelques points comme *y*Y, V & *u*, lesquels seront à la circonférence de la section solide, comme il est évident, puisqu'ils sont à l'intersection des côtés du cone & de ceux du cylindre ; donc la ligne qui passera par les points E*y*YLV*u* sera la courbe de la circonférence de la section solide.

Maintenant pour trouver le rapport des ordonnées de cette section avec celles de l'ellipse plane EML*m*, qui est la section oblique du cone par un plan, il n'y a qu'à mener des paralleles aux lignes SP & S*p* par les points Y & *y*, lesquelles retranche- *Fig.* [illegible]

Pl. 6. Fig. 59, & Fig. 72. ront des ordonnées de l'ellipse les différences M h, N o de leurs excès sur celle de la section solide Y x, yz, & donneront les analogies suivantes, à cause des triangles semblables SPM, Y hM & SpN, yoN, qu'on a répetés à côté de la figure, pour éviter la confusion des lignes SP : PM : : Y h : hM ; & Sp : pN : : y o : oN ; donc la courbe EyYL est une ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

152. On voit ici que la différence des ordonnées de la section solide à l'ellipse est en défaut, comme on a vû dans les exemples des sections précédentes, dans la partie la plus près de la base (*Fig.* 72) ce qui semble se contrarier, puisque les sections opposées sont tournées en sens contraire ; mais il faut remarquer que dans le cas précédent les points E & L sont considérés posés suivant la longueur du cylindre, ensorte que le plan passant par la ligne EL est tangent, par conséquent au dehors du cylindre, & de la section solide ; & qu'ici au contraire le plan passant par EL coupe le cylindre, & se trouve au-dedans de la section, comme l'on voit au profil à côté de la figure en e l qui est la corde de l'arc eT l, de sorte que l'ellipse plane à laquelle on la compare, étant différemment située, il n'est pas étonnant qu'elle donne des analogies de défaut, quoique la section soit plus près du sommet, où elle donneroit de l'excès si on l'avoit située comme à la Figure 72, en examinant la section qui passeroit par eT l du profil. Au reste les rapports sont toujours les mêmes dans chaque plan passant par les ordonnées des deux sections & le sommet du cone. La distance de ce sommet à l'ordonnée de la section plane est toujours à cette ordonnée, comme la profondeur de la section solide est à la différence des ordonnées des deux sections par excès ou par défaut.

Il est aisé de voir les différences qui peuvent arriver à ces courbes dans les cones scalenes, où les sections planes que nous avons considéré comme des ellipses, peuvent être des cercles.

153. *Quatrieme cas,* où l'axe du cone tombe obliquement sur les côtés du cylindre ; il n'y aura aucune différence de section, toute celle qui en peut résulter, c'est qu'il peut arriver que les diametres EL & Mm deviennent égaux, & que la section soit une espece de cicloïmbre altéré, pour lequel nous n'avons pas fixé de nom.

154. Enfin au cinquieme & au sixieme cas, si l'axe du cone tombe perpendiculairement ou obliquement sur le côté du cylindre, & que le cone ne le pénetre que d'une partie de sa circonférence, la section sera composée de deux portions de courbes, l'une plus grande que l'autre; parce que celle qui approchera du sommet sera plus petite que celle qui sera plus près de la base, comme nous l'avons déja remarqué, & ces courbes feront entr'elles deux angles d'inflexion plus ou moins rentrants, selon que la pénétration du cone dans le cylindre sera plus ou moins profonde; car si un de ces côtés touche celui du cylindre, elles seront toutes les deux fermées & se toucheront en un point, comme nous l'avons dit de toutes les autres sections composées, ce qui ne mérite pas de repétition, avec cette différence que celles-ci ne peuvent pas être égales, quand même les deux côtés du triangle par l'axe du cone toucheroient le cylindre. Et si enfin ces deux côtés du cone s'élargissent, de sorte qu'ils soient tous les deux hors du cylindre, la section change de nature, & retombe dans le cas du Theorême précédent, où le cone embrasse le cylindre; car il s'agit alors de considérer la pénétration du cylindre dans le cone, & non pas celle du cone dans le cylindre, dont nous avons fait la distinction au commencement de ce Chapitre.

Application à l'usage.

155. Cette proposition fait connoître quelle est la courbe de l'arrête d'enfourchement de toutes sortes de lunettes ébrasées dans des berceaux, soit qu'elles ayent leurs naissances de niveau avec celle du berceau, & qu'elles soient droites, comme au premier cas, soit qu'elles soient biaises, comme au second; soit que leurs naissances soient au-dessus ou au-dessous de celle du berceau, comme dans le troisieme & quatrieme cas, ce qui peut souvent arriver; soit enfin que la lunette fût prise en maniere d'abajour en partie hors du berceau, ce qui ne peut guere arriver, à moins qu'on ne voulut le faire exprès par caprice, ou au bout d'un berceau, comme on en voit aux souterrains des nouvelles fortifications de Manheim dans le Palatinat.

La Figure 74 fait voir l'effet du cone qui embrasse le cylindre, ensorte que les deux sections se rapprochent, tellement que si le cylindre s'écartoit encore un peu plus du milieu du *Fig. 74.*

cone, elles n'en feroient plus qu'une composée.

CHAPITRE VII.

Des sections faites par la pénétration des cones entr'eux.

UN cone peut être à l'égard d'un autre cone, de différente grandeur & en différente position ; d'où résultent les cas qui changent la nature des sections formées à leurs surfaces, par leur pénétration mutuelle.

La combinaison de leur situation respective peut beaucoup plus varier que celle des cylindres entr'eux, qui sont des corps plus simples, & dont les sections ne peuvent être que de trois especes ; celles des cones au contraire peuvent être de cinq especes, qui donnent neuf combinaisons, rejettant les inutiles. Je ne doute pas cependant qu'on ne puisse trouver une formule générale, qui comprendroit tous les cas des sections solides, qui peuvent se faire par la pénétration des cones entr'eux, dans quelque situation que soient leurs axes & leurs côtés, les uns à l'égard des autres: il seroit à souhaiter que quelque Sçavant Algébriste voulut y travailler. Le célebre M. Bernoulli de Bâle, qui a bien voulu jetter les yeux sur ce petit Ouvrage, & me donner des instructions sur la courbe de la section de l'anneau, m'a dit que le calcul pour la formule générale de l'intersection des cones étoit plus long que difficile ; pour moi qui le trouve au-dessus de mes forces, je me contenterai de ce que la Géométrie linéaire pourra nous indiquer suivant notre méthode ordinaire, de la supposition des plans coupans ces corps de différentes façons, & comparant les sections planes aux solides ; & quoique je n'en approfondisse pas la Théorie, je fournirai les moyens nécessaires à la pratique pour en trouver les courbes par celui de la projection, ce qui suffit au projet de cet Ouvrage, où l'on s'est borné aux connoissances qui doivent être de quelque usage dans l'Architecture. Je puis aussi dire que les rencontres des voutes coniques entr'elles sont des cas assez rares, comme on le verra au quatrieme Livre ; cependant nous ne laisserons rien à désirer de ce qui peut tomber en pratique, quoique nous ne puissions donner ici une Théorie complete sur

cette matiere ; quelque Sçavant pourra peut-être suppléer à ce qui manque ici à la curiosité.

THEOREME XXVII.

Les sections faites par la pénétration de deux cones égaux, dont les axes (s'ils sont droits) ou les côtés semblables (s'il sont scalenes) se coupent à distances égales de leur sommet, sont des sections planes.

Ce Theorême contient sept combinaisons de position de cones, qui se pénetrent lorsqu'ils ont l'axe commun & qu'ils sont tournés en sens contraire.

1°. Lorsque leurs axes se confondent & qu'ils sont tournés en sens contraire, comme à la Fig. 83. *Fig. 83.*

2°. Lorsque les cones sont droits & leurs axes paralleles entr'eux. *Fig. 75.*

3°. Lorsque leurs axes sont inclinés entr'eux, & qu'étant prolongés ils se rencontrent au-delà des sommets. *Fig. 76.*

4°. Lorsqu'étant inclinés ils se croisent au-dessous des sommets, & que les côtés opposés sont paralleles entr'eux. *Fig. 77.*

5°. Lorsqu'ils se croisent au-dessous des sommets, & que les quatre côtés se coupent. *Fig. 78.*

6°. Lorsque les cones étant scalenes, les côtés semblables & opposés sont parallelles entr'eux, mais tournés en sens contraire, le sommet de l'un du côté de la base de l'autre. *Fig. 79.*

7°. Lorsqu'étant aussi scalenes ils sont tournés en sens contraire, seulement à l'égard de la base, & qu'ils ont un axe commun. *Fig. 80.*

Au deuxieme & troisieme cas la section HD est une hyperbole ; au quatrieme, PR, une parabole ; au cinquieme, EL, & au sixieme, *b*B, une ellipse ; & au septieme, SD*d*, un triangle isoscele.

DÉMONSTRATION.

Si l'on suppose un plan passant par les axes des deux cones, il sera, par la supposition, deux triangles semblables & égaux ASB, a*sb* ; & si un second plan perpendiculaire à celui-ci, le coupe par le point H d'intersection des côtés SB, *s*a, & des axes CX, *c*X en X, ou parallelement aux axes, s'ils sont par- *Fig. 76.*

Fig. 75 & 76. raleles entr'eux, comme la Figure 75; il eſt clair qu'il retranchera des ſegmens de cercles égaux DE a, DE *b*, dans chaque baſe du cone, puiſque les abſciſſes D a, D *b*, qui ſont les fleches des arcs, ſont égales par la ſuppoſition; mais auſſi il retranchera des ſegmens de cone DH a, DHB, qui ſeront de même hauteur & inclinaiſon ſur ces portions de baſe, puiſqu'il les coupe à diſtances égales des ſommets S & *s* par la ſuppoſition; donc tous les arcs de ces ſegments de cone paralleles à ceux de la baſe comme *f* G, FG, ſeront encore égaux entr'eux, parce qu'ils ſeront coupés en même raiſon dans chaque cone à même diſtance de la baſe; donc ils n'avanceront pas plus d'un côté que de l'autre, & par conſéquent aboutiront au même plan, qui fera deux ſections égales, une à droite dans un cone, & une à gauche dans l'autre, ou pour mieux dire une ſection équivalente à deux.

Quant à la figure de la ſection, il eſt viſible qu'elle ſera déterminée par la poſition du plan coupant perpendiculairement les triangles par les axes, comme s'il n'y avoit qu'un ſeul cone, puiſque ſa poſition à l'égard de l'autre eſt ſuppoſée égale.

Application à l'uſage.

Fig. 75. 76 & 77. Cette propoſition conſidérée, 1°. au ſecond & troiſieme cas, fait voir quelles ſont les arrêtes de rencontre des creneaux paralleles, convergens & divergens, joints enſemble dans une ſeule ouverture intérieure, comme on en voit en pluſieurs vieux Châteaux, & dans les Fortifications modernes aux redoutes de Fig. 78. Luxembourg & ailleurs. 2°. Au quatrieme & cinquieme cas des cones égaux, dont les axes & les côtés ſe croiſent, on voit quelle eſt la courbe qui ſe forme à l'angle rentrant des enfourchemens des voutes ſphériques fermées en polygones, à leurs diagonales dans la méthode du *trait*, qui ſuppoſe des cones tronqués, inſcrits dans la ſphere, pour y former des panneaux de développement, comme on le verra au Chapitre ſeptieme du quatrieme Livre, où nous ferons voir en quoi conſiſte l'erreur du trait du P. Derand & du P. Deſchalles qui l'a ſuivi, & que M. de la Rue qui l'a connu à peu près n'en a pas apperçû Fig. 79. la raiſon. 3°. Au ſixiéme cas, cette propoſition fait voir quelle ſeroit la courbe d'arrête d'enfourchement d'une *corne de vache double* exactement faite, comme ſi ſes piédroits étoient ceux d'un biais paſſé.

4°.

4°. Au ſeptieme cas elle fait voir que les trompes coniques que tous les Auteurs de la coupe des pierres mettent aux angles des eſcaliers ſuſpendus à repos, ſont un compoſé de deux cones, qui font un *jarret* à la clef en angle ſaillant ; car la ſection par les points A & a, faite par un plan perpendiculaire aux deux triangles par l'axe commun SX, fait deux ellipſes, l'une AC dans le cone ſcalene ASB, l'autre a *c* dans l'autre cone égal S a *b*, leſquelles ſe croiſent en *m* ou en *i* entre les deux axes *c* H & C *h*, de ſorte que cette ſection eſt une courbe compoſée, telle qu'elle eſt repréſentée en A H *i h* a, & en projection par la droite A *c m* C a. Fig. 80.

THEOREME XXVIII.

La ſection faite par la penétration des cones droits inégaux, dont les axes ſe confondent, ou des cones ſcalenes inégaux, dont les axes ſe confondent, & ſont également inclinés à leurs baſes, eſt un cercle.

La vérité de cette propoſition ſe préſente d'elle-même, & n'a pas beſoin de demonſtration ; car les ſections planes, paralleles à la baſe par les points communs EF & D *d*, *d d*, ſont des cercles communs aux deux cones, ſoit que les baſes ſoient confondues, comme aux Figures 81, 82, ou parallelement éloignées, comme aux Figures 83 & 84. Fig. 81. 82, 83 & 84.

THEOREME XXIX.

La ſection faite par la pénétration de deux cones inégaux, mais ſemblables, dont les axes & les côtés ſont paralleles entr'eux, eſt un paraboloïdimbre.

Soit (*Fig.* 85) le triangle A *s* D la ſection par l'axe du petit cone, & BSE celui du grand, & le point P commun aux deux ſurfaces des cones. Si on ſuppoſe un plan qui coupe le premier A *s* D perpendiculairement, ſuivant le côté BS, parallele à A *s*, il touchera le grand cone, & fera dans le petit une parabole qu'on repréſente ici par la courbe P *r* R L, dont l'axe ſera PB, auquel ſi l'on tire à volonté les ordonnées *o r*, OR, & par le ſommet *s* les droites *s r z* & *ſ* R *y*, ces lignes qui ſeront les côtez du petit cone étant prolongées, rencontreront la ſurface du grand BSE en quelques points *z* & *y*, par leſquels on menera des paralleles *z x* & *y* X aux ordonnées *o r* & OR, juſqu'à la rencontre des lignes *s x*, *s* X, tirées du ſommet *s* par Fig. 85.

les points *o* & O, & enfin par les mêmes points *r* & R d'autres lignes *rq*, RQ, paralleles à ces mêmes lignes *sx*, *s* X, on aura des triangles semblables *rqz* & *sor*, RQ*y* & *s* OR; par conséquent les mêmes analogies à l'égard de la parabole plane, qu'on a eu dans les Theorêmes XXIII & XXV, à l'égard de l'ellipse; sçavoir, la distance du sommet du cone à l'ordonnée de la section plane est à cette même ordonnée, comme la distance à celle de la section, est à la différence des deux sections; *so* : *or* : : *rq* : *qz*, & *s* O : OR : : RQ : Q*y*; donc la section (par la def. 4.) est un paraboloïdimbre; *ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXX.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cones qui se pénetrent, dont les axes sont paralleles, & dont l'un des côtés d'un des triangles par l'axe rencontre celui de l'autre (prolongé s'il le faut) est une ellipsoïdimbre.

Fig. 86. Soit (*Fig.* 86) les triangles B *s* A & *b* S a, la section faite par un plan passant par les axes de deux cones qui se pénetrent, dont les points E & L sont communs aux deux surfaces. Si l'on suppose un plan passant par EL perpendiculairement au premier, il touchera le cone B *s* A, & fera une ellipse dans l'autre *b* S a, qu'il coupe obliquement suivant la ligne EL qui en sera le grand axe, auquel ayant mené des ordonnées *or* & OR à volonté, on tirera par le point S des lignes S *r* & SR, jusqu'à la rencontre de la surface du cone B *s* A en *z* & en *y*, ces points seront à la circonférence de la section solide, laquelle sera la courbe E *zy* L; or faisant, comme au Theorême précédent *zx*, parallele à *ro*, & *y* X parallele à RO jusqu'à la rencontre des lignes S *o*, SO, tirées du sommet du cone, & prolongées vers *x* & X, & tirant ensuite des mêmes points *r* & R des lignes *rq* & RQ paralleles aux lignes S *x* & SX, on aura les mêmes analogies à l'égard des ordonnées de l'ellipse, qu'on a eu dans la proposition précédente à l'égard de la parabole; sçavoir, S *o* : *or* : : *rq* : *qz*, & SO : OR : RQ : Q*y*; donc la section solide est une ellipsoïdimbre; *ce qu'il falloit démontrer.*

Nous avons ajouté à l'énoncé de la proposition, que le côté d'un des triangles par l'axe d'un cone devoit couper celui de l'autre, prolongé (s'il le faut), parce qu'il peut arriver, comme à la Fig. 89, que le côté *s* A du triangle B *s* A ne rencontre pas

le côté Sa de l'autre triangle, mais il le rencontrera ſi l'un & l'autre ſont prolongés vers L, parce que nous ſuppoſons qu'ils ſeront inclinés entr'eux, & non pas paralleles; de ſorte que la ſection ſera toujours la même. La ſeule différence qu'il y aura avec le cas précédent, c'eſt qu'elle ne ſera pas une ellipſoïdimbre complete, mais mutilée, qui ſera défaillante de toute la partie correſpondante à AL de l'axe ſouſtendant EL, laquelle eſt hors du cone.

REMARQUE.

156. Il faut remarquer que, quoique le plan que l'on feroit paſſer par la ligne SE perpendiculairement à celui des triangles par les axes *s*C, S*c*, doive faire une hyperbole dans le cône A*s*B, la ſection ne ſera pas pour cela une hyperboloïdimbre, parce que les côtés A*s* & aS étant divergens vers S, ſont convergens vers L; de ſorte qu'en prolongeant ces côtés, on revient toujours au premier cas de l'ellipſoïdimbre.

THEOREME XXXI.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces des deux cones, dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, enſorte que les côtés prolongés de l'un ou de l'autre, ne ſe rencontrent pas au-deſſus & au-deſſous du ſommet d'un d'entr'eux, eſt une ellipſoïdimbre.

La démonſtration de cette propoſition eſt tellement ſemblable à celle de la précédente, qu'on s'eſt contenté d'en mettre ici la figure, pour le cas où les axes ſe coupent perpendiculairement; & la Figure 88 pour celui où ils ſe coupent obliquement; en coupant les cones qui traverſent par des plans tangens aux cones qui ſont pénétrés, comme on a fait ci-devant, il ſera bien aiſé de voir les rapports des ordonnées de la ſection ſolide à celle de la ſection plane; & parce que, ſuivant les conditions du Theorême, ces ſections planes ne peuvent être que des ellipſes ſi les cones ſont droits, ou des cercles s'ils ſont ſcalenes, il ſuit que la ſection ſolide ſera une ellipſoïdimbre, ou eſpece de cicloïmbre élargi ou reſſerré, c'eſt-à-dire une courbe dont les ordonnées ont un excès ou un défaut ſur celles du cercle. Fig. 87. & 88.

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des ſections oppoſées; elles ſont ici comme ailleurs les mêmes, diſpo-

sées en sens contraire à l'égard du sommet, & l'une toujours plus petite que l'autre.

On verra par le Theorême suivant, la raison pour laquelle nous exceptons dans l'énoncé de celui-ci, le cas où les côtés prolongés se rencontrent.

THEOREME XXXII.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cones dont les axes se coupent obliquement, & dont un côté d'un des triangles par l'axe rencontre les deux de l'autre triangle qui est dans le même plan, ou un des côtés étant prolongé au-dessus de son sommet, est une hyperboloïdimbre dans l'un & l'autre cône.

Fig. 91. Soient (*Fig.* 91) les triangles BSA & DEF les sections d'un plan passant par les deux axes CS & *g* E, des cones qui se pénetrent dans une position respective, où le côté DE rencontre les deux du triangle BSA, l'un SA qu'il coupe naturellement en H, l'autre BS en *y*, parce qu'il est prolongé au-delà du point S en *y*; ou bien, où le côté SA du triangle BSA rencontre les deux DE, EF du triangle DEF; sçavoir, DE en H, & FE prolongé en X.

Si l'on suppose des plans perpendiculaires à celui qui passe par les axes SC, E*g*, & qui coupent les cones, l'un par HA, l'autre par HD, les sections qu'ils feront seront des hyperboles, dont HA & HD seront les axes, & HX, H*y* les axes déterminés, & les mêmes plans qui coupent un cone seront tangens de l'autre. Soit une moitié de ces hyperboles la courbe H*r*R, sur laquelle ayant pris le point *r* à volonté on menera l'ordonnée *r o* à l'axe HD, & par le même point *r* & le sommet S la ligne S*rz*, cette ligne rencontrera la surface de l'autre cone DEF en quelque point *z*, qui sera à la circonférence de la courbe de la section solide qui passera par le point H, commun aux deux surfaces, & par le point *z* qui leur est aussi commun, puisqu'il est la rencontre du côté du cone BSA avec la surface de l'autre DEF. Or parce que la ligne S*rz*, part du même point S, que la ligne SA, ces lignes s'écartent & sont divergentes, de sorte qu'on peut supposer, comme aux Theorêmes précédens, une ligne parallele à SA, & tirée du point *r*, jusqu'à la rencontre de la ligne *zx*, ce qu'on n'a pû faire bien nettement dans la figure pour éviter la confusion des lignes, mais qu'on peut Fig. 90. bien se représenter par la Figure 90 mise à côté, où *hx* repré-

fente HD, & l'on aura des triangles femblables *sor*; *rqz*; donc S*o* ou E*o* : *or* :: *rq* : *qz*; par conféquent la courbe qui paffera par *hz*, fur la furface des cones, fera une hyperboloïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Il en fera de même à l'égard de l'autre cone, & cette fection commune variera fuivant la différence des grandeurs refpectives des deux cones.

THEOREME XXXIII.

La fection faite par la rencontre des furfaces de deux cones dont les axes fe coupent obliquement, & dont un des côtés des triangles par l'axe eft parllele à un des côtés de l'autre triangle de la fection par l'axe de l'autre cone, eft une courbe équivalemment différente dans chaque cone; fçavoir, une hyperboloïdimbre dans l'un des cones, & une paraboloïdimbre dans l'autre, felon que l'un des deux cones furpaffe ou eft furpaffé par l'autre, dans l'allignement de ces côtés.

Soient (*Fig.* 92) les triangles BSA & DEF les fections de deux cones, coupés par un plan qui paffe par leurs axes *c*S, CE, lefquels étant prolongés vers K fe coupent obliquement. Soit auffi le côté DE parallele au côté BS; il faut démontrer que la courbe H*x*, qui eft faite par l'interfection des furfaces de ces deux cones, a des rapports d'excès & de défaut avec les fections planes faites par des plans tangens aux côtés des cones SA & DE, ce qui fe fera de la même maniere qu'à la propofition précédente; car le plan tangent par DE fera une parabole dans le cone BSA, & le plan tangent en SA fera une hyperbole dans le cone DEF, dont YH eft l'axe déterminé, & HI l'axe prolongé. Or fi l'on prend dans le contour de ces courbes différentes un point *r*, par lequel & par le fommet on tire une ligne S*rz*, qui rencontre la furface de l'autre cone en *z*, la courbe qui paffera par H & *z* fera celle de l'interfection des deux corps; mais du même point *z* menant au fommet E une ligne *z*E, cette ligne qui fera un côté du cone DE*f* paffera à la circonférence de l'hyperbole, dont HI eft l'axe & fon ordonnée, c'eft-à-dire la perpendiculaire menée du point *z* au plan paffant par les axes, aura un rapport d'excès ou de défaut avec cette hyperbole, qui fera proportionné à la profondeur

Fig. 92.

de la section solide, c'est-à-dire à la distance du plan de l'hyperbole, mesurée dans un plan passant par les ordonnées correspondantes & le sommet du cone; donc cette section sera une paraboloïdimbre, considérée comme étant dans le cone DEF, & une hyperboloïdimbre, considérée dans le cone BSA; *ce qu'il falloit démontrer.*

Il faut ici que l'imagination aide un peu à la Figure, qui ne peut bien représenter le relief.

Il nous resteroit à déterminer la courbe qui se fait par l'intersection des surfaces des cones dont les axes ne se coupent pas & ne sont pas paralleles; mais sans qu'il soit besoin d'un Theorême général, nous pouvons en trouver autant de points que nous voudrons pour chaque position respective de cones donnés; ce qui suffit à la pratique, puisque nous démontrerons que chacuns de ces points sont bien trouvés, comme on le verra au Livre suivant.

Nous n'ajouterons rien ici des sections composées de deux portions de courbes qui se mutilent réciproquement, lorsqu'un cone n'en pénetre un autre que d'une partie de sa circonférence; nous en avons assez dit aux Theorêmes XXI & XXVII, où nous avons aussi fait remarquer que ces parties de sections sont toujours inégales; celle qui approche le plus du sommet étant toujours la plus petite.

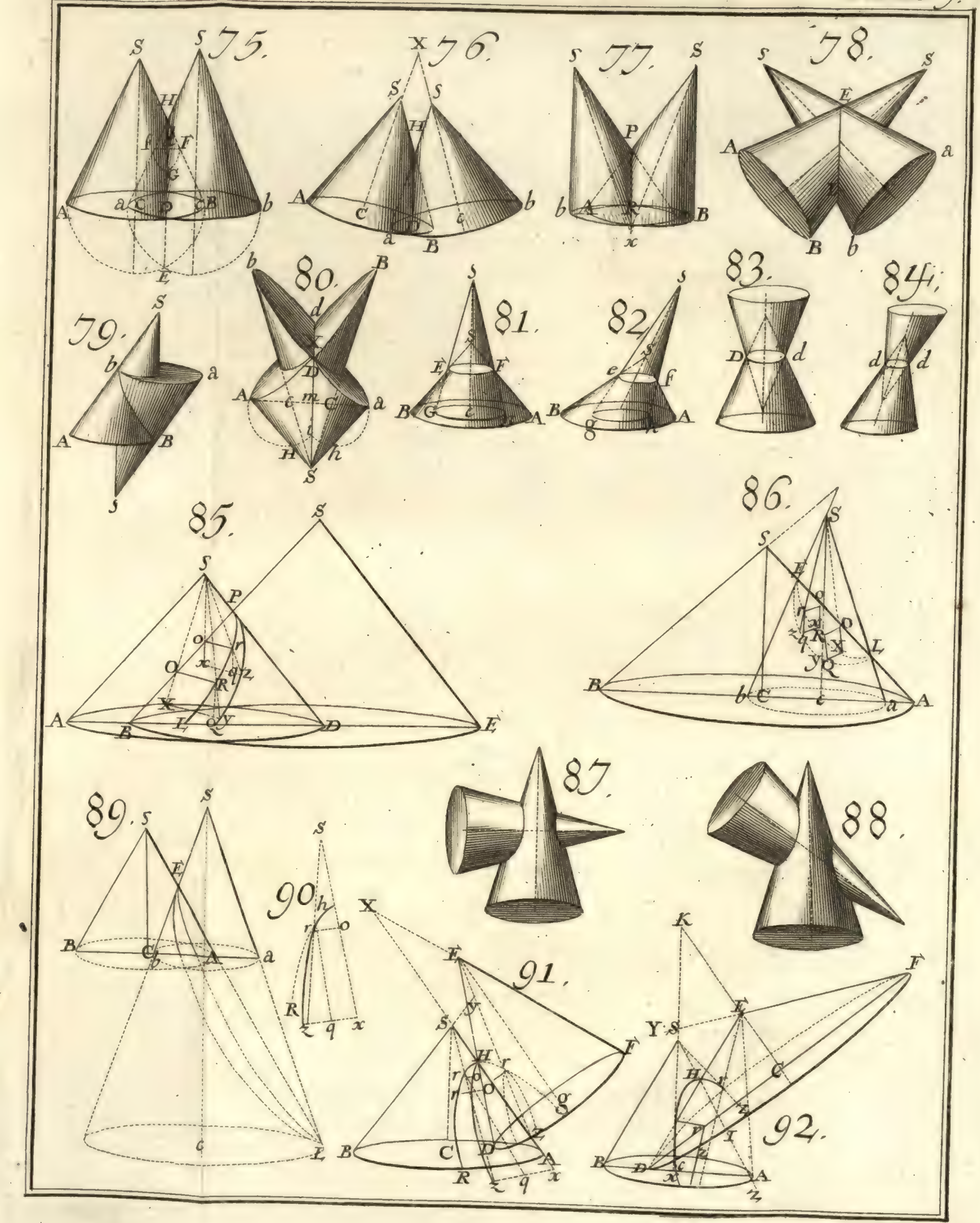
USAGE.

157. Les rencontres des voutes coniques entr'elles tombent rarement dans la pratique, nous n'en trouvons d'exemples que dans les trompes & voutes coniques qui rachetent une tour ronde & en talud, dans les lunettes ébrasées d'une voute en canoniere, ou dans les creneaux qui se croisent, ce qui est de peu d'usage & de peu de conséquence.

CHAPITRE VIII.

Des sections faites à la surface des sphéroïdes pénetrés par des sphéres, cones ou cylindres.

Fig. 93. & 94. NOus avons distingué au Chapitre IV différentes sortes de sphéroïdes; mais nous ne parlons ici que des plus réguliers, qui sont faits par la révolution d'une demi-ellipse sur un


75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.

de ses axes; sçavoir, de *l'oblong* PL*p* (*Fig.* 93) sur le grand axe P*p*, & de *l'applati*, sur le petit axe AL comme *ptp* (*Fig.* 94.)

THEOREME XXXIV.

La section faite par la rencontre des surfaces d'un sphéroïde avec celle d'une sphere, d'un cylindre & d'un cone qui le pénetrent, ou qui en sont pénetrés, de maniere que les axes de ces corps se confondent, est un cercle.

Cette proposition est claire, si l'on fait attention à la génération de ces corps, car:

1°. Pour le sphéroïde & la sphere, puisque le sphéroïde est formé par la révolution d'une demi-ellipse DBE ou *dbe* sur son grand axe DE, ou sur le petit *de*, & la sphere par celle d'un demi-cercle PF*p*, l'ordonnée MO ou *mi* à l'axe commun D*e*, auquel elle est perpendiculaire, étant commune au sphéroïde & à la sphere, formera par sa révolution autour de son point M ou *m* immobile, un cercle qui sera commun à la sphere & au sphéroïde, dont la circonférence sera à la surface de l'un & de l'autre, par conséquent à leur intersection; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 95.

2°. Le même raisonnement s'applique naturellement à l'intersection des surfaces du sphéroïde & du cylindre droit (*Fig.* 96) puisque ce dernier est formé par la révolution d'un parallelogramme rectangle MO *im*, sur son côté M*m*; or dans la supposition que ce côté qui est l'axe du cylindre, se confond avec les axes du sphéroïde, soit applatti comme *dbe*, ou allongé comme DBE, il est visible que les côtés MO & *mi* sont des ordonnées communes, dont la révolution fait un cercle, qui sera l'intersection commune de ces deux corps. *Fig.* 96.

3°. Il en sera de même de l'intersection d'un sphéroïde & d'un cone droit, qui est formé par la révolution d'un triangle rectangle SCF ou *scf*, sur son côté SC ou *sc*, qui en devient l'axe, passant par les axes des ellipses qui engendrent le sphéroïde, les ordonnées MO & *mi* seront les rayons des cercles dont la circonférence sera l'intersection des deux surfaces, soit que le sommet S du cone soit au-dehors du sphéroïde ou au-dedans, comme KCF (*Fig.* 97.) auquel cas l'ordonnée commune est *nh* ou V*u* Fig. 98. *Fig.* 97. & 98.

Application à l'usage.

Cette proposition fait voir que l'arrête d'enfourchement d'une lunette en berceau ou ébrasée, qui rachete une voute en cul-de four surhaussée ou surbaissée, dont les impostes sont de niveau à celle de la voute, & dont la direction, c'est-à-dire celle de leurs axes, tend au centre du cul-de-four, est une circonférence de cercle, en termes de l'art, un plein ceintre.

Fig. 95. De même que l'arrête d'enfourchement d'une niche surhaussée ou surbaissée, ou plutôt renfoncée ou applatie par son plan horisontal dans une voute sphérique, avec les mêmes circonstances de direction de son axe au centre de cette voute est un cercle, ce qui n'est pas rare dans les bâtimens.

THEOREME XXXV.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un sphéroïde, dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere, est une espece d'ellipsoïdimbre, c'est-à-dire, une courbe à double courbure, dont on peut marquer quelque rapport constant à une ellipse.

Fig. 101. Soit une sphere ABRN, pénetrée par un sphéroïde APBLp; dont l'axe Pp ne passe pas par le centre C de la sphere. Si l'on suppose un plan passant par le centre & par l'axe du sphéroïde, il fera pour section un cercle dans la sphere, & une ellipse dans le sphéroïde, par le Theorême V, dont l'intersection qui est aux points A & B, marquera que ces points sont communs aux deux surfaces, mais non pas les autres points de ces deux courbes, qui sont l'une en-dedans de la sphere, l'autre au-dehors du sphéroïde, de sorte que ni l'une ni l'autre de ces sections ne peut être commune à la sphere & au sphéroïde.

Présentement si l'on veut lui chercher quelque rapport avec d'autres courbes planes; il faut supposer un plan perpendiculaire au premier (comme nous avons fait jusqu'ici) passant par les points communs A & B, lequel fera deux sections de même espece que les précédentes; sçavoir, une ellipse AKB dans le sphéroïde, & un cercle AMB dans la sphere, représentés ici en perspective; d'où il suit évidemment que la commune section

de

de ces deux surfaces est une courbe à double courbure, puisqu'elle ne peut être en même-tems cercle & ellipse, & cette courbe étant tournée du côté du pole P du sphéroïde, a des ordonnées à son axe courbe AYB, toujours moindres que celles de l'Ellipse plane de la section faite par les points communs A & B dans le rapport des ordonnées à l'axe P*p* du sphéroïde, qui passe l'un par l'axe soustendant AB, l'autre par l'axe courbe AYB. PL. 8. Fig. 101.

On pourroit considérer le sphéroïde comme une infinité de petits cones tronqués (*Fig.* 101) faits par la section de plusieurs plans *e e*, perpendiculaires à son axe P*p*, & c'est ainsi en effet qu'on le réduit le plus souvent pour la pratique de la Coupe des Pierres; ces cones tronqués auroient tous leur sommet sur l'axe P*p* prolongé par exemple en S, & les côtés du cone *se*, *se* seroient tangentes au sphéroïde. Alors on pourroit trouver la courbe de la section solide par les analogies de celle du cone dans la sphere, comme au Theorême XIV; mais à chaque cone on auroit un nouveau sommet S, & parce que le nombre de ces cones à la surface du sphéroïde est infini, il y auroit autant de sommets que de points dans l'axe prolongé, de sorte que la courbe de cette section n'est pas de la même espece que l'ellipsoïdimbre telle que nous l'avons défini.

Cependant elle y a quelque rapport, la différence est que les ordonnées à l'axe de l'ellipse, & celles à l'axe courbe de la section solide n'ont pas des excès ou des défauts les unes à l'égard des autres en raison arithmétique, comme les côtés du triangle, mais en raison géométrique, comme les racines des quarrés des ordonnées des ellipses planes, faites par des plans passant par ces ordonnées & l'extrêmité de l'axe du sphéroïde, ce que l'on va démontrer comme il suit.

Ayant supposé comme ci-devant le sphéroïde APL*p* (*Fig.* 101) qui pénetre une sphere ABRN, & que les points A & B sont communs à leurs surfaces, soit AKB*h* l'ellipse faite par la section d'un plan passant par AB perpendiculairement à celui qui passe par l'axe du sphéroïde & le centre C de la sphere. Soit aussi AMB*m* le cercle fait par la section du même plan dans la sphere.

Si par le centre C on tire une perpendiculaire CE à l'axe P*p*, elle le coupera au point D, duquel pour centre & pour rayon DH ou DN, moitié de HN considérée comme corde de la

Fig. 101. ſphere, ayant décrit un demi-cercle HEN, il rencontrera en x la demi-ellipſe PAp du ſphéroïde, & donnera ainſi un point x commun aux deux ſurfaces, par lequel menant une perpendiculaire xy à l'axe Pp, on aura xy pour ordonnée de la ſection ſolide. Mais parce que la ſection plane paſſant par A & B coupe l'axe au point g, l'intervalle gy ſera la différence des profondeurs des deux ſections dans la ſphere, & la ligne Fg, perpendiculaire, à Pp, ſera l'ordonnée de la ſection circulaire de la ſphere, & Gg celle de l'ellipſe dans le ſphéroïde. Or, par la propriété de l'ellipſe, $Py \times yp : Pg \times gp :: \overline{xy}^2 : \overline{Gg}^2$, donc ſi l'on connoît la longueur des ordonnées on trouvera leur diſtance, & ſi on connoît leur diſtance, c'eſt-à-dire la profondeur de l'axe courbe à la ſection plane par AB, on connoîtra les longueurs des ordonnées, & par conſéquent leur différence.

Il en ſera de même ſi par le point P on fait paſſer un plan par les ordonnées or de la ſection ſolide, & nq de l'ellipſe plane, leſquelles ſont ici exprimées en façon de perſpective à l'égard du cercle AMB & de l'ellipſe AKB, qui ſont repréſentés de même, parce que ces deux plans étant en partie confondus enſemble, & ayant le diametre commun AB, ſeroient auſſi confondus avec ce diametre, ſi l'on n'aidoit un peu l'imagination.

Pour voir ces ordonnées plus diſtinctement, il faut les conſidérer, comme ci-devant, dans un plan perpendiculaire au premier PANR, & paſſant par le pole P, comme PR, alors faiſant un demi-cercle IQR ſur IR, corde de la ſphere, & une demi-ellipſe PVL ſur PL, comme grand axe, dont u eſt le centre, & ſur uZ, moyenne proportionelle entre xu & ut, pour moitié du petit axe, l'interſection V du demi-cercle IQR, & de la demi-ellipſe PVL donnera un point V de la ſection ſolide, duquel abaiſſant une perpendiculaire Vo ſur PR, on aura le point o à l'axe courbe de cette ſection, & le point n à l'axe droit, par une analogie ſemblable à la précédente $Po \times oL : Pn \times nL :: oV : nz$.

COROLLAIRE.

158. D'où il ſuit qu'on peut trouver autant de points qu'on veut de l'axe courbe, & leur diſtance à l'axe droit, ſur un plan paſſant par le point P perpendiculairement au plan paſſant par

l'axe Pp du ſphéroïde & le centre C de la ſphere ; puiſque nous avons démontré au Theorême V. que toutes les ſections planes des ſphéroïdes, leſquelles ſont obliques à leurs axes ſont des ellipſes, & que celles de la ſphere ſont des cercles, on aura toujours à l'interſection de ces deux courbes un point commun, qui ſera à la circonférence de la ſection ſolide.

USAGE.

159. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une niche renfoncée ou raplatie dans une voute ſphérique, ſi les impoſtes ne ſont pas de niveau, c'eſt-à-dire, que l'un des deux ſoit au-deſſus ou au-deſſous de l'autre, quoique chacune ſoit de niveau entr'elles, ou que les unes ſoient de niveau, & les autres rampantes; alors la courbe de l'arrête qui ſe fait à la rencontre des deux ſurfaces, eſt une courbe à double courbure, dont les *aplombs* ne ſont pas dans une ligne droite, comme au Theorême précédent, & cette courbe a quelque rapport avec celle que nous avons appellée ellipſoïdimbre, parce que les ordonnées à ſon axe courbe ont toujours un rapport connu avec celle de la ſection elliptique ou ſphéroïde, coupée par un plan paſſant par AB.

La même choſe arrivera ſi les niches, au lieu d'être renfoncées ou raplaties horiſontalement, étoient ſurhauſſées ou ſurbaiſſées verticalement; la ſeule différence qu'il peut y avoir eſt le changement du rapport des ordonnées qui ont dans un cas, un excès ſur celles de l'ellipſe, & dans l'autre un défaut, mais toujours en même proportion.

THEOREME XXXVI.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre droit & d'un ſphéroïde, dont l'axe eſt perpendiculaire à celui du cylindre, eſt un cicloïmbre.

Soit un cylindre ABba, dont l'axe $m\,n$, prolongé en C & c, eſt perpendiculaire à celui d'un ſphéroïde allongé Pfpg formé par la révolution de la demi-ellipſe Pfp ſur ſon grand axe Pp ou applati Pdpe, formé par une ſemblable révolution ſur le petit axe POcp. Ayant ſuppoſé ces corps coupés par un plan paſſant par leurs axes, & une ſeconde fois par un autre plan per- *Fig. 99.*

Fig. 99. pendiculaire au premier, & passant par les points A & B, a & b communs aux deux surfaces du cylindre & du sphéroïde, on reconnoîtra que cette seconde section sera un cercle dans le cylindre & une ellipse dans le sphéroïde, laquelle sera semblable à celle de sa section par l'axe P*p*. La rencontre des deux surfaces n'est donc pas dans un plan, puisque l'ellipse est hors du cylindre, & le cercle au-dedans du sphéroïde; cependant elle doit passer par les points A & B ou *a* & *b*.

Supposant un troisieme plan perpendiculaire au premier, passant par l'axe du cylindre, ou parallelement à cet axe, il sera un cercle dans chaque sphéroïde, & un parallelogramme dans le cylindre. Soit le quart d'un de ces cercles *d*H ou *gh*, & le point X ou *x*, celui où il rencontre le côté du cylindre, ce point sera commun aux deux surfaces, d'où si l'on abaisse la perpendiculaire XY ou *xy* sur l'axe C*c*, qui le coupera en Y ou en *y*, ce point sera un de ceux de l'axe courbe AYB ou a*yb* de la section solide; mais parce que toutes les ordonnées à cet axe sont perpendiculaires aux côtés du cylindre, & qu'elles se terminent toutes à sa circonférence, il suit qu'elles sont toutes égales & paralleles à celles de sa base, ce qui est évident; donc tous les diametres droits seront aussi paralleles & égaux à ceux de la base du cylindre, comme nous l'avons démontré en pareil cas au Theorême XVIII, donc la section solide est un cicloïmbre; *ce qu'il falloit démontrer*.

La différence qu'il y a de celui qui se fait à la rencontre des sphéroïdes différemment posés à l'égard du grand ou petit axe, est que le cicloïmbre, fait à la rencontre des surfaces du cylindre & du sphéroïde allongé, s'approche du grand axe en creusant pour ainsi dire dans ce sphéroïde, & qu'à celle du sphéroïde applati, il s'éloigne du petit axe en s'approchant de la surface, comme on le voit dans la Figure 99 par les lignes AYB & a*yb*.

COROLLAIRE.

160. Il est aisé de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe, en tirant par un point quelconque K de la ligne *ab* une ligne K*l* parallele à l'axe C*c*, & décrivant sur O*r* & *m*a pour rayons, des arcs de cercles. Si l'on fait K*t* = K*s* & *tz* parallele à C*c* pour côté du cylindre, elle coupera l'arc *sr* en *z*, par où on menera *zq* perpendiculaire à L*l*, laquelle

donnera ſur Or un point g qui ſera celui de la courbe que l'on cherche.

On appliquera ici tout ce que nous avons dit du rapport des profondeurs de la ſection ſolide au Theorême XVIII, ſoit en les conſidérant comme les fleches des cordes inſcrites dans différens cercles, ou comme les ſinus verſes des ordonnées priſes pour des ſinus droits.

THEOREME XXXVII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un ſphéroïde, dont les axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'ellipſimbre.

Et peut être une ellipſe dans certains cas.

Soit (*Fig.* 100) un cylindre ABba, qui rencontre obliquement un ſphéroïde allongé ou applati. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par l'axe du cylindre, qui ſera pour ſection un parallelogramme dans ce corps, & une ellipſe dans le ſphéroïde, dont les interſections a & b, A & B donnent des points communs à ces ſurfaces, ſi l'on coupe ces corps par un plan perpendiculaire au premier & paſſant par A & B, a & b, la ſection ſera de deux ellipſes qui peuvent être égales, en ce cas la ſection faite par la rencontre des ſurfaces devient plane; mais comme la différence des ſphéroïdes peut donner une infinité d'ellipſes différentes, la ſection ſera ordinairement ſolide à cauſe de l'inégalité des ellipſes du cylindre & du ſphéroïde, ce qu'il eſt aiſé d'appercevoir. *Fig.* 100.

Or parce que toutes les ordonnées de cette ſection doivent être terminées à la ſurface du cylindre auſſi-bien qu'à celle du ſphéroïde, il ſuit qu'elles doivent toutes avoir un rapport d'égalité avec celles de l'ellipſe plane, qui eſt la ſection oblique du cylindre ſuivant la ligne AB, ce que nous avons aſſez expliqué aux Theorêmes IX & X, pour qu'il ne ſoit pas néceſſaire d'entrer ici dans un plus grand détail. Il y a même ſi long-tems que nous rebattons la même démonſtration, appliquée à différentes occurrences, que je crains que le Lecteur ne ſe trouve offenſé de la défiance qu'il ſemble qu'on ait de ſa pénétration, en entrant dans un trop grand détail.

COROLLAIRE.

On peut facilement appercevoir les changemens que les cylindres ſcalenes cauſeroient aux ſections faites par la rencontre des ſurfaces des ſphéroïdes, puiſque les ſections obliques qu'on a ſuppoſé elliptiques, peuvent être circulaires, & les perpendiculaires ſe trouver aux axes des ellipſes.

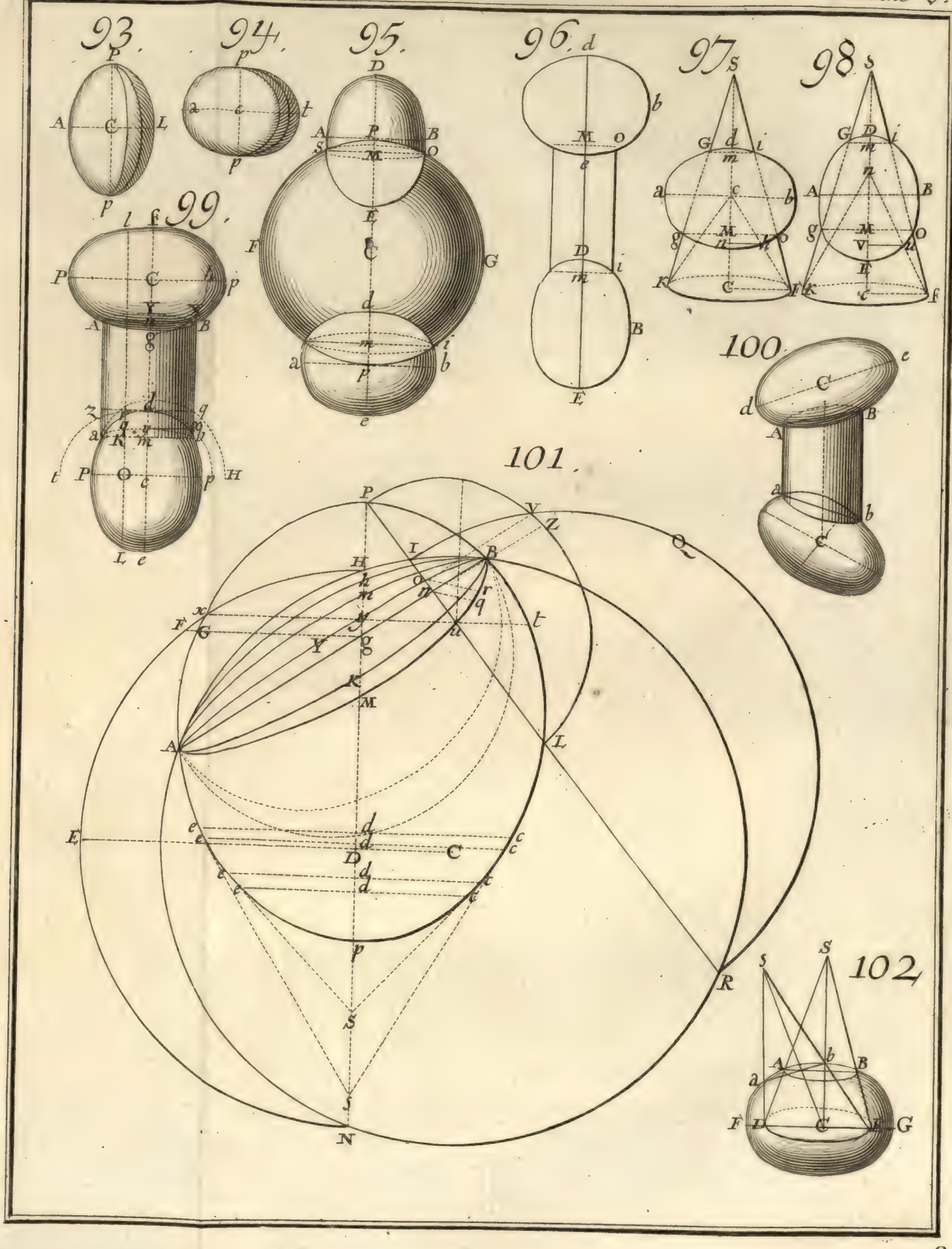
Application à l'uſage.

Cette propoſition & la précédente font voir quelle eſt la courbe de l'arrête d'enfourchement d'un berceau, qui rachete une voute ſphéroïde ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou directement ou obliquement. Ce cas n'eſt pas rare dans l'Architecture; telles ſont les lunettes de la voute ſphérique ſurbaiſſée de la Chapelle du Saint Sacrement du Val de Grace, dont les naiſſances ſont au-deſſus de celles du cul-de-four, ou hémiſphéroïde applati.

THEOREME XXXVIII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un ſphéroïde & d'un cone, dont l'axe rencontre celui du ſphéroïde, perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement courbe à double courbure, telle qu'eſt l'ellipſoïdimbre; mais dans certains cas elle peut être une ellipſe plane.

Fig. 102. La démonſtration en eſt aiſée; car 1°. ſi l'axe du cone SC paſſe hors du centre C du ſphéroïde, ou qu'il y paſſe, mais qu'il coupe obliquement ſon axe FG, comme celui du cone D*s*E, il eſt clair dans ces deux circonſtances, que le plan perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes SC du cone, & FG du ſphéroïde qu'on ſuppoſe auſſi (comme nous l'avons toujours fait) paſſer par les points communs aux deux ſurfaces A & B, ou *a* & *b*, fera deux ellipſes, l'une dans le cone coupé obliquement, comme en a*b*, l'autre dans le ſphéroïde, leſquelles ne feront les mêmes que lorſque leurs deux axes feront égaux, hors de ce cas ces ſections étant inégales, il eſt clair que la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure, telle que celle que nous avons appellée ellipſoïdimbre, qui aura des excès ou des


93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.

défauts ſur l'ellipſe plane du cone, dans le rapport des profondeurs de l'axe courbe. 2°. Si l'axe du cone paſſe par le centre C du ſphéroïde, & perpendiculairement à ſon axe FG, il ſe fera deux ſections en AB, dont l'une ſera un cercle dans le cone, & l'autre une ellipſe dans le ſphéroïde; & par conſéquent la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure de même eſpece que les précédentes, avec cette différence que les excès ou les défauts de ſes ordonnées ſur la ſection plane du cone ſeront comparés à un cercle & non pas à une ellipſe. Pl. 8. Fig. 102.

Application à l'uſage.

Les lunettes évaſées dans les voutes en cul-de-four ſurhauſſées ou ſurbaiſſées, ou *ſur un plan ovale*, c'eſt-à-dire, un ſphéroïde oblong ou applati, ſont le ſujet de ce Theorême, qui fait voir, 1°. que l'arrête d'enfourchement eſt à double courbure, lorſque l'axe de la lunette, c'eſt-à-dire la direction de ſon milieu, tend au centre. 2°. Qu'elle l'eſt ordinairement ſi elle eſt biaiſe, & que cependant il peut arriver dans ce cas qu'elle ſoit ellipſe plane.

Nous n'ajoutons rien ici des courbes compoſées des ſections des ſphéroïdes, nous croyons en avoir dit aſſez ci-devant pour mettre le Lecteur en état d'en juger par la comparaiſon des précédentes des autres corps ronds, il eſt tems d'en venir aux Problêmes, qui donnent les moyens de tracer toutes ſortes de ſections.

Si quelqu'un eſt curieux d'entrer d'une maniere plus ſçavante & plus générale dans la Théorie des courbes à double courbure, il peut s'inſtruire parfaitement dans le beau Traité de M. CLAIRAUT, dont nous avons parlé. Il ne faut pour l'entendre qu'une médiocre connoiſſance du calcul Algébrique, tant il eſt clair & méthodique dans ſes démonſtrations.

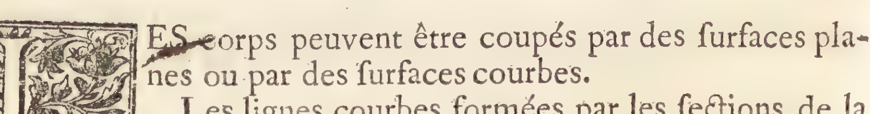




TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

LIVRE SECOND.

De la deſcription des lignes courbes formées par la ſection des corps.



LES corps peuvent être coupés par des ſurfaces planes ou par des ſurfaces courbes.

Les lignes courbes formées par les ſections de la premiere eſpece, peuvent être décrites ſur des ſurfaces planes & ſur des ſurfaces courbes ; mais celles de la ſeconde eſpece ne peuvent être exactement décrites que ſur des ſurfaces courbes , ſi j'en excepte peu de cas. La raiſon eſt, que les lignes courbes formées par l'interſection des ſurfaces de deux corps, peuvent être conſidérées comme étant ſur la ſurface qui coupe, & ſur celle qui eſt coupée puiſque l'interſection eſt commune à tous les deux ; par conſéquent ſi on coupe une ſphere, un cone, ou un cylindre par une ſurface plane, la courbe peut être conſidérée comme étant ſur le plan qui coupe, & ſur la ſurface de la ſphere du cone ou du cylindre

dre qui eſt coupé; ainſi elle peut être décrite ſur deux ſurfaces de différente eſpece, l'une plane, l'autre courbe ; & ſi les ſurfaces qui ſe coupent ſont toutes deux courbes, il eſt à préſumer que la ſection ne convient point aux planes ; il en faut cependant excepter certains cas où la même interſection eſt commune à deux ſurfaces courbes & à une troiſieme qui eſt plane; telles ſont les interſections des ſurfaces de deux ſpheres, quelquefois de deux cylindres, & de deux cones en certaines circonſtances de poſition & de grandeur, dont nous avons parlé au Livre précédent.

PREMIERE PARTIE

De la deſcription des ſections planes ſur des plans.

LA plupart des ſections planes que nous avons pour objet dans cet Ouvrage, ſont ces quatre ſortes de courbes qu'on appelle les *Sections coniques* , quoiqu'elles ne ſoient pas toutes particulieres au cone, puiſqu'il y en a deux qui conviennent auſſi à la ſphere & au cylindre.

Nous en avons cependant quelqu'autres à décrire, comme la ſection plane de l'anneau & la ſpirale : cette derniere n'eſt pas proprement une ſection de corps ordinaire, à moins qu'on ne la conſidere comme celle d'un coquillage ; mais à cauſe qu'elles ſont de peu d'uſage en comparaiſon des autres, nous jettons toute notre attention ſur les ſections coniques.

La maniere de les décrire n'eſt pas toujours la même, on eſt ordinairement aſſujetti dans la pratique à les faire paſſer par certains points ou lignes données en dedans ou en dehors, qui en changent totalement la deſcription; c'eſt ce qu'on appelle les *données*, qu'on peut tellement varier, que la ſolution des Problemes néceſſaires pour réſoudre tous les cas poſſibles, fourniroit aſſez de matiere pour un gros volume; nous nous bornons ici à ceux qui peuvent être d'uſage dans l'Architecture.

CHAPITRE I.

De la description du cercle.

Pl. 6. Fig. 72.

NOus avons peu de choses à dire du cercle, parce que les élémens ordinaires de la Géométrie en traitent assez au long pour la pratique des arts, & que nous supposons dans tout cet Ouvrage, que le Lecteur est initié dans cette science. Nous voulons seulement suppléer à ce qu'on n'y trouve qu'indirectement pour la solution d'un cas qui se présente assez souvent en Architecture, tant pour l'exécution des traits des voutes, que de certains arrondissemens de mur, dont le rayon est si grand, qu'on ne trouve pas commodément une place pour le faire mouvoir sur un centre ; soit parce que le lieu du centre est embarassé, ou enfermé dans quelque bois ou bâtiment, soit parce que la longueur de ce rayon cause de la difficulté dans l'usage du *simbleau*. Car si on se sert de corde elle s'allonge & altere la régularité du contour ; si on lui substitue une chaîne qui semble ne devoir pas s'allonger, elle a aussi ses inconvéniens, en ce que le frottement interrompt son mouvement, lorsqu'elle est posée à plat sur une aire horisontale ou inclinée, & fait varier son extension, quelque précaution qu'on prenne, ce qui doit arriver nécessairement, puisqu'il est démontré en Méchanique que quelque petit que soit ce frottement ou son poids, si elle étoit pendue par ses extrêmités, elle ne peut se mettre en ligne droite, il faut que cette puissance du milieu, frottement ou pesanteur s'anéantisse ; & pour que la courbure reste toujours égale, il faut que la puissance ou l'effort de la main qui tire soit toujours parfaitement égal, ce qui est moralement impossible. De sorte qu'on ne peut s'assûrer de décrire régulierement un arc de cercle par ce moyen ; celui de faire un simbleau avec des perches est le plus sûr, mais il a ses incommodités, lorsqu'il en faut ajouter plusieurs bout-à-bout, il faut le soutenir bien droit pour le faire mouvoir sans le plier, & supposer que le milieu n'est occupé par aucun mur ni matériaux. Il est donc fort agréable de pouvoir éviter toutes ces incommodités par une pratique de Geométrie que voici.

PROBLEME I.

Par trois points donnés tracer un arc de cercle par plusieurs autres points trouvés, ou par un mouvement continu, sans le secours du centre.

On ne peut à moins de trois points déterminer ni tracer un arc de cercle, puisque par deux points donnés, on en peut faire passer une infinité de différentes grandeurs, mais ces points peuvent être donnés dans des circonstances qui occasionnent différentes manieres de le tracer: car 1°. ou on les donne tous trois à la circonférence, 2°. ou l'on n'y en donne que deux, & le troisieme en idée pour le centre, en déterminant seulement la longueur du rayon, sans en marquer la position à l'égard des points donnés.

Au premier cas les points peuvent être donnés à distances égales entr'eux, ce qui arrive souvent en Architecture, où l'on détermine ordinairement les points des naissances, & celui de la clef pour les voutes, ou celui du milieu pour les arrondissemens des murs; ou bien ces points sont donnés à distances inégales. Ces différentes circonstances peuvent donner occasion à différentes manieres de décrire l'arc. Pl. 9.

Soit (*Fig.* 103) les points ADB donnés aux deux extrêmités & au milieu de l'arc qu'on doit tracer. Ayant tiré les cordes AB, AD, DB, on fera du point A pour centre & d'une ouverture de compas prise à volonté, l'arc *f*K terminé en *f* & en K aux cordes AD & AB, puis de la même ouverture, & du point B pour centre, on décrira l'arc indéfini FE, dont le point F est sur la corde DB; ensuite par le point A on tirera autant de lignes droites qu'on voudra avoir de points de l'arc proposé entre D & B, par exemple ici pour trois, les lignes AX, A*x*, A*y* qui couperont au hasard l'arc *f*K aux points *g*, *h*, *i*, ensuite on portera les parties de cet arc prises entre *f* & K, sur l'arc FE en dehors de F en E. Ainsi *fg* en FG, *fh* en FH, *fi* en FI, & par le point B & les points FGHI on tirera des lignes droites, dont les sections, avec les précédentes, donneront autant de points de l'arc demandé; sçavoir BI, coupant A*y*, donnera le point *y*; BH, coupant A*h*, donnera le point *x*, & Fig. 103.

BG coupant A *g*, le point X; on en fera de même pour l'autre côté AD.

Fig. 104. Secondement, si le point donné D n'est pas au milieu, comme à la Figure 104, on peut trouver plusieurs points correspondans à ce point D considéré comme dans un plus grand ou plus petit arc. Du point a pour centre & pour rayon a D, ayant fait l'arc DE, du point *b* pour centre & de la même ouverture de compas, on fera l'arc *ed* égal à DE, qui donnera un quatrieme point *d*, puis on tirera la droite D *b* qui coupera cet arc en F: du point D pour centre & de la même ouverture de compas a D on fera l'arc *f* 3 = F *d* qui donnera le point 3; on tirera *d* a qui coupera l'arc *f* 3 en G; du point a pour centre & de la distance *d* 3 pour rayon, on fera l'arc *g* 4, = G 3 qui donnera le point 4, ainsi de suite, on trouvera autant de points qu'on voudra, par lesquels avec une regle pliante on tracera l'arc a D *b*, qui est celui qu'on cherche.

DÉMONSTRATION.

Dans la premiere construction où les angles DAB & ABD sont égaux, les lignes AX, A *x* & A *y* font des angles avec la corde AB plus petits que DAB de la quantité d'une partie de l'arc *fk*, qui en est la mesure: par exemple AX, de la quantité *fg*, de laquelle on a augmenté l'angle ABD, en tirant par le point G au dehors, la ligne BX qui rencontre AX au point X; donc la somme des angles XAB, XBA est égale à celle des angles DAB, DBA, dont le supplément a deux droits, AXB est égal à l'angle qui est à la circonférence ADB : donc (par la 21 du 3e. Livre d'Euclide) le point X est à la circonférence du même arc de cercle, que les points donnés ADB, ainsi des autres *x* & *y*.

Dans le deuxieme cas il est visible qu'on a fait l'angle *b d* a = a D *b*, de même que l'angle D *b d* = *b* D 3; a *d* 3 = *d* a 4; donc tous les points trouvés sont dans le même arc que les donnés a D *b*, puisque les angles faits dans chaque segment sont toujours égaux à ceux que font les cordes des points correspondans D & *d*, *d* & 3, 3 & 4, D & 5, &c. *ce qu'il falloit faire.*

COROLLAIRE.

De la propriété du cercle dont nous venons de faire usage,

on tire une maniere *de décrire un arc de cercle organiquement par un mouvement continu ſans le ſecours du centre & ſans connoître la longueur du rayon*, mais ſeulement par le moyen de trois points donnés.

Car (*Fig.* 107) ſi l'on fait avec deux regles de bois GE, EI aſſemblées par le moyen d'une troiſieme FH, un angle GEI égal à l'angle ABD, dont le ſegment AEBD eſt capable, & qu'on faſſe couler cet inſtrument entre deux cloux ou chevilles A, D, le crayon qui ſera au ſommet E de l'angle que font ces deux regles, tracera l'arc demandé AEBD, lequel paſſera par les trois points donnés A, B, D. *Fig.* 107.

Il faut remarquer que chacune des regles EG, EI doit avoir en longueur au moins l'intervalle des deux points A & D les plus éloignés, afin que le ſommet E étant tranſporté en D, la branche EG touche & s'appuye encore au point A, qui en doit régler la direction.

AUTREMENT.

On peut encore tracer l'arc demandé par un mouvement continu avec une autre machine, mais plus compoſée que la précédente. Ce ſont deux roues AB, DE de diametres inégaux, aſſemblées ſur un eſſieu commun FC, ſur lequel la plus grande AB eſt fixe, & l'autre ED eſt mobile, enſorte qu'on peut l'approcher ou l'éloigner de la premiere autant qu'il eſt beſoin, & l'arrêter par quelque cheville à la diſtance où elle doit être; enſuite appuyant ſur l'eſſieu vers le milieu M on fait tourner cette eſpece de train boiteux, dont les roues décrivent deux arcs de cercles concentriques; il eſt clair que leurs rayons ſont d'autant plus longs que les diametres des roues ſont moins inégaux, & qu'elles ſont plus éloignées entr'elles; en ſorte que ſi elles étoient infiniment peu différentes, leurs traces ſeroient des lignes droites. *Fig.* 106.

Cette machine, qui eſt de l'invention de PERRAULT, eſt plus ingénieuſe qu'utile; car il eſt moralement impoſſible de la faire mouvoir avec l'uniformité qu'elle demande, puiſque l'expérience nous fait voir qu'il eſt très-difficile de conduire en ligne droite un train de deux roues égales, à plus forte raiſon en ligne courbe deux inégales; ſoit par le défaut de la direction de la main, ſoit par l'inégalité du frottement de l'eſſieu & du ter-

rein ſur lequel on la fait rouler, de ſorte qu'on ne pourroit s'aſſûrer de la régularité de l'arc qu'on veut tracer. Quoiqu'il en ſoit de l'exécution, ſi l'on veut connoître la longueur du rayon que la trace de la grande roue décrit, il n'y a qu'à faire cette analogie; comme la différence A *d* des deux rayons des roues AC, D *c* eſt au demi-diametre AC de la grande, ainſi la diſtance D *d* des deux roues eſt au rayon SC du cercle ou arc que la grande décrit, d'où par l'inverſe on tire l'analogie néceſſaire pour trouver la diſtance des deux roues, lorſque le rayon SC eſt donné, en faiſant CA : CS : : *d*A : *d*D, ce qui eſt clair à la ſeule inſpection de la Figure, à cauſe des triangles ſemblables SCA, D*d*A.

Par où l'on voit qu'avec deux petites roues de 6 à 7 pouces de diametre & un petit eſſieu, on pourroit tracer les ceintres des plus grandes voutes, ſi l'exécution répondoit à la justeſſe du principe ſur lequel la machine eſt fondée, mais je n'en conſeille à perſonne l'uſage, par les raiſons que j'en ai rapporté.

Erreur du trait de Maître BLANCHARD.

Maître BLANCHARD dans ſon Traité de la Coupe des bois, (page 6) a voulu réſoudre le Problême dont il eſt ici queſtion, par un *trait* dont il eſt à propos de montrer l'erreur pour en déſabuſer les ouvriers qui n'ont pas aſſez de connoiſſance pour l'appercevoir.

Fig. 105. Suppoſant les trois points donnés ADB (*Fig.* 105) il décrit un parallelogramme AEFB, il tire les cordes AD, DB, qu'il diviſe en un certain nombre de parties à volonté, par exemple ici en quatre aux points *b c d*, ſur leſquels il éleve autant de perpendiculaires *bx*, *cy*, *dz*. Puis diviſant le côté AE en un même nombre de parties égales aux points *e*, *f*, *g*, il tire des lignes droites au point D, qui coupent les précédentes aux points *x y z*, qu'il prétend être la circonférence du même arc de cercle où ſont les trois points donnés ADB.

Il eſt très-aiſé de faire voir qu'il ſe trompe groſſierement par la ſeule inſpection de la Figure de ſa conſtruction, faite dans un quart de cercle comme en DG, puiſqu'elle donne au lieu du
Fig. 105. quart de cercle DSG une courbe DYZG, qui eſt conſiderablement au-dedans; mais il convient de juſtifier la figure par le raiſonnement Géométrique. Il eſt démontré dans les Elémens

d'Euclide au Liv. 3. prop. 14, que les lignes équidiſtantes du centre dans le cercle ſont égales entr'elles ; par conſéquent les lignes LX, *i*Z équidiſtantes (par la conſtruction) du milieu K de la corde DG, c'eſt-à-dire du rayon CS, doivent être égales; mais elles ne le ſont pas, donc elles ne ſont pas terminées à la circonférence du cercle. *Fig.* 105.

Pour voir cette inégalité d'un coup d'œil, il n'y a qu'à porter la longueur G*m* en DM, & tirer MG qui coupera LX environ au tiers de ſa longueur en *x*, quoique le point X ſoit déja au dedans du cercle DSG, par conſéquent il s'en faut d'environ la moitié de la longueur *iz* que le point *z* parvienne au cercle en *r*.

DE'MONSTRATION.

Pour le démontrer, ſoit (*Fig.* 105) la ligne KY prolongée en H, à laquelle on menera par les points *o* & *m* les paralleles O*p*, *mq*.

A cauſe des triangles ſemblables GHK & GO*p*, on aura GO : GH : : G*p* : GK ; mais GO $= \frac{3}{4}$ de GH, donc G*p* ſera auſſi les $\frac{3}{4}$ de GK ; par conſéquent *p*K eſt la huitieme partie de DG, & D*p* les $\frac{5}{8}$; or à cauſe du triangle iſoſcele rectangle O*p*G, la ligne *p*O ſera égale à *p*G.

Préſentement pour rendre la démonſtration ſenſible aux Ouvriers, nous ſuppoſerons chacune des huit parties ſous-diviſée en dix, afin de faire mieux connoître la différence des longueurs des lignes LX & *iz*.

A cauſe des triangles ſemblables DLX, D*p*O, on aura D*p* (50) : *p*O (30) : : DL (20) : LX (12) & à cauſe des triangles ſemblables D*qm*, D*iz*, on aura D*q* (70) : D*i* (60) : : *qm* $=$ *q*G (10) : *iz* ($8\frac{4}{7}$) ; donc les lignes LX & *iz* ſont entr'elles comme 12 eſt à $8\frac{4}{7}$, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont conſidérablement inégales, par conſéquent que les points X & *z* ne peuvent être à la circonférence du même cercle ; on ne voit par cette démonſtration que le rapport de ces lignes entr'elles ; ſi quelqu'un eſt curieux de connoître plus préciſément que par le tracé de la figure, celui qu'elles ont à celles qui parviennent juſqu'au cercle en S ou en *r*, on le pourra par la maniere ſuivante.

Tous ceux qui ſont un peu initiés dans l'Algebre ſçavent que l'équation primitive du cercle (nommant *d* le diametre, *x* l'abſciſſe, & *y* l'ordonnée) eſt $dx - xx = yy$, ainſi on cher-

Fig. 105. chera le diametre en quarrant DK & KC, & tirant la racine quarrée de leur somme, qui sera égale au rayon DC, & son double au diametre $=d$, ensuite pour avoir l'abscisse x, on ajoutera la longueur Ki au rayon, ou on en retranchera KL ; par le moyen de ces deux grandeurs connues, on aura $dx - xx$, dont on tirera la racine quarrée, de laquelle on ôtera la longueur CK, le reste sera la longueur ir, qui parvient au cercle en r ; & par ce calcul on trouvera que le point X est au-dedans du cercle d'environ une partie de trois, & z de quatre, je dis environ à cause des fractions qui restent.

Ce que nous démontrons ici dans le quart de cercle, se peut démontrer facilement de tous les arcs d'un moindre nombre de degrés ; on trouvera seulement que la différence des longueurs des lignes LX & iz diminuera, mais elle subsistera toujours ; ainsi la pratique de Maître Blanchard sera toujours fausse pour faire un arc de cercle, elle pourroit seulement servir à faire un arc de section conique ouverte, à laquelle il n'a pas pensé, & dont il n'est pas question.

Il nous reste à donner la solution du *second cas* de ce problême, où l'on ne suppose que deux points donnés à la circonférence de l'arc de cercle demandé, & au lieu du troisieme point, la longueur du rayon indépendamment de sa position qui donneroit le centre, duquel on ne veut, ou on ne peut faire aucun usage.

Fig. 108. Soient (*Fig.* 108) les deux points donnés L & M ayant tiré la ligne LM de l'un à l'autre, on aura la corde de l'arc demandé, & parce que le rayon est donné de longueur, on aura les trois côtés d'un triangle isoscele LMC, dont on peut trouver l'angle C par la Trigonométrie, ou méchaniquement par un triangle semblable, fait par le moyen d'une échelle. La moitié de l'angle LCM sera le supplément à deux droits de l'angle LNM, nécessaire pour tracer l'arc demandé par le moyen de la description organique, dont nous venons de parler au cas précédent, avec deux regles qui feront l'angle LNM, dont le segment LHNM est capable.

Fig. 109. Ou bien on cherchera (*Fig.* 109) le point X, milieu du segment AXB, par le moyen de la fleche MX ; pour cet effet, ayant quarré le rayon donné AR, & la moitié AM de la corde AB, on retranchera le quarré de AM, & du restant on extraira la racine quarrée du quarré de AR pour avoir le côté MR, lequel étant

étant retranché du rayon AR, donnera MX pour la fleche que l'on cherche, & par conséquent le point X milieu de l'arc demandé. Par le moyen de ce point X & des deux autres A, B on tracera l'arc par plusieurs points, comme nous l'avons dit au premier cas.

On peut proposer un *troisieme cas* de ce problême, en donnant une mesure déterminée au contour de l'arc qu'on veut décrire, au lieu des deux points de ses extrêmités, & ensuite la longueur du rayon; alors on trouvera l'angle LMN par un calcul assez simple. *Fig. 108.*

Premierement par le moyen de la longueur du rayon, il sera aisé de trouver la circonférence entiere en le doublant, & faisant l'analogie ordinaire, comme 7 est à 22, ou 100 à 314, ainsi le diametre donné est à la circonférence totale mesurée en pieds, pouces & lignes. Ensuite par une seconde analogie, on trouvera le nombre de degrés que doit contenir l'arc d'une longueur donnée, en disant comme le nombre des pieds, pouces & lignes, trouvé par la premiere analogie pour la circonférence entiere, est au nombre des pieds, pouces & lignes de l'arc donné en développement ou rectification; ainsi 360 degrés, valeur totale de la circonférence, est au nombre de degrés que vaut l'arc proposé, dont la longueur du contour est donnée; alors on aura un angle dont le supplément à deux droits, sera l'angle cherché LNM. Ainsi supposant l'angle trouvé de 60 degrés, on l'ôtera de 180 valeur de deux droits; il restera pour l'angle cherché 120 degrés, qu'on formera avec deux regles, si on veut décrire l'arc organiquement, comme nous l'avons dit au premier cas.

Démonstration du deuxieme & troisieme cas.

L'angle LNM vaut la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, & l'angle L*d*M vaut de même la moitié de l'arc LNM, donc ils valent pris ensemble la moitié du cercle, c'est-à-dire deux angles droits; & par conséquent la moitié de l'angle LCM, qui est égale à l'angle L*d*M, par la 20 du 3e. d'Euclide, sera le supplément à deux droits de l'angle cherché LNM; *ce qu'il falloit démontrer.*

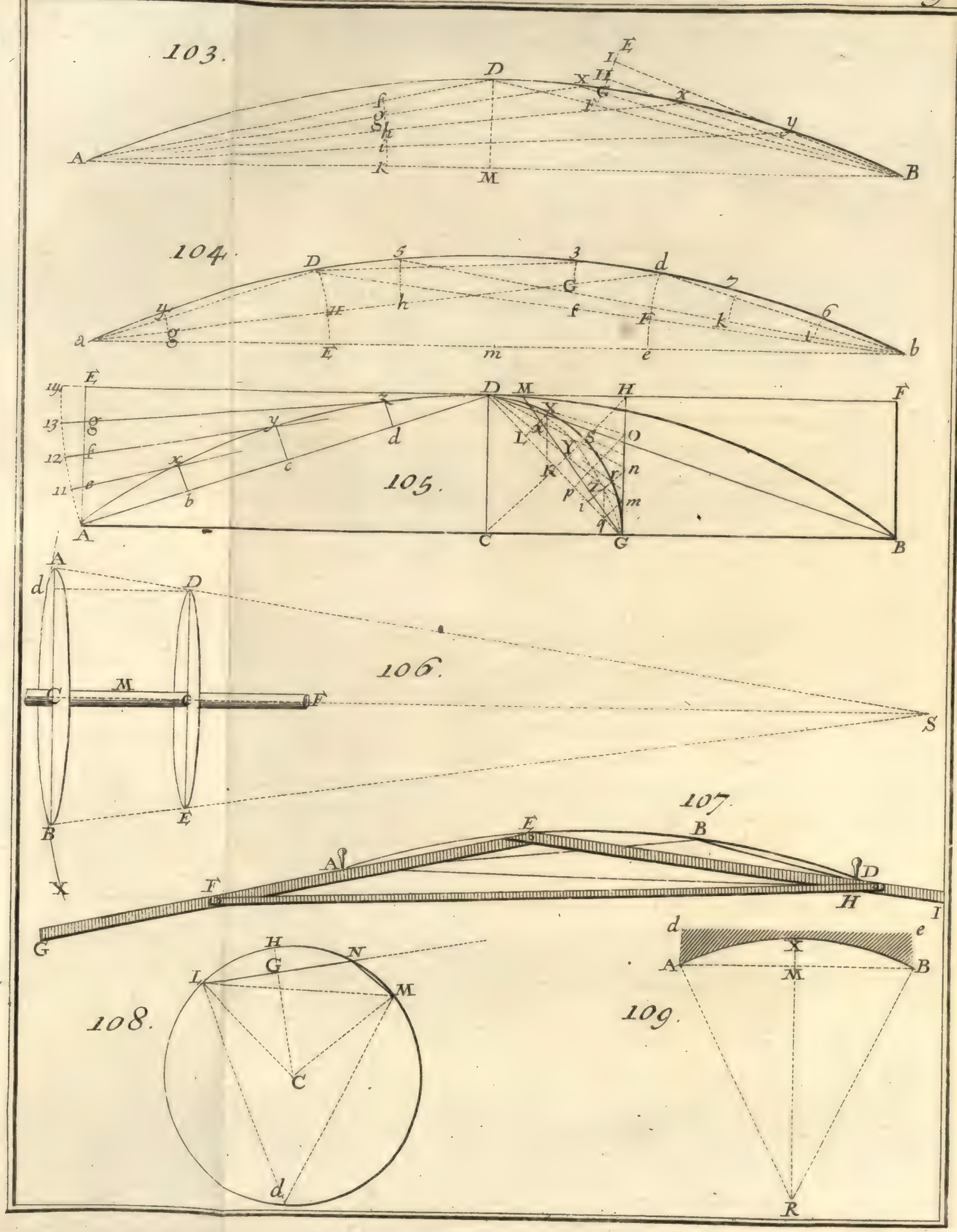
USAGE

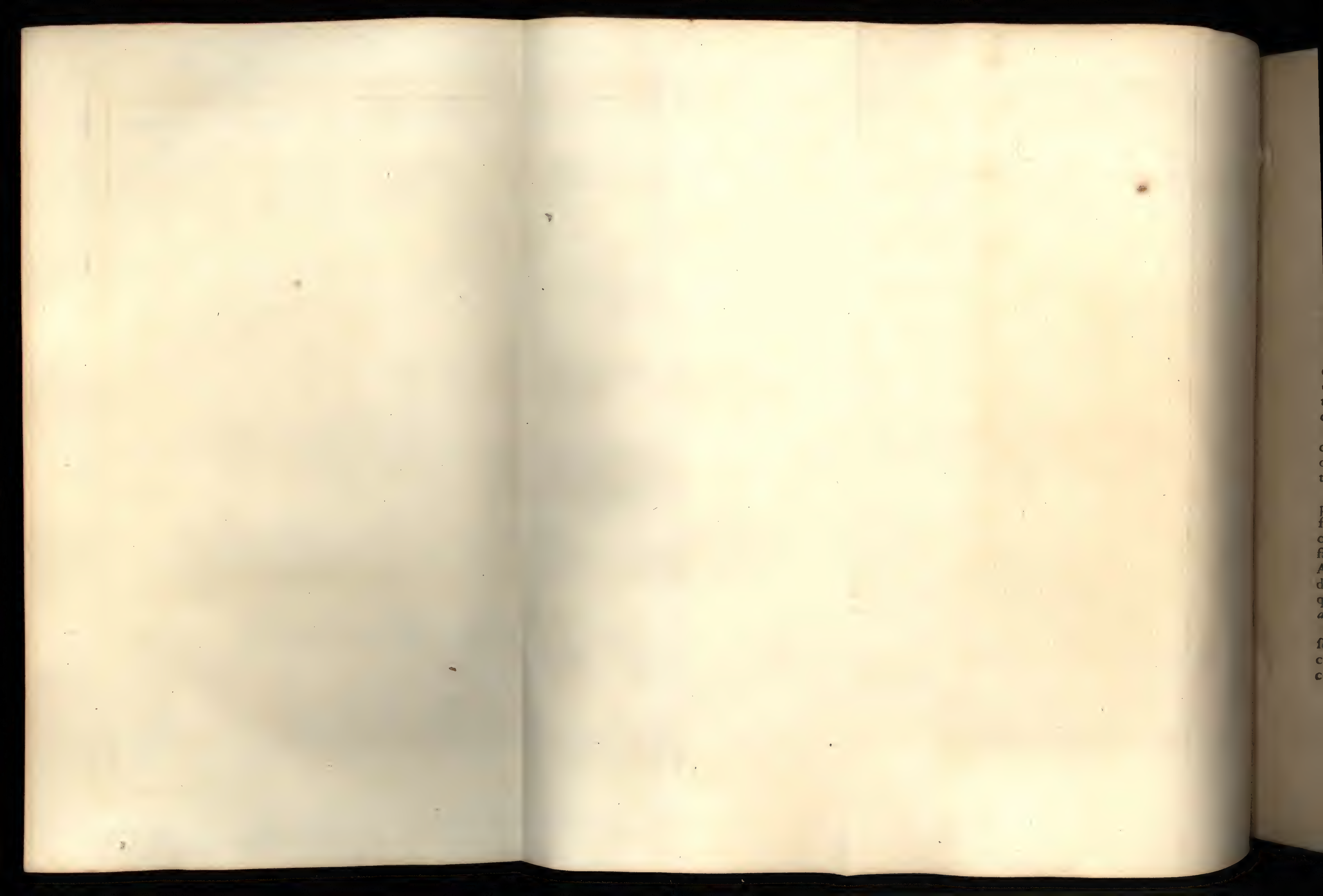
Ce problême eſt néceſſaire pour l'exécution de pluſieurs traits de la coupe des pierres, où il faut tracer des arcs de cercle dont les centres ſont extrêmement loin; par exemple pour trouver l'arc de développement de la baſe de la porte en tour ronde en talud, qui eſt celle d'une portion de cone dont le ſommet qui doit être à la rencontre des côtés du cone prolongés, c'eſt-à-dire les côtés de la Tour en talud, peut être à une diſtance conſidérablement éloignée de la baſe; ſuppoſant par exemple que la tour eut ſeulement 15 pieds de rayon, 30 de hauteur, & un dixieme de talud, le ſommet du cone qui ſeroit le centre du développemenr, ſeroit à 150 pieds loin de la circonférence; ce qui rend les préceptes du Pere DERAND & de ſon Sectateur M. de LA RUE impraticables, ſans le ſecours de ce problême.

Il eſt encore néceſſaire pour trouver les arcs des panneaux de doële des premieres aſſiſes des voutes ſphériques, ſphéroïdes, & ſur le noyau dans le ſyſtème de pratique qui exécute ces voutes par le développement des cones tronqués, comme nous le dirons en ſon lieu.

Fig. 109. Je me ſers ordinairement de la deuxieme pratique du ſecond cas pour faire les arrondiſſemens des contreſcarpes de nos fortifications, par le moyen d'un panneau A *de* BX fait d'une planche taillée, comme la partie hachée de la figure, que je mets ſur le revêtement, le faiſant courir de piquets en piquets; mais comme le parement eſt en talud, & que cet arc de cercle augmente de rayon à meſure que le mur s'éleve, je fais faire un panneau convexe ſur le derriere qui eſt à plomb, pour ſervir à jauger l'épaiſſeur qui regle le contour du parement en talud à chaque aſſiſe; & je trouve que cette méthode conduit facilement les ouvriers.

Si l'arc de cercle qu'on doit décrire étoit ſi grand qu'on ne pût ſe ſervir du compas pour faire les angles qu'on doit prendre égaux entr'eux, il faudroit ſe ſervir du *demi-cercle* ou Graphometre, & de piquets d'alignement, au lieu de lignes tracées à la regle ou au cordeau, dont on trouveroit l'interſection par la rencontre des deux rayons viſuels des points A & B pour centre de l'inſtrument. C'eſt ainſi que l'Architecte de la nou-


103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.



velle Ville de *Carls-Rouhe*, qu'a fait bâtir le Margrave de Bade-Dourlack, auroit pû tracer les rues concentriques au Château, qui ont deux & trois cens toises de rayon, comme je puis l'estimer à vûe d'œil.

CHAPITRE II.

De l'ellipse, premierement considérée comme étant faite.

PROBLEME II.

Trouver 1°. *le centre*; 2°. *les diametres conjugués*; 3°. *les axes*; 4°. *les foyers d'une ellipse donnée.*

1°. SOit l'ellipse donnée DEIG (*Fig.* 110) on tirera les lignes OO, *o o* paralleles entr'elles, & terminées à la circonférence de l'ellipse. On les divisera en deux également en *r* & R, par où on fera passer une ligne DI qui sera un diametre : le point C, milieu de ce diametre, sera *le centre* que l'on cherche.

1°. Pour le centre. *Fig.* 110.

2°. Si par le centre C on tire une ligne EG parallele à OO, cette ligne EG sera *un diametre* conjugué au diametre DI, parce qu'il est parallele aux ordonnées *o r* OR & à la tangente T*t*, tirée par le point D du diametre DI.

2°. Pour un diametre.

3°. Si du point C comme centre & d'une ouverture de compas prise à volonté, on décrit un arc KH qui coupe la circonférence de l'ellipse en K & en H, & que de ces points comme centres & d'une ouverture de compas prise aussi à volonté, on fasse une section de deux arcs de même rayon en Z, la ligne AB tirée par les points C & Z, & terminée à la circonférence de l'ellipse de part & d'autre, sera *un des axes*, & la ligne LM qui lui sera perpendiculaire, passant par le centre C, sera *l'autre axe*.

3°. Pour les axes.

4°. Si l'on prend l'intervalle AC avec un compas, & qu'on s'en serve comme de rayon d'un cercle, qui auroit L ou M pour centre, faisant des arcs qui coupent l'axe AB aux points F & *f*, ces points seront les *foyers de l'ellipse*.

4°. Pour les foyers

DEMONSTRATION.

Par la définition (Art. 20) les diametres sont des lignes qui

coupent en deux également toutes les lignes paralleles entr'elles, par conséquent aussi la surface de l'ellipse, puisqu'on peut considérer sa surface comme composée d'une infinité de lignes paralleles infiniment proches.

2°. Par la définition (avant l'Art. 24) le diametre parallele à ces lignes, & à la tangente t T est appellé *conjugué* au premier DI.

3°. Par la construction, les points K & H sont également éloignés du centre C, & l'on a fait AZ perpendiculaire sur la corde qui seroit tirée de H en K, laquelle seroit une double ordonnée, qu'elle couperoit en deux également & à angle droit, ce qui ne convient qu'à un axe par la définition.

4°. Enfin les points F & f sont les foyers de l'ellipse, parce que la somme des lignes FL, Lf est égale, par la construction, à la ligne AB; & si les lignes FD, Df prises ensemble lui sont aussi égales, le point D sera à la circonférence de l'ellipse. (Art. 29.)

USAGE.

On trouvera dans la quatrieme Partie de ce Traité des occasions continuelles de faire usage de ce Problême, parce que l'ellipse est la courbe la plus ordinaire dans la coupe des pierres.

PROBLEME III.

Par un point donné mener une tangente à une ellipse donnée.

Le point donné peut être à la circonférence ou au-dehors.

Fig. 111. 1°. S'il est à la circonférence, par exemple en D (*Fig.* 111) & que les foyers Ff soient donnés, on menera à ce point D des lignes FD, fD qui feront un angle en D, qu'on divisera en deux également par la ligne Dn; si par ce point D on fait TD perpendiculaire à Dn, cette ligne TD ou Tt sera la tangente que l'on cherche.

Ou bien on fera fa = au grand axe GA, on tirera a F qu'on divisera en deux également en t d'où tirant une ligne au point donné D, la ligne tD sera la tangenge demandée.

2°. Si on n'a pas les foyers, ayant trouvé le centre C (*Fig.* 111) on menera par le point donné D le diametre DB, & un autre à volonté comme GA, par l'une des extrêmités duquel A ou G on menera AE parallele à DB, qui rencontrera l'el-

lipſe en E, par où l'on menera au point G la ligne EG, laquelle ſera une ordonnée au diametre DB, à laquelle ſi on tire une parallele par le point D, cette ligne *t* T ſera la tangente demandée. Pl. 10. Fig. 111.

3°. Si le point donné D eſt hors de l'ellipſe, comme en *d*, ayant mené par le centre C la ligne *d* C, on fera CK perpendiculaire à C*d*, & égale à CL, interſection de la ligne C*d*, & de la circonférence de l'ellipſe; enſuite ayant tiré *d* K, on lui fera la perpendiculaire KH, qui coupera *d* C prolongée en H, on portera la diſtance CH en C*i* ſur la ligne C*d*, enſuite on menera au diametre L*m* une ordonnée quelconque * par la conſtruction précédente, ce qui eſt aiſé; car il ne s'agit que de mener une parallele à *m*L par un point pris à volonté, comme *o* P, la diviſer également en deux au point *q*, & mener *q* C ou ſa parallele *o r*, à laquelle on menera une parallele *i* K par le point *i*, qui rencontrera la circonférence en K, la ligne menée de ce point *k* au point donné *d* hors de l'ellipſe, ſera la tangente que l'on cherche.

* Voyez l'art. 36. l. 1.

Et ſi l'on prolonge K*i* en *k* ce point ſera encore à l'attouchement d'une autre ligne menée de *d* en *k*, de ſorte que du même point donné *d*, on peut mener deux tangentes à l'ellipſe AEKGA, une d'un côté, l'autre de l'autre.

DEMONSTRATION.

Pour le premier cas de ce Problême, il eſt démontré dans les ſections coniques que les angles FD*t*, & *f* DT ſont égaux entr'eux; ſi on ajoute de part & d'autre les angles FD*n*, & *f*D*n* égaux entr'eux par la conſtruction, les angles *n*D*t* & *n* DT ſeront auſſi égaux entr'eux, par conſéquent droits; donc *t* T ſera une tangente au point D. *Fig.* 111.

Secondement. (*Fig.* 111) A cauſe des paralleles AE, CB, GC : CA : : GS : ES; mais AC, demi-diametre eſt égal à GC, GS = SE, laquelle eſt une ordonnée au diametre DB, puiſqu'il la diviſe en deux également; & (par la conſtruction) D*t* ou *t* T eſt parallele à SE; donc D*t* eſt une tangente de l'ellipſe au point D, *ce qu'il falloit faire.*

Troiſiemement. Par la conſtruction, on a fait CH troiſieme proportionelle à la diſtance du centre C au point *d*, rencontre de

la tangente Kd & du demi-diametre CL prolongé en d, & à ce demi-diametre CL, on a fait aussi Ci=CH, donc dC : CL :: CL : Ci, distance du centre C à la sous-tangente id;
* Art. 46. donc * dK & dk sont des tangentes à l'ellipse aux points K, ou k menées du point donné d hors de cette courbe; *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême est nécessaire pour éviter les jarrets dans la jonction des lignes droites avec des arcs elliptiques, dans plusieurs circonstances d'arrondissemens des parties droites contigues aux courbes, comme il arrive souvent dans l'Architecture, parce que l'angle fait par la rencontre d'une courbe & de la tangente est le plus petit qu'on puisse imaginer; donc il differe infiniment peu de la ligne droite à la jonction de la courbe, par conséquent la transition de la ligne droite à la courbe devient imperceptible à la vûe.

De l'ellipse considérée comme à faire.

PROBLEME. IV.

Un diametre quelconque & une ordonnée à ce diametre étant donnés, trouver son conjugué.

Fig. 113. SOit AB (*Fig.* 113) le diametre donné & ED son ordonnée, du point C, milieu de AB, ayant élevé une perpendiculaire CH, on décrira le quart de cercle HFB, on menera ensuite, par le point E de la rencontre de l'ordonnée avec le diametre AB, une ligne EG parallele & égale à CH, qui coupera le cercle en F, par où & par l'extrêmité D de l'ordonnée ED, ayant tiré la ligne FD, on lui menera par le point G la parallele GL, qui rencontrera ED prolongée en L. Je dis que EL sera égale au demi-diametre conjugué que l'on cherche; ainsi ayant mené par le point C la ligne IK parallele à EL, on portera du centre C de part & d'autre CK & CI égale à EL.

DEMONSTRATION.

A cause des paralleles GL, FD, on aura EG : EL :: EF :

ED, mais EG (Conſtr.) = CH & EL = CK, donc EF : CH :: ED : CK ; c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre AB dans le cercle ſont en même raiſon que celles de la courbe qui paſſeroit par les points K & D, ce qui eſt une propriété de l'ellipſe ; * donc CK, ou ſon double KI, eſt le diametre conjugué à AB ; *ce qu'il falloit trouver.* * Art. 41.

PROBLEME. V.

Les diametres conjugués étant donnés, trouver les axes de l'ellipſe.

Soient (*Fig.* 112) les lignes AB, DE données pour diametres conjugués d'une ellipſe à décrire, qui ſe coupent également en C où eſt ſon centre. Du point A, extrêmité du plus grand, ayant abbaiſſé la perpendiculaire AP, on la prolongera vers G, portant la moitié CD du plus petit en AG. Puis ayant tiré GC, on la diviſera en deux également, en *m*, d'où l'on tirera par le point A la ligne *mg*, qu'on fera égale à *m* G ; ſi du point *g* on mene par le centre C la droite indéfinie *gx*, on aura la poſition du grand axe, dont la longueur X*x* ſera déterminée en portant de part & d'autre du centre C la ſomme des lignes C*m*, *m*A en CX & C*x* ; enſuite on élevera au point C une perpendiculaire à *gx*, ſur laquelle on portera de part & d'autre la longueur A*g* de C en Y, & de C en *y* ; la ligne *y*Y ſera le petit axe ; *ce qu'il falloit trouver.* Fig. 112.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre & pour rayon CX, on décrira un quart de cercle XH, & l'on menera par le point A la ligne K*o*, perpendiculaire à XC qui paſſera à l'interſection K de l'arc de cercle HX, & de la droite CG, on fera A*t* parallele à C*g* & *tu* à K*o*.

Par la ſuppoſition, le point A qui eſt à l'extrêmité d'un des diametres, eſt à la circonférence de l'ellipſe AEBD, il faut démontrer que les points X & Y ſont à la même circonférence, & à l'extrêmité des axes. Puiſque *mg* = *m* C (par la conſtruction) *mt* ſera égale à *m*A, & *t*C = A*g* = CY (par la conſtruction). Or à cauſe des triangles ſemblables CK*o*, C*tu*, K*o* : A*o* = *tu* :: CK = CX = CH : C*t* = CY ; donc (Art. 41) le point Y eſt

à la circonférence de l'ellipse, de même que le point X, comme il est aisé de le prouver par la même raison.

Et parce que les lignes CX & CY sont perpendiculaires entr'elles, ce sont des demi-axes; donc X *x* & Y *y* sont les axes demandés; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Pl. 10. Fig. 112. De-là on tire une maniere aisée de décrire l'ellipse par un mouvement continu, au moyen d'un instrument composé de trois pieces; sçavoir, d'une petite branche droite C *m*, d'un triangle *m* AP, dont l'angle *m* est attaché par un pivot en *m* à cette branche, & d'une grande regle qu'on applique sur le diametre DE, à laquelle la petite branche C *m* est attachée sur le point C par un pivot sur lequel elle peut tourner, ainsi que l'angle *m* du triangle à son autre extrêmité *m* : si l'on conduit avec la main l'angle P en droite ligne au long de la regle DE, le crayon posé au sommet de l'angle A décrira en même-tems la demie ellipse XY *x*; on peut même sans remuer la regle faire passer le triangle A *m* P, & la branche *m* C de l'autre côté de la regle DE; mais sa largeur couvrira une partie qu'on ne pourra tracer, c'est pourquoi il faudra la changer de côté.

Il faut remarquer que la ligne GP n'est pas toujours la somme des demi-diametres CD, & de la perpendiculaire AP, mais qu'elle en est quelquefois la différence, lorsque la direction de la branche C *m* tombe entre les points A & P.

USAGE.

Cette proposition est très-utile dans plusieurs traits de la coupe des pierres où les axes conjugués sont donnés, comme aux arcs-droits des *descentes*, en ce qu'elle fournit les moyens de tracer les ellipses par le mouvement continu du trait du jardinier, dont nous parlerons au Problême VII.

PROBLEME VI.

Un axe & un point à la circonférence de l'ellipse étant donnés, trouver l'autre axe.

Ce Problême n'est qu'une espece de Corollaire du Problême IV,

IV, parce que les ordonnées aux axes étant des perpendiculaires en donnant un point à la circonférence, c'est comme si l'on donnoit une ordonnée à l'axe grand ou petit.

Premierement, *le grand axe étant donné, si l'on cherche le petit.* *Fig. 114.*

Soit AB le grand axe (*Fig.* 114) & D le point donné à la circonférence de l'ellipse, on abaissera de ce point sur AB la perpendiculaire indéfinie OF, puis du point C, milieu de AB, pour centre, & CB pour rayon, on décrira un quart de ce cercle B *b* qui coupera OF en R; on portera sur OF le rayon CB, qui donnera le point F, & la longueur OD en C *d*, parallelement à OF. Par les points R & *d*, on tirera R*y*, qui coupera l'axe donné AB en *y*.

Si de ce point *y* on tire au point F une ligne *y* F, elle coupera CD prolongé en X; je dis que CX est la moitié du petit axe que l'on cherche.

Secondement, *le petit axe étant donné, si l'on cherche le grand.*

Par le point D donné à la circonférence, on tirera sur CX la perpendiculaire D *d*; puis du point C pour centre, & la moitié CX du petit axe donné pour rayon, on décrira le quart de cercle XE qui coupera D *d* au point V, & la perpendiculaire AB sur le milieu C au point E, par les points E & V, on tirera E *z* qui coupera CX prolongée au point Z; si par les points Z & D on tire la droite ZB, elle coupera la perpendiculaire AB au point B: je dis que CB est la moitié du grand axe que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Pour le premier cas, à cause des triangles semblables O*y*R; *y* C *d*, & *y*OF, *y*CX, on aura *y* O : OR : : *y* C : C *d*, & *y* O : OF : : *y* C : CX, donc OR : OF = C *b* = CB : : OD = C *d* : CX; donc * le point X est à la circonférence de l'ellipse, & à l'extrêmité de l'axe conjugué à AB. * Art. 41.

Pour le second cas, à cause des triangles semblables ZCE, Z *d* V & ZCB, Z *d* D; on aura Z *d* : *d* V : : ZC : CE, & Z *d* : *d* D : : Z *c* : CB; donc *d* V : *d* D : : CE = CX : CB; donc (par l'Art. 41) le point B sera à l'extrêmité du grand axe; *ce qu'il falloit trouver.*

USAGE.

Entre plusieurs usages de ce Problême, on fera voir au qua-

trieme Livre qu'il eſt néceſſaire pour le trait du quartier de vis ſuſpendu, ſuivant la maniere du P. Derand & de M. de LA RUE, & pour le trait de la trompe ſphérique dans un angle ſaillant.

Il pourroit auſſi ſervir pour la diminution des colonnes, ſi au lieu de la conchoïde de NICOMEDE, qu'on y employe ordinairement, on vouloit ſe ſervir d'un arc elliptique, le petit axe donné eſt le diametre de la baſe; le point à la circonférence eſt l'extrêmité du diametre ſous l'aſtragle du chapiteau, éloigné du petit axe des deux tiers ds la longueur de la colonne, ſi le renflement eſt au tiers.

PROBLEME VII

Les axes d'une ellipſe étant donnés, la décrire par pluſieurs points, ou par un mouvement continu.

Fig. 110. Premierement, par pluſieurs points trouvés au compas. (*Fig.* 110.)

Ayant pris la moitié du grand axe pour rayon, on portera une des pointes du compas en L, d'où, comme centre, on décrira des arcs qui couperont cet axe en F & *f* pour avoir les foyers.

De ces points F & *f* pour centres, & d'un intervalle pris à volonté pour rayon, pourvû qu'il ſoit moins grand que *f* A, ou FB, on décrira des arcs de cercle en quatre endroits 1, 2, 3, 4, au-deſſus & au-deſſous de l'axe AB, comme en 1 *n*, 2 *n*, 3 *n*, 4 *n*, puis on portera la même longueur du rayon de A en P, & de l'ouverture PB (reſte de la longueur du grand axe) pour rayon, on décrira des mêmes centres F & *f* des arcs de cercle, qui couperont les précédens aux points 1, 2, 3, 4, qui ſeront à la circonférence de l'ellipſe. On recommencera pareille opération avec des ouvertures de compas plus ou moins grandes, pour avoir encore quatre autres points; & ainſi on trouvera tant de points & ſi près les uns des autres, qu'on jugera à propos pour tracer ce contour à la main de l'un à l'autre avec aſſez d'exactitude, ou mieux dans le grand, avec une regle pliante également mince, qu'on peut arrêter & courber par le moyen de quelques pointes de cloux plantés ſur les points trouvés en dedans & en dehors, ou tous en dehors en appuyant de la main gauche par dedans, pendant qu'on trace de la droite.

Secondement, par un mouvement continu, on peut le faire de plusieurs façons.

1°. Par le moyen d'un cordeau, on fait ce que nous venons de faire avec le compas ; on plante deux cloux aux foyers F & f, trouvés comme nous venons de le dire ; puis ayant fait une boucle au bout du cordeau, & une autre à distance de celle-ci, parfaitement égale à la longueur du grand axe AB, on met chacune de ces boucles à un clou des foyers ; & comme le cordeau est lâche, on pousse son pli FDf pour le faire tendre, & y faire couler un crayon D, ou une pointe de quelque outil ; ainsi le même cordeau qui faisoit le pli FDf fera au milieu le pli FLf, & le crayon qui étoit en D, sera transporté en L, ce qui est si connu de tous les ouvriers, qu'il est inutile de l'expliquer. Cette construction, qu'on appelle *le trait du jardinier*, quoique méchanique, donne l'ovale Géométrique, que j'appelle toujours *ellipse*, pour la distinguer des autres ovales. Fig. 110.

Il est clair que pour avoir l'ellipse entiere, il faut faire passer le cordeau en dessous d'AB, comme au-dessus.

DEMONSTRATION.

Nous avons dit à l'article 29 du premier Livre, qu'une des principales propriétés de l'ellipse consiste dans l'égalité de la somme des deux lignes tirées des foyers au même point de la circonférence, avec la longueur du grand axe ; donc la courbe tracée est la vraie ellipse, qui est une des sections coniques, puisque la construction par plusieurs points trouvés au compas, & le cordeau par le mouvement continu, fournissent toujours la même égalité, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Cette pratique est très-aisée, mais peu exacte dans les grands ouvrages, parce que le cordeau s'allonge selon qu'il est plus ou moins long & tors, & que l'on pousse le crayon dans le pli avec une force plus ou moins grande. Une chaînette est moins sujette à cet inconvénient, mais elle a les siens ; car outre qu'elle cause des ondulations, elle est encore un peu susceptible de l'inégalité d'extension, causée par son poids dans un plan vertical, ou par son frottement sur un plan horisontal ; de

ſorte qu'elle ne peut ſe remettre en ligne droite, ſuivant les loix de la Méchanique, puiſque ce poids ou ce frottement ſont une troiſieme puiſſance qui fait effort contre celles des bouts, leſquelles ne peuvent en tirant l'une contre l'autre, faire dreſſer la chaîne, que lorſque la troiſieme eſt infiniment petite; c'eſt pourquoi nous allons propoſer une autre maniere organique qui n'a pas ces défauts.

Seconde Méthode de tracer l'ellipſe par pluſieurs points, ſans le ſecours des foyers, ſeulement avec deux ouvertures de compas, ou ſans compas, par le moyen d'un cercle & d'une meſure conſtante.

Fig. 116. Soient (*Fig.* 116) les axes donnés AB, HF : on portera la moitié du petit axe CH de C en E ſur le grand, & l'on diviſera leur différence EB en deux également en M.

Du point C pour centre, & de l'intervalle CM pour rayon, on décrira un cercle : il nous ſuffit ici pour exemple d'en mettre le quart N 2 M : ſur la circonférence de ce cercle, on prendra à volonté autant de points qu'on en voudra pour tracer l'ellipſe avec plus ou moins d'exactitude, comme ici les points 1, 2, 3, deſquels comme centres & toujours du même intervalle CM pour rayon, on décrira de petits arcs qui couperont l'axe AB prolongé aux points M, *g*, *h*, d'où l'on tirera à leurs centres 1, 2, 3, des lignes 1 M, 2*g*, 3*h*, ſur leſquelles on portera toujours la moitié de la différence des demi-axes ME, ou MB en 1*x*, 2*x*, 3*x*, laquelle donnera tous les points *x*, *x*, *x* à la circonférence de l'ellipſe demandée.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre & des longueurs CA, & CH pour rayons, on décrira deux quarts de cercles AQ*b*, *rq* H; puis par un des points trouvés, comme P, on tirera les lignes *r*Q, & PL perpendiculaires aux axes; & enfin par le centre C, la ligne C*q*.

A cauſe des paralleles *r*C, P*q*, on aura C*q* : CQ :: *r*P : *r*Q; mais C*q* = CH, & CQ = C*b*; donc CH : C*b* :: *r*P : *r*Q; c'eſt-à-dire, que les ordonnées de l'ellipſe à l'axe AB, ſont proportionelles à celles du cercle AQ*b* au même axe qui en eſt le diametre; donc (Art. 41 du premier Livre) le point P eſt à la circonférence de l'ellipſe; *ce qu'il falloit démontrer.*

La même organiquement par un mouvement continu.

Ayant divisé la différence A *e* des deux demi-axes CA, C *h* en deux également en *m*, ou leur somme *e* B en M, on assemblera deux regles égales chacune à la moitié MB, par le moyen d'une cheville ou d'un clou arrondi, comme C *d*, *d* G en *d*, ou deux regles d'inégale longueur, l'une DC égale à la différence A *m*, l'autre D *a* au demi-axe AC; puis ayant pris une troisieme regle de longueur égale à quatre fois C *d*, ou deux fois *e* B, pour la premiere construction, avec les regles C *d*, *d* G, ou seulement au grand axe pour la seconde, on attachera à son milieu C, la regle C *d*, ou CD, avec un pivot; en sorte que le point C soit sur l'alignement d'un de ses côtés *e* G, puis on portera sur la branche *d* G la longueur A *m*, pour y poser un crayon en *x*, ou sur la regle D *a* en D *g*, pour y poser une pointe propre à faire couler le long de la regle AB, & le crayon en *a*. Dans cette disposition il ne s'agit que de faire couler le point G, dans le premier cas, ou *g* dans le second, au long de la regle AB, les crayons posés en *x*, ou en *a* traceront l'ellipse qu'on demande, comme il est clair par la démonstration précédente, pour la construction par plusieurs points, puisque celle-ci est parfaitement la même réduite en instrument. *Fig.* 118.

Autre maniere organique avec l'instrument appellé compas à ovale.

Lorsqu'il ne s'agit que de former un quart d'ellipse, le compas à ovale est une simple équerre, sur les côtés de laquelle on fait couler deux pivots attachés à certaine distance, à une regle au bout de laquelle est un crayon pour le tracer. D'où il suit que pour une ellipse entiere, il faut assembler quatre équerres séparées par une coulisse, pour laisser le passage de ces pivots; supposant qu'on ne veuille tracer qu'une demi-ellipse, il faut un instrument composé de deux équerres avec une coulisse entre deux, comme on voit à la *Fig.* 117. ABCE; & afin que la branche du milieu soit ferme, on y ajoute des liens, comme *m n*, MN, qui empêchent qu'elle ne puisse s'incliner vers A ni vers B. *Fig.* 117.

On prend ensuite une troisieme regle RT, qu'on fait entrer dans trois anneaux de fer ou de cuivre quarrés H, G & K, dans

Pl. 10. Fig. 117. lesquels on l'enfile, & afin de pouvoir les fixer où l'on veut, on y ajoute une vis.

A deux de ces anneaux faits en façon de petite boëte, tient une queue en forme de pivot conique, qu'on fait entrer par les bouts de la rainure CE, & dans la rainure AB, si l'on en fait une, qui n'est nécessaire que pour mieux assûjettir le mouvement de la regle RT; c'est pourquoi on fait ces rainures plus larges au fond que par le haut, & les pivots étant coniques, quoiqu'ils puissent être cylindriques. A la boëte K, au lieu de pivot, on met un crayon ou une pointe, comme on le juge à propos pour mieux tracer.

L'instrument étant ainsi fait, il ne s'agit plus que de sçavoir déterminer la distance des pivots HG entr'eux, & à l'égard du crayon K, pour tracer l'ellipse suivant la longueur des axes donnés.

Ayant porté sur le grand axe AB la longueur CD de la moitié du petit, de A en F, la différence des deux demi-axes FC, sera cette distance qu'on cherche du pivot H au pivot G; & la longueur CD sera celle du pivot G au crayon K.

Les pivots & le crayon étant ainsi arrêtés par le moyen des vis, afin qu'ils ne puissent varier; il n'y a qu'à faire mouvoir la regle RT sur ses pivots, ensorte qu'il y en ait toujours un engagé dans la rainure des coulisses AB, EC, qui sont ici à angle droit, parce que les axes sont donnés; & à mesure que la regle tournera sur ces deux pivots, le crayon K tracera l'ellipse demandée.

J'ai dit que ces deux coulisses étoient à angle droit, parce que les deux axes sont donnés; car si au lieu des axes on avoit donné deux diametres conjugués, elles devroient faire entr'elles d'autres angles que ces diametres, un obtus d'un côté, & un aigu de l'autre, qui seront d'autant plus aigus & obtus, que Fig. 115. les diametres conjugués approcheront de l'égalité; ainsi (*Fig.* 115.) ayant porté la distance CB de D en F, on fera la coulisse inclinée à l'égard du diametre donné AB, suivant la ligne CF, ou ce qui est la même chose, suivant les angles FCB & ACF, & l'on aura le crayon en D, & les deux pivots en P & F, de sorte que si les lignes CB & DP étoient parfaitement égales, cet instrument ne pourroit plus avoir lieu.

Il faut remarquer que la distance DP qui est la différence

de la perpendiculaire FP, & du demi-diametre CB, peut tomber entre les points D & P, si le demi-diametre CB est plus petit que DP.

Secondement, qu'on peut s'épargner la peine de faire une couliſſe sur AB, pourvû qu'on tienne le pivot G, (*Fig.* 117) ou P, (*Fig.* 115) toujours appliqué à la regle AB. *Fig.* 117.

Si l'on vouloit en même-tems tracer une seconde ellipse parallele, ou à peu près, à la premiere, il n'y auroit qu'à ajouter un quatrieme anneau en X, pour y appliquer un second crayon, comme on a fait en K; mais ces deux ellipses ne seront pas semblables, parce que leurs diametres ne seront pas proportionnels, de sorte qu'elles ne peuvent pas être la section d'un berceau ou cylindre creux de même épaiſſeur; la raison est que si des demi-axes CD, CB, on ôte des quantités égales D*d*, BL, les restes C*d*, CL ne sont plus en même proportion, C*d* n'est plus à CL, comme CD à CB; car supposant CD = 2, CB = 4, D*d* = 1, C*d* sera à CL, comme 1 à 3; ce qui est tout différent du rapport supposé CD : CB : : 2 : 4.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & de l'intervalle de la moitié du grand axe CB pour rayon, on décrira le quart de cercle SB, & par le point K, on tirera sur CB la perpendiculaire O*r*, qui coupera le cercle au point O, & du centre C la ligne CO, qui sera parallele à HK, parce que OK est parallele à CH, & que HK = CS = CO; donc COKH est un parallelogramme. Que HK soit égal à CS, cela est évident par la construction, puisque GK = AF, & GH = CF, & CS ou BC = CA; or à cause des paralleles, on aura CO : GK : : O*r* : K*r*; mais CO = CS, & GK = CD; donc CD : CS : : *r*K : *r* O : donc (Art. 41) la courbe DKB est une ellipse.

Il faut remarquer, 1°. Que les deux triangles rectangles GHC, GK*r*, qui sont semblables, varient continuellement par le changement de position de la regle RT, en sorte que les côtés CH, CG, G*r*, *r* K augmentent ou diminuent, & cependant ils ne font jamais que la somme des quarrés de leurs hypotenuses qui sont constantes, HG, KG.

2°. Que l'intervalle CH, qui est la distance du centre C à un

pivot, eſt toujours égal à l'excès KO de l'ordonnée du cercle, ſur celle de l'ellipſe.

D'où l'on peut tirer une maniere aiſée de trouver autant de points que l'on voudra d'une ellipſe à peu près parallele à une autre donnée, comme *d x* L, en imitant ce qui a été fait avec l'inſtrument. Il n'y a qu'à porter l'intervalle OK en CH, ou *o k* en C*h*, pour avoir les inclinaiſons de pluſieurs lignes HK, *h k*, ſur leſquelles on portera la diſtance donnée D*d* en KX, & *k x*, pour mener par les points donnés & trouvés *d*, X, *x*, L l'ellipſe demandée, à peu près équidiſtante à DK*k*B donnée.

Fig. 111. Si l'on veut qu'elle ſoit exactement équidiſtante, il faut connoître les foyers F*f*, (*Fig.* 111) mener de chacun une ligne au point donné D, ou tout autre pris à volonté, & diviſer l'angle FD*f* en deux également par une ligne D*n*, ſur laquelle on portera du point D la largeur du bandeau, archivolte, ou tout autre ouvrage qu'on veut faire exactement de même largeur par tout.

Pour rendre cette opération plus facile, il n'y a qu'à prendre au contour de l'ellipſe donnée, ou toute autre courbe, pluſieurs *Fig.* 117. points à volonté pour centre 1, 2, 3, &c. deſquels avec l'intervalle donné D*d* pour la largeur, on fera autant d'arcs de cercles, auſquels on menera à la main une courbe tangente *a t t d*, qui ſera celle qu'on cherche.

Mais il faut obſerver qu'une telle courbe, & toute autre qui n'eſt pas une concentrique ſemblable à la courbe donnée, n'eſt pas convenable aux ceintres qui doivent prendre leur naiſſance ſur un piédroit, parce qu'elle y feroit un jarret en *a* avec le piédroit *a p*, lequel ſera d'autant plus ſenſible & choquant à la vûe, que l'intervalle D *d* ſera grand; car il eſt viſible que les perpendiculaires à la courbe 1 *a*, & A*a* ſe couperont en quelque point comme en *a*; de ſorte que tout l'arrondiſſement de la naiſſance A 1, ſe réduit à la courbe intérieure en un ſeul point *a*, où ces deux perpendiculaires ſe croiſent; par conſéquent puiſque une partie ſemblable s'y trouve de moins, il s'y fera un angle avec le diametre AB, plus aigu que l'angle mixte *a* A 1, qui eſt droit à ſon origine A, ou infiniment peu différent du droit, & égal à celui d'un piédroit perpendiculaire ſur AB; donc l'angle mixte de la courbe *d a*, avec le piédroit *a p* perpendiculaire ſur AB, fera un angle différent qui ſera d'autant plus

plus aigu, que l'arc A 1 fera grand, par conféquent un jarret; ce qui eft infupportable en Architecture.

COROLLAIRE.

De ce que nous venons de dire, il fuit encore que la méthode de ceux qui prennent la mefure de la largeur à l'intervalle des deux courbes fur les diametres de l'ellipfe donnée, comme l'enfeigne le P. DECHALES, Liv. 5. Prop. 21, eft encore très-fautive; car il eft vifible que fi cette diftance eft, par exemple, D *y* fur D *n*, ou D *u* fur DC, le point *u* s'approche plus de la circonférence que le point *y*, par conféquent l'ellipfe ne fera plus équidiftante à l'extérieure AD *m* G donnée; de forte qu'en cet endroit, le bandeau ou archivolte qu'on fe propofe de faire de même largeur, fe trouvera plus étroit. Or la ligne D *n* qui divife l'angle FD *f* en deux également, ne tombe jamais fur les rayons, que lorfque le point D eft à l'extrêmité du petit diametre ou axe; car (par la troifieme Prop. du fixiéme Livre d'Euclide,) la ligne qui divife un angle d'un triangle *f* DF en deux également, coupe la bafe de ce triangle proportionellement aux côtés; mais les rayons ou demi-diametres coupent tous la bafe *f* F en deux également en C, donc ils ne divifent pas l'angle FD *f* en deux également; nous démontrerons encore d'un autre maniere la fauffeté de cette pratique au Chap. VIII. du quatrieme Livre.

Fig. 111.

Alia interior ellipfis non tantùm concentrica, fed *etiam æquali intervallo* diftans ab interiori, quæ diftantia fumatur fecundùm radios à centro procedentes.

REMARQUE.

Quoique le *compas à ovale* foit un affez bon inftrument, on peut s'en épargner la façon, & opérer très-jufte dans les grands ouvrages en cherchant plufieurs points de la circonférence de l'ellipfe qu'on fe propofe de faire, fur lefquels on appuye une regle pliante fort mince, & d'une épaiffeur bien égale, qu'on arête de chan, ou avec les mains, ou avec des pointes de clouds, comme nous l'avons dit ci-devant, au long de laquelle on peut tracer un contour auffi ferme & auffi net qu'avec aucun inftrument; voici d'autres Problêmes pour l'une & l'autre méthode.

PROBLEME VIII.

Les diametres conjugués étant donnés, tracer l'ellipse par plusieurs points, ou par un mouvement continu, sans connoître les axes ni les foyers.

Fig. 115. Soient (*Fig.* 115) les diametres conjugués AB, ED; par le point D, extrêmité du plus grand, on tirera sur AB la perpendiculaire indéfinie FP, sur laquelle on portera la longueur AC, de D en F, d'où l'on tirera au centre C la ligne FC; ensuite du point I, pris à volonté sur CD, on menera une parallele IG à la ligne FP, & une autre IH au diametre AB. Si du point G, où IG coupe FC, pour centre, & pour rayon DF ou AC, on fait un arc de cercle qui coupe IH en H & *h*; je dis que les points H & *h* sont à la circonférence de l'ellipse.

DEMONSTRATION.

Soit pris CL sur AB égale à HI, & menée LH qui sera parallele à CD.

A cause des paralleles IG, PF, on aura CD : DF : : CI : IG, mais DF = GH = AG, par la construction, & CI = LH; & à cause du triangle rectangle HIG, $\overline{IG}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{HI}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CL}^2$ = au rectangle BL × LA (par la cinquieme du deuxieme Livre d'Euclide) donc si au lieu de CI on met son égale LH, & au lieu de DF son égale CA, on aura $\overline{CD}^2 : \overline{LH}^2 : : \overline{CA}^2 :$ BL × LA : donc le point H est à la circonférence de l'ellipse; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'où il suit qu'on peut décrire une ellipse par un mouvement continu autour de deux axes conjugués sans autre instrument qu'une regle & une fausse équerre, ou deux autres regles qui fassent un angle égal à FCB, trouvé comme nous venons de l'enseigner, & une troisieme percée, suivant les distances P, D, F, pour mettre une cheville en P & en F, assez saillantes pour pouvoir y appuyer les regles FC, & CB; on

mettra un crayon au troisieme trou en D, ou une pointe propre à tracer l'ellipse; si l'on fait couler le point F où est la cheville le long de la regle FC, & la cheville P le long de la regle CB, le crayon D tracera le quart de l'ellipse D *h* B; & si l'on en fait de même de l'autre côté de la ligne FC, transportant la regle CB en CA, de même que la regle FP, on tracera l'autre quart d'ellipse AHD, qui fera avec le précédent la demie-ellipse ADB, *ce qu'il falloit faire* par un mouvement continu. Pour ne pas changer la regle CB, il faut la faire longue, en sorte qu'elle excéde les points A & B de chaque côté, de la longueur de DP.

USAGE.

Ce problême peut servir à tracer des arcs rampans, & les projections des faces elliptiques en talud, dont on n'a ordinairement que les diametres conjugués, pour s'épargner la peine d'en chercher les axes; mais on peut le faire par plusieurs points d'une maniere encore plus simple.

SECONDE MANIERE.

Soient les diametres conjugués AB, DE: (*Fig.* 121) ayant mené par le point D la ligne DT, parallele à AB, & par le point C la perpendiculaire CK, qui rencontrera DT au point K, on prolongera cette ligne vers F. Du point C pour centre, & pour rayon CK, on décrira le quart de cercle HK, & du même centre & pour rayon le demi-diametre CB, on décrira un autre quart de cercle FB, que l'on divisera en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, 1, 2, 3, F. Il convient pour la commodité & la promptitude de l'opération qu'elles soient égales, parce qu'il faut diviser l'autre quart de cercle HK, en un même nombre de parties, & si elles étoient inégales, il faudroit qu'elles fussent proportionelles à leurs correspondantes. Par chacune de ces divisions 1, 2, 3, dans l'un & l'autre quart de cercle, on menera des paralleles au diametre CB, comme a a, *bb*, *cc*, dans le quart de cercle HK: & 1 L, 2 M, 3 N, dans le quart de cercle BF; ensuite par les mêmes points 1, 2, 3, du même quart de cercle FB, on menera d'autres lignes 3 *g*, 2 *h*, 1 *i* paralleles à FC, par conséquent perpendiculaires à AB, *Fig.* 121.

lesquelles couperont ce diametre aux points *g*, *h*, *i*; on menera par ces points des lignes *gc*, *hb*, *ia*, paralleles à CD, lesquelles couperont les précédentes a a, *bb*, aux points a, *b*, *c* qui seront à la circonférence de l'ellipse.

Ces points étant trouvés, il sera bien aisé de trouver ceux de l'autre côté du diametre ED; car il n'y aura qu'à porter les longueurs *o*a, *pb*, *qc*, en *o*a, *pb*, *qc*, sur les mêmes lignes a a, *bb*, *cc*, de l'autre côté du diametre CD: on aura ainsi plusieurs points à la circonférence de l'ellipse, par lesquels menant une ligne courbe à la main, ou avec une regle pliante, on aura la demie-ellipse, & l'ellipse toute entiere si l'on veut; puisque la moitié CDB est égale à l'autre, qui passeroit par ACE, mais disposée en sens contraire.

DÉMONSTRATION.

A cause des paralleles au diametre AB, & des divisions égales en nombre & proportionelles dans les quarts de cercle HK, & FB, les rayons CK & CF sont divisés proportionellement, de même que les lignes CK & CD le sont aussi entr'elles; donc CD : Cq : : CF : CN; & CD : Cp : : CF : CM; & CD : Co : : CF : CL, mais Cq = gc Cp = hb, & Co = ia: & par la même raison $g3$ = CN, $h2$ = CM, & $i1$ = CL, donc gc : hb : : $g3$: $h2$, c'est-à-dire, que les ordonnées au diametre du cercle, & celles au diametre de l'ellipse sont en même raison
Art. 41. entr'elles; *ce qu'il falloit démontrer*.

PROBLEME IX.

Allonger ou racourcir les ellipses en telle raison qu'on voudra, en sorte qu'elles soient toujours les sections d'un même cylindre.

Soit (*Fig.* 119) le demi-cercle BFE, la base d'un cylindre
Fig. 119. quelconque; ayant abaissé sur son diametre BE, autant de perpendiculaires que l'on voudra *or*, *or*, *c*F, on joindra l'axe AB, qu'on suppose donné ou pris à volonté, au diametre BE, sous quelque angle que l'on voudra comme ABE, & l'on achevera de former le triangle, en tirant une ligne par les extrêmités A, E; ensuite par tous les points *o*, *o* & *c*, on menera des paralleles à la ligne AE, jusqu'à la rencontre de l'axe AB aux

points *h*, *h*, C, par lesquels on élevera sur AB autant de perpendiculaires indéfinies *hi*, *hi*, CD qu'on fera égales aux ordonnées *or*, *or*, CF, en sorte qu'elles soient terminées aux points *ii* D, par lesquels on fera passer une courbe à la main, ou avec une regle pliante, & l'on aura la circonférence de l'ellipse demandée ; nous n'en mettons ici que la moitié pour rendre la figure plus simple, l'autre moitié étant parfaitement égale. Pl. 10. Fig. 119.

DÉMONSTRATION.

Si l'on suppose le demi-cercle EFB relevé en E*d*B, & la demie-ellipse ADB perpendiculaires au plan du triangle ABE, toutes les perpendiculaires aux diametres EB, AB le seront à ce plan ; donc les distances des sommets correspondans F, D, *r* & *i*, qui sont les mêmes que *d*D, R*i*, seront égales aux distances *ho*, C*c* du plan ABE ; puisque les lignes *or* ou *o*R & *hi*, leur sont perpendiculaires, & que ces mêmes *or* & *hi* sont égales entr'elles ; donc elles formeront autant de parallelogrammes, comme *c*CD*d* ; donc si la figure E*d*BDAE est une moitié de cylindre, la ligne C*c* sera son axe, & D*d* qui lui est parallele, sera son côté, c'est-à-dire à la surface : il en sera de même de toute autre jonction des sommets *i* & *r* ou R, comme *hi*, R*o*, *i*R qui sera parallele & égale à *ho*, laquelle est parallele à C*c* ; donc *i*R sera parallele à l'axe C*c*, & par conséquent à la surface du cylindre ; *ce qu'il falloit démontrer.*

Que la ligne ADB soit une ellipse, nous l'avons fait voir au Problême précédent ; puisqu'à cause des paralleles AE, *ho*, C*c*, les lignes EB, & AB sont divisées proportionellement, & que les ordonnées à ces diametres sont égales entr'elles, & par conséquent proportionelles à celles du cercle, par la construction ; donc la courbe ADB est une ellipse géométrique.

Il est à propos que je rende raison pourquoi j'ajoute ici l'épithete *géométrique* au nom propre de l'ellipse formée par ce Problême ; c'est que DAVILER, fameux Architecte, qui a fort bien écrit sur son Art, étoit assez peu versé en Géométrie pour ne pas connoître l'exactitude de cette opération, s'imaginant apparemment qu'elle produisoit une courbe d'une nouvelle espece ; ce qui lui a donné occasion de lâcher une absurdité, dont j'ai montré le faux au commencement, & en plusieurs endroits de cet Ouvrage, *la sévérité des regles de Géométrie*, (dit-il, pag.

274.) *eſt inférieure à la pratique, comme la méthode des cherches ralongées vaut mieux que les figures géométriques, d'autant qu'en cet Art la pratique eſt préférable à la théorie.* Quelle miſere d'entendre ainſi raiſonner un Auteur, un Maître de l'Art, & ce qui eſt encore plus ſingulier, en appeller au Tribunal d'un *ouvrier*, qui n'eſt qu'un eſpece de ſinge d'un Géometre, dans les traits de la coupe des Pierres dont il parle! *Le meilleur* (dit-il) *eſt de prendre quelque habile ouvrier pour ſe conduire, parce qu'il ſoulage & inſtruit.* Quelle inſtruction peut donner un homme qui n'agit que par mémoire, & par une imitation ſervile de ce qu'il a vû faire à un Maître qui ſouvent étoit auſſi borné que lui, incapable de rendre raiſon de ce qu'il enſeignoit à ſon Diſciple, par conſéquent ſuſceptible d'adopter le faux, comme le vrai? N'eſt-ce pas choiſir un aveugle pour ſe conduire? Car enfin remontons à ces Maîtres; de qui ont-ils pû ſe tranſmettre ces préceptes, que d'un Géometre? Un tel raiſonnement ne vaudroit pas la peine d'être relevé, s'il n'étoit trop commun parmi les Architectes, & oſerois-je le dire parmi les Ingénieurs, où il n'eſt auſſi que trop ordinaire d'entendre exalter le mérite de la ſeule pratique. Il me ſemble ouir ces Chirurgiens qui ſe mêlent de Médecine, décrier les Médecins tant qu'ils peuvent; fiers d'avoir fait quelques cures, par le moyen de quelques remedes qu'ils ont tiré de cette ſcience & appliqué au hazard, ils avancent hardiment que la pratique vaut mieux que toute la théorie de la Faculté: mais revenons à notre ſujet, cette digreſſion m'entraîne au-delà des bornes d'une ſimple remarque.

COROLLAIRE I.

Il eſt évident que ſi au lieu du diametre AB on en avoit pris ou donné un plus petit comme aB, la conſtruction auroit été parfaitement la même; cette ligne auroit été diviſée auſſi proportionnellement à la ligne EB, aux points *l*, *m*, *n*, & a; & en élevant ſur ces points autant de perpendiculaires à aB, égales aux correſpondantes *or*: on aura autant de points à la circonférence d'une ellipſe, qui ſera beaucoup plus courte que la précédente, & qui ſera cependant toute à la ſurface du même cylindre, par la même raiſon.

COROLLAIRE II.

D'où il suit : 1°. Que si l'angle B *c* C est aigu ou obtus, le Cylindre en question sera scalene ; de sorte qu'il pourra arriver que si l'on prenoit un diametre égal à BE qui fit avec C *c* un angle égal à B *c* C, la section sera encore un cercle, comme par exemple E *x*. *Fig.* 119.

2°. Que si au lieu du demi-cercle EFB, pris pour base d'un cylindre scalene, on avoit le demi-cercle AGB, & que l'on prit le diametre EB pour l'axe d'une ellipse racoucie, on trouveroit par la même construction *cf* égale à la moitié du grand axe de cette ellipse, en portant CG en *cf*, & *h* L en *o* K ; & ainsi de suite pour toutes les ordonnées.

COROLLAIRE III.

Non-seulement on peut transformer ainsi une ellipse en une autre plus ou moins allongée, ou une ellipse en un cercle, qui soit la base d'un même cylindre, mais aussi l'on peut encore transformer une portion moindre que la demie ellipse, ou que le demi-cercle en une autre plus allongée & plus accourcie, en telle raison que l'on voudra, sans qu'il soit néceſsaire d'en avoir les diametres, par le seul allongement des abscisses, & la répétition des ordonnées correspondantes.

Soit (*Fig.* 120) un Secteur de cercle BC *e*, ou simplement un arc D *e* qu'il faut convertir en portion d'ellipse *d* E qui soit section d'un même cylindre, dont D *e* est portion de la base. Ayant mené par les extrêmités D & *e* deux lignes droites D a, *e* a qui fassent entr'elles un angle droit ou quelconque en a ; on divisera la ligne a D en autant de parties égales qu'on voudra, comme ici en trois, & l'on menera par les points 2 & 3 des paralleles 2 *p*, 3 *p* à la ligne a *e* ; ensuite ayant fait à part l'angle *d* AE, égal à l'angle D a *e*, on divisera A *d* en même nombre de parties égales ou proportionelles ; si les divisions de la premiere ligne a D étoient inégales, & par les points 2 & 3 de division de la ligne donnée A *d*, on menera des lignes 2 P, 3 P, paralleles & égales aux précédentes, correspondantes aux mêmes divisions 2 *p*, 3 *p* ; la ligne courbe qui sera menée par les points EP *p d*, sera la portion *d'ellipse que l'on cherche.* *Fig.* 120.

Pour sentir la raison de ce Corollaire, il faut achever le cercle, en trouvant le centre C de l'arc donné D *e*, & mener

Fig. 119. & 120. CB parallele à a D, qui coupera les lignes p 2, p 3 prolongées aux points f & g.

Présentement, puisque à la Figure 119 nous avons opéré sur les diametres AB, EB; on peut considérer le triangle ABE, comme une section par l'axe du cylindre, dont le rayon CB de la Figure 120 peut représenter une partie de la section de ce plan avec la base B$y$$e$B, & la ligne AD, celle d'un plan parallele à la section par l'axe, lequel retranche des lignes paralleles fp, gp, des parties égales f 2, g 3, non-seulement dans le cercle de la base, mais encore dans l'ellipse de la section; par conséquent, puisque les ordonnées de l'ellipse doivent être égales à celles du cercle de la base du cylindre, si l'on retranche des correspondantes des parties égales, les restes doivent encore être égaux; mais les abscisses, par la construction, sont proportionelles, donc l'arc Ed de la section oblique du cylindre correspond parfaitement à l'arc eD de sa base, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême est sans contredit le plus utile de tous ceux dont on peut faire usage pour la coupe des pierres; car comme la plûpart des voutes sont des cylindres droits ou scalenes, & coupés obliquement par des différentes rencontres de plans ou de cylindres égaux, ou de bases elliptiques égales, on a continuellement besoin d'allonger ou de racourcir les courbes des ceintres, ce que les ouvriers appellent la *cerche ralongée.*

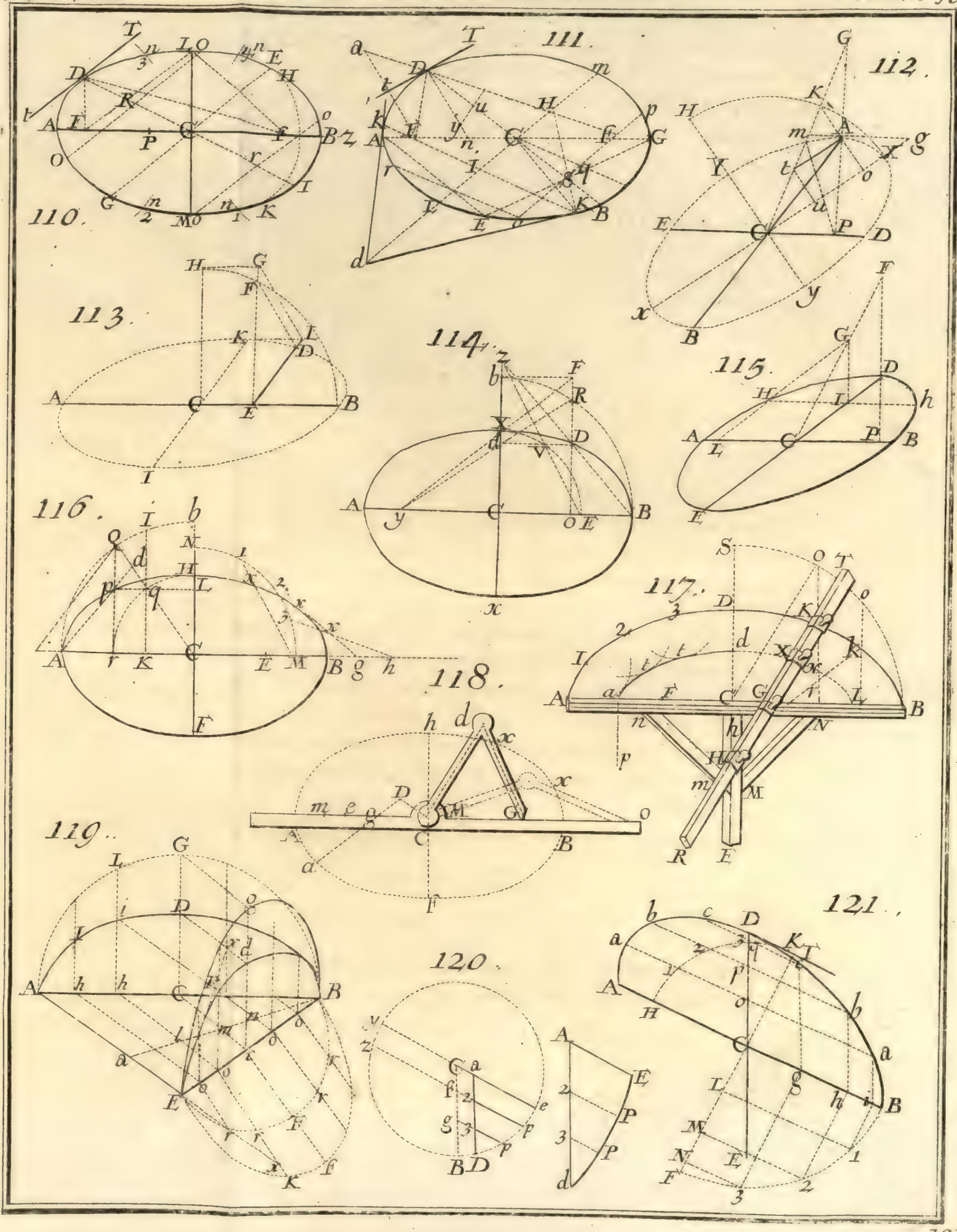
Quant à l'usage du second Corollaire, il est aussi fréquent en plusieurs rencontres, par exemple pour trouver les joints de tête de la porte en tour ronde, &c. comme on le verra au quatriéme Livre.

De la parabole.

PROBLEME X.

L'axe d'une parabole & un point à sa circonférence étant donnés, la tracer par plusieurs points & par un mouvement continu.

Pl. 11. Fig. 122. SOit (*Fig.* 122) SO 4 l'axe donné, & D le point de la parabole à son contour. Ayant tiré de ce point une perpendiculaire DO sur l'axe SO, on tirera la ligne SD, sur laquelle au point



point D, on fera la perpendiculaire D4, qui coupera l'axe SO prolongé au point 4; la longueur O4 sera le parametre de la parabole, qu'on divisera en quatre parties égales, dont on en portera une de part & d'autre du sommet S en F, pour avoir le foyer F, & en G sur l'axe 4 S prolongé pour avoir la directrice H *h*, laquelle est une perpendiculaire à l'axe prolongé d'un quart du parametre au-delà du sommet S, nous en dirons l'usage ci-après. Pl. 11. Fig. 128.

On tirera ensuite autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe SO, pour avoir la même quantité de points au contour de la courbe comme *i* K, dont les points *i* & *i* sont pris à volonté; ou bien on cherchera le parametre, en prenant au contour de la parabole un point K à volonté, par lequel & par le sommet S, on menera KS *a* indéfinie, puis portant en S *b* la longueur *i* K, on tirera par le point *b* une perpendiculaire à l'axe prolongé, laquelle coupera K *a* au point *a*, la ligne *b a* sera le parametre qu'on cherche, dont le quart porté de S en G, donnera la section de l'axe & de la directrice. Ensuite ouvrant le compas de l'intervalle G *i*, à chaque point *i* en particulier, on posera une des pointes en F, d'où comme centre, on décrira un arc qui coupera en K chaque perpendiculaire en *i* K, pour laquelle on a pris l'intervalle *i* G correspondant; faisant de même pour toutes les lignes, on se servira du même centre F, & par tous les points SKKD on tracera à la main ou avec une regle pliante une courbe qui sera la parabole que l'on cherche; on en fera de même pour l'autre côté SC *d*.

DEMONSTRATION.

La ligne O4, par la définition du parametre, à la premiere construction, ou *a b* à la seconde, ayant été faite troisieme proportionelle à l'axe SO, & à l'ordonnée OD ou *i* K, est le parametre de la parabole, dont le quart est la distance du sommet S au foyer F & au point G par où passe la directrice.

Or la distance de cette ligne est toujours égale à celle du foyer à l'extrêmité de l'ordonnée, comme il est démontré dans les sections coniques, donc la courbe SKD est une parabole.

Seconde maniere par un mouvement continu.

On prendra un cordeau égal à la distance OG, dont on attachera un bout sur la branche EL, d'une équerre HEL, me-

Pl. 11. Fig. 122. ſurant ſa longueur depuis le point E de ſon angle, & l'autre bout ſera arrêté à un clou au foyer F; enſuite ayant poſé la branche EL ſur l'axe SO, & l'autre branche EH ſur la directrice HA, on y appliquera une regle HR, puis appuyant avec un crayon ou une pointe ſur le cordeau pour le tenir appliqué contre la branche EL, on reculera l'équerre le long de la regle HR, & à meſure qu'on l'écartera de l'axe SO, toujours parallelement à elle-même, le crayon coulant dans le pli du cordeau au point C, tracera la parabole d'un côté de l'axe; on tranſportera enſuite l'équerre pour tracer l'autre moitié du côté oppoſé.

Il eſt évident que cette opération eſt préciſément la même que la précédente, mais exécutée d'une maniere méchanique; puiſque l'on aura par tout CE = CF, comme l'on a eu G*i* = FK, ce qui eſt la propriété de la parabole.

USAGE.

La deſcription de la parabole n'eſt pas d'un fréquent uſage dans la coupe des pierres; elle ſert cependant pour tracer les arcs de face des trompes quarrées par devant dans un angle droit: l'axe qui eſt la ligne du milieu de niveau à l'impoſte eſt donné, & la rencontre du milieu de la trompe avec l'aplomb au bout de cette ligne, eſt le point donné au contour de la parabole.

Elle peut auſſi ſervir à tracer un arc rampant, dont les piédroits ſont en ſurplomb, dans une circonſtance dont nous parlerons dans la ſuite. Elle ſert encore à tracer les jambages des cheminées les plus propres à réflechir la chaleur du feu, comme l'a démontré M. GAUGER dans la Méchanique du feu, où il en fait voir l'avantage ſur ceux qui *ſont paralleles* entr'eux.

Comme cette courbe reſſemble ſi fort à la *chaînette*, que quelques Mathématiciens s'y ſont mépris, comme le grand GALLILEI, & après lui BLONDEL, dans ſes Problêmes de l'Architecture, PARENT, & le P. CASTEL dans ſa Mathématique univerſelle; on pourroit s'en ſervir à tracer les ceintres des voutes dont on fait les vouſſoirs égaux. Je crois auſſi avoir lû quelque part, qu'un fameux Architecte ſe ſervoit de la parabole dans les ceintres des lunettes dans un berceau.

Enfin on pourroit faire uſage de ce Problême pour le renflement & la courbure du profil de diminution des colonnes, au lieu

des deux manieres usitées : l'axe donné est le diametre de la base, l'abcisse est la différence des deux demi-diametres à la base, & sous le chapiteau, c'est-à-dire, la diminution d'un côté; le sommet est l'extrêmité de ce diametre, & le point à la circonférence est celui de diminution du diametre supérieur, c'est-à-dire, son extrêmité sous l'astragale.

De l'hyperbole.

PROBLEME XI.

Le centre, le sommet & un point au contour de l'hyperbole étant donnés, la décrire par plusieurs points & par un mouvement continu.

SOit le centre C, le sommet S & le point D à la circonférence, la ligne CO menée du centre par le sommet S en O sera l'axe prolongé, auquel la perpendiculaire OD sera une ordonnée. Des points S & D pour centres, & pour rayon une ouverture de compas prise à volonté, on fera des sections d'arcs en *p* & *q*, pour mener par ces points une ligne *p q*, laquelle étant prolongée, s'il le faut, coupera l'axe CO en V, d'où comme centre & de l'intervalle VS, ou VD, on décrira le demi-cercle SDG qui rencontrera SO prolongée en G: ensuite ayant porté la longueur OG sur la ligne DO prolongée en OH, on lui menera par le point S la parallele indéfinie IST; on prolongera SC en R, faisant CR = CS: on tirera RH qui coupera IT en I; on portera la longueur SI en SK, pour avoir la ligne KR, qu'on divisera en deux également au point M, où sera le centre d'un demi-cercle RTK, dont elle sera le diametre, & dont l'arc coupera la ligne ST en T; puis ayant divisé ST en deux également au point N, on portera la distance CN en CF; le point F sera un des foyers de l'hyperbole, & si on porte la distance SF en R*f*, on aura l'autre foyer. *Fig. 125.*

Cette préparation étant faite, si l'on veut trouver plusieurs points de l'hyperbole avec le compas, d'une ouverture *f* L prise à volonté, pourvû qu'elle soit plus grande que *f* S pour rayon, & du point *f* pour centre, on fera un arc *l* L; ensuite on portera le même intervalle *f l* de R en *o*; par exemple, sur l'axe prolongé, & l'on prendra la différence *o* S de cet intervalle & du premier axe RS, & de cette différence *o* S pour rayon, & du

Pl. II. Fig. 122. foyer F pour centre, on fera un autre arc xy, qui coupera lE au point x, lequel sera à la circonférence de l'hyperbole : on trouvera de même autant de points que l'on voudra de cette courbe.

Seconde maniere par un mouvement continu.

Ayant pris une regle f E d'une longueur convenable, qui excede la plus grande distance fD du foyer opposé f, au point donné D; on lui fera un trou au bout f pour y passer un clou, sur lequel elle sera mobile; on portera sur cette regle la longueur RS du premier axe de f en Q; ensuite on prendra un cordeau de longueur égale à QD, dont on attachera un bout à l'autre foyer F, puis posant la regle fE sur F o, on étendra le cordeau qui est lâche dans cette situation, en le tirant par un pli de F en S le long de la regle, & en l'écartant par le bout E; l'autre restant fixe en f, on appuyera sur le pli du cordeau avec un crayon ou une pointe d'outil contre la regle, en le faisant couler vers D, & l'on tracera ainsi l'hyperbole, comme nous l'avons dit de l'ellipse & de la parabole.

DÉMONSTRATION.

On a cherché une troisieme proportionelle OG à l'abscisse OS, & à l'ordonnée OD, pour trouver par son moyen le parametre SI, car HO = OG : SI :: RO : RS; mais aussi le parametre est troisieme proportionelle au premier axe RS, & au second bY, donc en cherchant une moyenne proportionelle ST entre SR & SI = SO, on aura b CY qui lui est égale. Or il est démontré dans les sections coniques, que la distance du centre C au point N, milieu de ST, est égale à celle de ce centre au foyer, parce que SN est moyenne proportionelle entre RF & SF, ou ce qui est la même chose, entre fS & SF, comme il est évident par la construction; donc les points f & F sont les foyers. Il est aussi démontré que la différence des lignes fD, FD, tirées des foyers à un point de l'hyperbole, est égale au premier axe RS; donc l'hyperbole est décrite par les points S & D; *ce qu'il falloit faire.*

Il est clair que la seconde opération par un mouvement continu, est précisément la même que la premiere par plusieurs points, puisque l'on y a pris la différence FD du premier axe RS, pour en faire la distance du foyer au crayon D; ce n'est

donc que la même chose faite méchaniquement avec un cordeau, au lieu d'un compas.

COROLLAIRE.

Si les deux axes sont donnés, les foyers se trouvent très-facilement en élevant du point S une perpendiculaire $Sd = CD$, & tirant C *d* qui sera la distance du centre C au foyer F, que l'on transporte en F par un arc *d* F sur le premier axe prolongé. *Fig.* 124.

Il faut remarquer que dans l'Architecture où les cones sont presque toujours donnés & le point où la position du plan de leur section dans le triangle par l'axe du cone, les deux axes sont aussi toujours donnés; car (*Fig.* 124) soit ADB le triangle par l'axe, & le plan coupant HSC prolongé; si l'on prolonge aussi le côté BD jusqu'à la rencontre du plan en X, la distance SX est la longueur du premier axe, lequel étant divisé en deux également en C, la ligne CD sera la moitié du second axe; & si par le centre C on tire deux lignes droites CP & CT, paralleles aux côtés DA, DB, on aura aussi les Asymptotes, dont on peut faire usage pour décrire l'hyperbole par plusieurs points. Cependant comme il peut arriver que le triangle par l'axe du cone ne soit pas donné, parce que l'on peut considérer les sections coniques hors du cone, nous allons faire voir comment l'on peut trouver les asymptotes d'une hyperbole, dont on ne connoît que le centre, le sommet & une ordonnée, de même que dans la proposition précédente, ou seulement un diametre & une ordonnée.

PROBLEME XII.

Etant donnés le centre, le sommet & une ordonnée à l'hyperbole, ou seulement un premier diametre & une ordonnée, en trouver les asymptotes & la décrire par plusieurs points.

Soit (*Fig.* 125) le centre C, le sommet S & l'ordonnée DO, on aura l'intervalle CS pour la moitié d'un diametre, dont le double SP sera le diametre entier, auquel (étant prolongé) la ligne DO est une ordonnée qui lui sera perpendiculaire, si ce diametre est un axe. *Fig.* 125.

Par le point S on menera AB parallele indéfinie à DO, & par le point donné D au contour de l'hyperbole, on tirera la ligne DP qui coupera AB en A; on fera SG égal à AS, & par

Fig. 125. le point G ayant mené GR parallele à DO ou AB, on tirera la droite DSR qui coupera GR au point R, la ligne GR sera le parametre que l'on divisera en deux également en M; on portera la longueur GM de S en *h*, & sur *h*C, comme diametre, ayant décrit un demi-cercle, on menera SN perpendiculaire à C *h*, laquelle étant moyenne proportionelle entre le demi-diametre CS, & le demi-parametre GM = S*h*, sera égale à la moitié du diametre conjugué au premier SP : on portera donc la longueur SN en SB, qui est parallele à DO (par la construction) la ligne menée du centre C par le point B, sera une asymptote : la même distance portée de l'autre côté vers A donnera aussi le point par où doit passer l'autre asymptote CE; *ce qu'il falloit premierement trouver.*

Les asymptotes étant données, il est très-facile de trouver autant de points que l'on voudra au contour de l'hyperbole; car ayant fait O*d* égal à l'ordonnée OD prolongée de part & d'autre vers *r* & *r*, on tirera à volonté les lignes *q r*, Q*r* par les points D & *d*, ensuite portant les longueurs D*r*, *dr* de *q* en I, & de Q en *i*, on aura les points *i* & *i* qui sont à l'hyperbole; on tirera autant de ces lignes Q*r* qu'on voudra trouver de points *i*, & par ces points & les points D, S, *d*, on tracera une courbe à la main ou avec une regle pliante, laquelle donnera le contour de *l'hyperbole qu'on cherche.*

On voit, comme au Problême précédent, que si on a la moitié du diametre conjugué, toute l'opération est abrégée, puisqu'il ne s'agit que de la porter de S en B pour avoir le point B de l'asymptote qu'on doit mener par le centre C donné.

La démonstration de ce Problême dépend de quelques propriétés des sections coniques que nous ne pouvons rappeller ici; on les trouvera dans tous les Traités des sections coniques.

La principale est, que les lignes qui traversent les hyperboles d'une asymptote à l'autre, sont coupées également par leurs diametres; & parce que les ordonnées DO & *d*O sont égales, comme dans toutes les sections coniques, les restes D*r* & *dr*, sont aussi égaux; ce qui fait la base de l'opération.

USAGE.

On rencontre assez souvent des hyperboles, lorsqu'il s'agit de faire des voutes ou d'autres corps coniques. La description

de cette courbe eſt néceſſaire, 1°. pour faire l'épure de la porte en tour ronde & en talud ſuivant nôtre méthode; 2°. pour le trait de la trompe conique à trois pans; 3°. pour la trompe en tour ronde érigée ſur une ligne droite; 4°. pour les joints de la corne de vache; 5°. pour les naiſſances des arrieres-vouſſures bombées; 6°. pour la nouvelle arriere-vouſſure de Marſeille; 7°. pour les lunettes ébraſées dans une voute ſphérique; 8°. pour les arcs rampans dont les piédroits ſeroient en ſurplomb dans certains cas; 9°. pour les joints montans des arrondiſſemens coniques des angles en talud; 10°. pour la ſolution du Problême qui donne la maniere de tirer les joints de tête des ceintres elliptiques ou hyperboliques par des points donnés hors de ces courbes; 11°. enfin le Problême précédent peut ſervir ſi l'on veut au trait de la courbe de diminution & de renflement des colonnes, au lieu de la conchoïde de Nicomede. L'hyperbole ſelon moi vaudroit mieux pour la grace du contour, parce que ſi on les diminuoit à la maniere des anciens dès le bas, le fuſt de la colonne auroit plus de grace étant portion d'hyperboloïde que de cone tronqué; & par la nature de l'hyperbole la partie inférieure de la colonne auroit le plus grand arrondiſſement qui diminueroit & ſe redreſſeroit en montant ſous le chapiteau; ce qui auroit une grande analogie avec celui que la nature fait aux arbres, & par conſéquent une plus grande beauté, qui eſt une plus parfaite imitation de la nature.

On auroit donc pour le ſommet le côté de la baſe, pour point à la circonférence de l'hyperbole & pour ordonnée celui de la diminution ſous l'aſtragale du chapiteau, & pour le centre la diſtance du module ou demi-diametre de la colonne à la baſe portée ſur la prolongation de ce diametre hors de la colonne, ce qui tombe dans le cas du Problême précédent.

De tout ce que l'on vient de dire & de pluſieurs autres endroits où nous avons parlé des ſections coniques, on peut conclure que ceux qui diſent comme LA RUE dans ſon Traité de la coupe des pierres, que les ſections coniques ne ſont pas néceſſaires dans la pratique, n'en connoiſſent pas les uſages.

SCHOLIE.

Par une conſtruction ſemblable à celle de ce Problême, on peut décrire au-dehors ou au-dedans d'une ſection conique quel-

Fig. 127. conque une courbe semblable, dont il suffit d'avoir un seul point donné.

Soit pour exemple (*Fig.* 127) une ellipse donnée PTB, dans laquelle on en veut décrire une asymptotique par un point donné *e*; on tirera à volonté par ce point *e* une ligne 1, 2, qui coupera l'ellipse donnée aux points 1, 2, on portera l'intervalle *e* 1, de 2, en *f*, le point *f* sera un second point de l'ellipse demandée, lequel servira à en trouver un troisieme, en menant par *f* une ligne aussi à volonté *g* 4; on portera l'intervalle 3 *f*, de 4 en *g*, où sera un troisieme point, lequel servira à en trouver un quatrieme *h*, en tirant 5 *g* 6, & portant *g* 5 en 6 *h*, ainsi de suite.

Ce que nous disons ici pour l'ellipse, convient aussi à la parabole & à l'hyperbole; c'est pourquoi M. de LA HIRE a appellé les Figures semblables inscrites ou circonscrites à une section conique avec cette propriété, *asymptotiques*, en ce que l'une peut être considérée à l'égard de l'autre, comme une asymptote courbe, j'explique ce nom que j'adopterai quelques-fois pour éviter les périphrases, parce que j'ai connu un grand Mathématicien qui ne le trouvoit pas à son gré.

PROBLEME XIII.

Par cinq points donnés qui ne soient pas en ligne droite, tracer une section conique quelconque par un mouvement continu, sans en connoître les axes, les diametres, les centres, ni les foyers.

Fig. 126. Soient (*Fig.* 126) les points donnés AB*c*DE, par lesquels on veut faire passer une section conique qui se trouvera suivant leur situation une ellipse, une parabole, ou une hyperbole; dans l'exemple proposé, ils conviennent à une ellipse. Ayant tiré par deux de ces points, comme A, B, une ligne FG, prolongée au-delà des points A & B, on tirera les lignes A*c*, AB, AE, & B*c*, BD, BE: ensuite on prendra avec deux regles, ou avec l'instrument qu'on appelle sauterelle, les angles DAF, DBG, dont on appliquera le côté AD en A*c*, la branche AF se rangera sur A*x*, de même la branche BD de l'autre angle étant portée en BE, l'autre branche BG se rangera en B*c*; on en fera de même des angles BE*h*, BDI, & l'on aura l'intersection des côtés E*h* avec A*x* au point *x*, & *i*, avec BY, au point

point Y. On tirera la ligne droite *x* Y; enſuite ayant fait avec les mêmes ſauterelles ou quatre regles les angles BAD, ABD mobiles ſur les points A & B, comme ſur des pivots, on fera croiſer les deux branches de la ſauterelle tout le long de la ligne droite *x* Y, comme par exemple en *k*, les deux autres branches A*g*, B*f* ſe croiſeront en un point comme L, qui ſera à la circonférence de la ſection conique; on continuera de même en promenant la croiſée de *k* tout le long de *x* Y; mais lorſque les branches B*f*, A*g* ſeront au-deſſous de B & A du côté de la ligne *x* Y, il faudra en prolonger l'alignement par une regle appliquée au long de A*g* ou de B*f*.

La démonſtration de cette conſtruction eſt un peu trop longue pour lui donner place ici : il ſuffira de dire qu'il eſt démontré dans les Traités des ſections coniques, qu'on peut en faire paſſer pluſieurs différentes par quatre points donnés, mais non pas par cinq; or ſuppoſant (comme il eſt vrai) que ce mouvement organique ne peut produire qu'une courbe du ſecond ordre, ſi les points ſe trouvent diſpoſés pour une ellipſe, il n'y en aura qu'une qui ſatisfaſſe à la propoſition. On peut voir ſur cela le ſçavant Livre de M. *Mac-laurin*, intitulé *Geometria Organica*.

PROBLEME XIV.

Deux touchantes avec les points d'attouchement à une ſection conique, & la direction d'un ſeul diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe, ſans connoître le centre de la ſection, ni la grandeur d'aucun diametre.

Soient les deux touchantes données AD, DB (*Fig.* 129) qui touchent la ſection conique cherchée aux points A & B; ſoit auſſi la ligne AP, portion d'un diametre dont on n'a pas la longueur mais ſeulement la poſition, c'eſt-à-dire l'angle DAP, qu'il fait avec la touchante AD; ayant tiré la droite AB d'un point d'attouchement à l'autre, on la diviſera en deux également en F, par où l'on tirera la ligne droite DFC indéfinie, qui ſera portion d'un diametre ſur lequel on cherche un point de la courbe. *Fig.* 129.

On ſçait que ſi la ſection eſt une parabole, cette ligne DC ſera parallele à AP, autre poſition de diametre donnée : ſi elle doit être une ellipſe, les lignes AP & DC ſeront convergentes

Pl. 11. Fig. 129. vers C ; & si elle doit être une hyperbole, elles seront divergentes, & concourront hors de la courbe.

Par le point F on tirera FG parallele à AP qui coupera AD au point G, & l'on divisera GD en deux également en I ; par le point G on menera GH perpendiculaire à AD, puis du point I pour centre & de l'intervalle IA pour rayon, on fera un arc H *h* qui coupera GH au point H : ensuite on menera A *d* parallele à DC, on fera AK égale si l'on veut à GH, ou l'on en prendra une partie aliquote, comme la moitié, le tiers, ou le quart, ou on la fera plus grande, & l'on fera A *d* égal à AD, ou à la même partie aliquote que AK l'est de GH, & l'on tirera par le point D la ligne *d* E, jusqu'à la rencontre de AB prolongée s'il le faut en E, par où l'on tirera EK qui coupera DC au point *x*, lequel sera un de ceux de la courbe.

Pour avoir ensuite un autre point de cette courbe, on menera par le point *x* une ligne *ab* parallele à AB, & l'on fera la même opération sur les lignes A*a*, & *ax*, & B*b* & *bx* qui seront deux tangentes données, qu'on a fait ci-devant sur les deux AD, DB, & l'on aura deux autres tangentes, dont une sera toujours une partie de AD ; & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait cinq points de la courbe pour la tracer par un mouvement continu, par le Problême XIII, ou que les points trouvés soient multipliés & approchés autant qu'on le souhaite, pour la tracer exactement à la main ou à la regle pliante.

DÉMONSTRATION.

Il est démontré dans les sections coniques, qu'un diametre, lequel étant prolongé, passe par la rencontre de deux tangentes, coupe en deux parties égales la ligne qui passe par les deux points d'attouchement ; & par conséquent toutes celles qui lui sont paralleles ; & par l'inverse, que si l'on divise une ligne qui passe par les points d'attouchement de deux autres en deux également, & que de leur rencontre & par le milieu de cette ligne on en mene une autre prolongée, elle passera par le centre de la section conique si elle en a un ; or par la construction nous avons coupé AB en deux parties égales en F ; donc la ligne DFC est un diametre.

Voyez la Hire l. 2. p. 12.

Nous avons aussi dit, Article 46, que la partie de ce diametre coupée par la ligne AB, qui joint les points d'attouchement,

celle qui eſt coupée par la courbe de la ſection, c'eſt-à-dire, le demi-diametre de celles qui ont des centres, & l'intervalle du centre au concours des deux tangentes, ſont contiuuellement proportionelles; donc ſuppoſant ce centre en C, qui ſera dans cette propoſition (ſi l'on veut) hors de la Figure 129, il ſera toujours vrai que CF : Cx : : C x : CD, & que AP & DC doivent coucourir au centre de la ſection, ſi elle en a un; mais parce que l'on a fait HG moyenne proportionelle entre AG & GD, ſi l'on porte GH en AI, la ligne Ix ſera parallele à AP, comme FG l'eſt à AP (par la conſtruction). Préſentement, à cauſe des trois lignes CF, Cx, CD qui ſont en proportion continue, ou des trois AG, AI, AD, on aura CF : Cx : : Fx : xD, ou : : AG : AI, c'eſt-à-dire : : AK : Ad (par la conſtruction;) donc à cauſe des paralleles Ad & FD, on a Fx : xD : : AK : Kd : : CF : Fx : : Cx : CD; donc le point x eſt à la ſection, puiſqu'il coupe FD de maniere que Cx eſt une moyenne proportionelle entre CF & CD; *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 129.

Nous avons dit que ſi CD eſt parallele à AP, la ſection ſera une parabole; alors le point G tombera en D, & AI deviendra la même que AD, d'où il ſuit qu'il ſuffit de diviſer FD en deux également en z pour avoir ce point à la parabole; ce qui ſe trouveroit auſſi par la premiere conſtruction, parce que AK & Kd ſeroient égales, & par conſéquent Fx & xD qui leur ſont paralleles dans le triangle ADE.

Si les lignes DC & AP concourent au-dehors, la conſtruction ſera toujours la même, mais renverſée; telle eſt l'hyperbole à l'égard de l'ellipſe.

USAGE.

Cette propoſition peut ſervir dans l'arrondiſſement des angles des figures irrégulieres, par exemple, pour une cage d'eſcalier dans un angle aigu ou obtus, dont on prend la naiſſance à des points donnés par la convenance du lieu : elle peut auſſi ſervir pour les arcs rampans où l'on a trois tangentes & trois points d'attouchement donnés; mais pour ceux-ci, nous donnerons le Problême ſuivant.

PROBLEME XV.

Trois tangentes à une section conique & leur point d'attouchement étant donnés, trouver celle des sections qui doit les toucher, & les lignes nécessaires pour la décrire.

Premierement, on peut facilement connoître la nature de la section conique demandée par les observations suivantes.

Fig. 131. 1°. Si deux de ces tangentes sont paralleles, comme AS, BO la section ne peut être qu'un cercle ou une ellipse, parce qu'il n'y a que ces deux qui rentrent en elles-mêmes : elle sera un
* Fig. 130. cercle si les tangentes *p c*, *c* T * sont égales de même que T *i* & *i r*, & une ellipse, si elles sont inégales, comme *p* E, EF *
* Fig. 131. & RS, ST, &c.

2°. Si deux de ces tangentes n'étant pas paralleles, concourent en X (*Fig.* 127) du côté opposé au troisieme point d'attouchement T donné, comme PA, RB, la section demandée sera encore une ellipse par la même raison, ou un cercle.

3°. Si les deux tangentes extrêmes AS, BO étant prolongées, concourent du côté du troisieme point d'attouchement T donné, & que la tangente moyenne soit parallele à la ligne
Fig. 128. RP (*Fig.* 128) qui passe par les points d'attouchement P & R des extrêmes, comme SO parallele à RP; il sera encore facile de connoître quelle est la courbe qui satisfait à la question.

Ayant divisé RP en deux également en *m*, on tirera *m* X qu'on divisera en deux également en T.

1°. Si la tangente moyenne SO passe par ce point T, la courbe demandée sera une parabole.

2°. Si cette ligne passe au-dessous comme en E *l*, elle sera une ellipse.

3°. Si elle passe au-dessus du côté de X, comme en *h y*, elle sera une hyperbole.

* Fig. 132. 4°. * Si la tangente moyenne SO n'est pas parallele à RP, qui passe par les deux points d'attouchement des extrêmes, on connoîtra encore facilement quelle est la section qui satisfait à la proposition; car ayant prolongé RP & SO, jusqu'à ce qu'elles concourent en Y, il ne s'agit que d'examiner le rapport des parties des lignes SY & PX, si SY : SO : : XO : OP, la courbe sera une parabole; si le rapport de SY à YO, est moindre que

celui de XO à OP, elle sera une ellipse; s'il est plus grand, elle sera une hyperbole.

Premiere solution pour la parabole. Ayant divisé RP en deux également en M, & tiré MX qui coupera SO en T, on lui menera par les points P & R, les paralleles PQ, RV jusqu'à la rencontre de SO prolongée, qui les coupera aux points V & Q; on divisera ensuite les lignes TX, PQ, RV en un même nombre de parties égales, par exemple ici en trois, à commencer le compte des divisions vers la ligne SO; les lignes menées par les points correspondans 1 & 1, 2 & 2, se couperont en des points *y* & *z*, Y & Z qui seront à la circonférence de la parabole; ainsi menant une ligne à la main, ou avec une regle pliante par les points R *z y* TYZP, on aura le contour de la section qui touche les trois lignes données. *Fig.* 133.

Seconde solution pour l'ellipse & l'hyperbole. Par les points d'attouchement donnés RTP, ayant tiré les lignes RT, PT (*Fig.* 134) on les divisera en deux également en N & *n*, par où & par les points S & O, on menera les lignes NS, *n* O, lesquelles étant prolongées, se couperont au point C, où sera le centre de la section, par le moyen duquel on a déja un diametre en portant CT en C *t* sur la même ligne prolongée; ainsi la question sera réduite à celle-ci: *un diametre & une ordonnée à ce diametre étant données, trouver son parametre, & autant de points que l'on voudra de la section.* *Fig.* 134.

Par les points P & *t* ayant mené VP *t*, qui coupera SO prolongée en V; on portera VT en TD sur le diametre T *t* prolongé (*Fig.* 134.) & sur la prolongation, on menera D 3 parallele à SO, qui sera terminée au point 3 par la droite PT 3; par ce point, on menera 3 Q parallele & égale à DT, & l'on divisera les longueurs 3 Q & TV en même nombre de parties égales, par lesquelles & par le point T on menera les lignes 1 T *y*, 2 T *z*, & du point *t* par les divisions de TV, les droites *ty*, *tz*, qui couperont les précédentes aux points *y* & *z*, & qui seront à la circonférence de l'ellipse (*Fig.* 134) ou de l'hyperbole (*Fig.* 135) si par les points *y* & *z*, on mene des paralleles *yf*, *zf* à SO, qui couperont le diametre T *t*, (*Fig.* 134, ou sa prolongation (*Fig.* 135 en *e* & *g*, & qu'on fasse *ef* = *ey*, *g*F = *g*P, (*Fig.* 134) ou *g*R = *g*E (*Fig.* 135) on aura les points *t*, *f* & *f* correspondans à ceux de l'autre côté de la courbe, & on pourra la tracer à la main ou avec une regle pliante; *ce qu'il falloit faire.* *Fig.* 134. & 135.

DÉMONSTRATION.

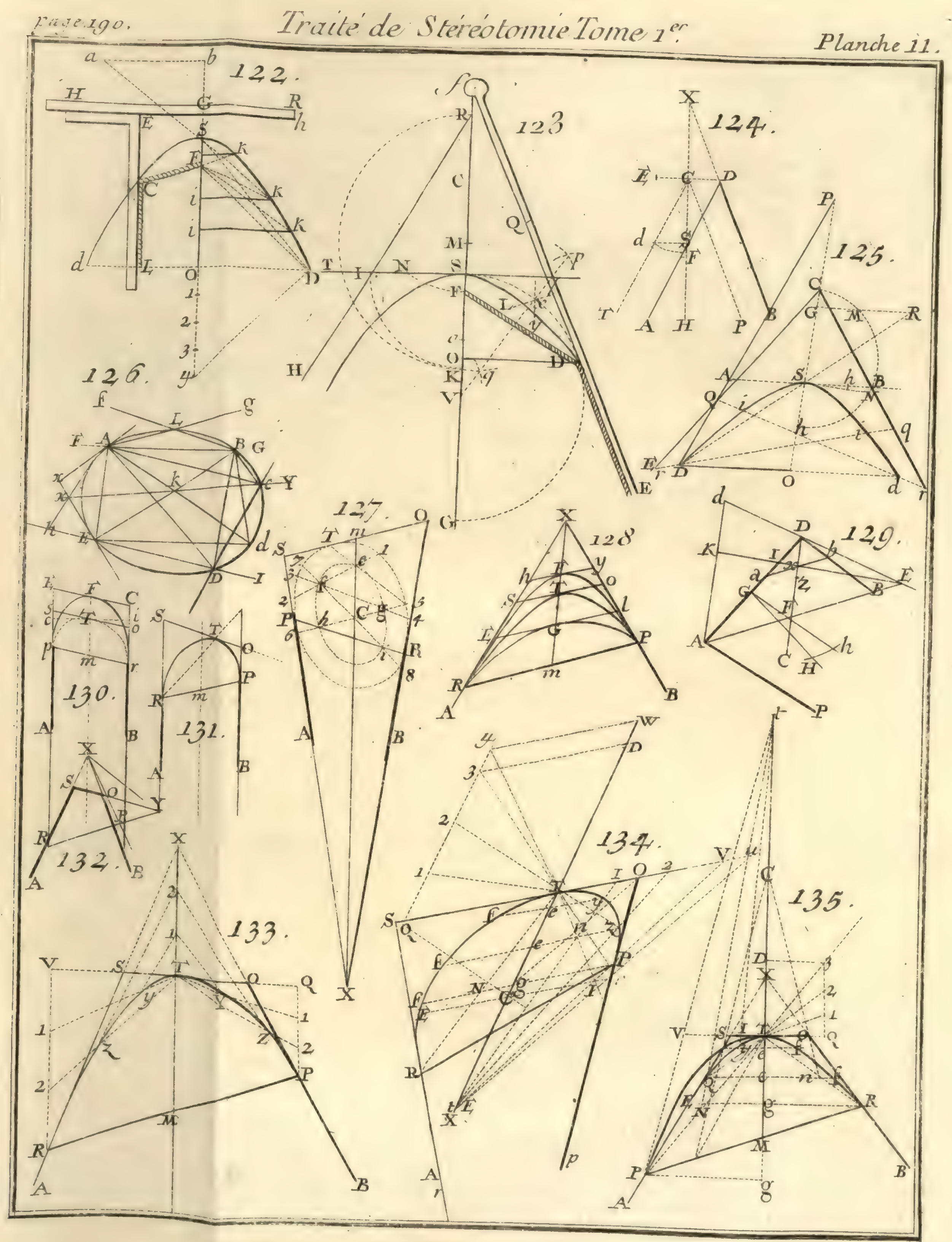
Fig. 134. *Premierement*, pour l'invention du centre de la ſection. Puiſque les lignes RT & TP qui joignent les points d'attouchement ſont diviſées en deux également en N & n, & que les lignes NS & nO paſſent par la rencontre * des tangentes; elles ſont dans la direction des diametres, par conſéquent chacune d'elles paſſera par le centre qui ſera au point C qui leur eſt commun, & le point T étant à la circonférence, la ligne menée par CT ſera encore un diametre égal à $2\,CT = Tt$, par la conſtruction; & parce que SO tangente paſſe par T, toute ligne comme gP qui lui ſera parallele, ſera une ordonnée à ce diametre, par le moyen de laquelle on a trouvé ſon parametre, qui doit être une troiſieme proportionelle au premier Tt, & au ſecond inconnu qu'on ſuppoſe ici pour la facilité de la démonſtration égal EI (*Fig.* 134).

Art. 50. Voyez la Hire l. 2. p. 19. L'Hôpital Art. 20.

Ayant mené tI juſqu'en SO prolongée en u, & ayant fait comme dans la conſtruction $TW = Tu$, W 4 parallele à SO, & tiré T 4, la ligne W 4 ſera le parametre du diametre tT; car ſi l'on appelle tT, $2a$; CI, b; Tu, d; 4 W, x; à cauſe des triangles ſemblables Ttu, CtI, on aura $2a : d :: a : b$, & à cauſe de $TW = Tu$, & des triangles ſemblables T 4 W, TIC, on aura $a : d :: b : x$, donc en multipliant ces deux analogies, on aura $2aa : dd :: ab : bx$, & $2aabx = ddab$, & retranchant de part & d'autre ab: on aura $2ax = dd$, c'eſt-à-dire que le rectangle de $2a = Tt$ par $x = 4W$, ſera égal au quarré de $dd = 2\,CI = EI$, donc 4 W eſt le parametre qui eſt égal pour toutes les ordonnées gP, ez, ey au diametre Tt, auquel il eſt troiſieme proportionelle; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de connoître quelle eſt la ſection qui convient aux trois tangentes données; car ſi les lignes qui paſſent par les rencontres des tangentes & les milieux des lignes qui joignent les points d'attouchement, concourent en-dedans, comme à la Fig. 134, la ſection eſt une ellipſe: ſi elle concourt en-dehors, *Fig.* 135 c'eſt une hyperbole, & ſi elles ne concourent point, qu'elles ſoient paralleles, c'eſt une parabole, *Fig.* 133.


122.
123
124.
125.
126.
127.
128
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.

CHAPITRE III.

De la description de quelques courbes usuelles dans l'Architecture, lesquelles ne sont pas des sections coniques.

PROBLEME XVI.

Tracer une ovale du quatrieme ordre formée par la section plane d'un corps cylindrique, annullaire, horisontal ou rampant, c'est-à-dire, helicoïde.

SOit (planche 13. *Fig.* 149) la moitié d'un corps cylindrique annulaire DIGF*gi*, dont les côtés *i*DI extérieur, & *g*FG intérieur, sont des cercles concentriques au centre C, & dont l'axe courbe est dans le même plan que ces deux cercles. Soit un autre plan perpendiculaire à celui-ci qui coupe le corps annullaire suivant la ligne AB; il faut décrire la courbe formée à la surface de ce corps par la section du plan. PL. 13. Fig. 149.

Sur *ig*, diametre du corps cylindrique, ayant fait le demi-cercle *ihg*, qui représente la moitié de sa base; on divisera ce diametre *ig* en autant de parties que l'on voudra avoir de points de la courbe pour sa moitié, jusqu'à une ligne CD, qui sera prise pour rayon du cercle extérieur, & perpendiculairement sur i I; par les points de division 1, 2, 3, 4, on fera du même point C pour centre autant d'arcs concentriques, prenant successivement pour rayons de ces arcs C 1, C 2, C 3, C 4, & terminant ces arcs à la ligne AB par où passe le plan coupant aux points K, L, M, par lesquels on élevera autant de perpendiculaires indéfinies sur AB, & pour en déterminer la hauteur, on élevera de même sur le diametre *ig* autant de perpendiculaires par les points 1, 2, 3, 4, lesquelles couperont le demi-cercle *ihg* aux points *s*, *t*, *h*, *u*, *x*; ensuite portant les longueurs 1 *s* en K*k*, 2 *t* en L*l*, 3 *u* en M*m*, & 4 *x* en EÆ; on aura les points *klm* Æ, par lesquels on fera passer une courbe tracée à la main, ou avec une regle pliante. On portera les ordonnées correspondantes de l'autre côté de CD en N*n*, O*o*, P*p*, & on aura tout un côté de cette ovale depusi son axe AB, auquel l'autre sera égal, si l'on a besoin de le tracer: ce que

Pl. 13. Fig. 149. nous n'avons pas fait dans cette Figure pour ne la rendre pas trop confuse.

A l'égard du milieu où est le plus grand abaissement de l'infléxion, il sera trouvé par l'arc tangent à la ligne AB qui est ici 4 E, & sa hauteur 4 *x* portée en EÆ.

COROLLAIRE I.

Si le plan coupant approche plus près du point F que la ligne AB, l'inflexion au milieu sera plus grande; de sorte que si le plan coupant passe par F au point d'attouchement du cercle *g* FG, qui est le côté intérieur de l'anneau, la courbe se divise en deux, & le point Æ tombe sur le point F, parce que le point *g* correspondant de la base *i h g* est dans le même plan que le point F, par conséquent l'ordonnée EÆ, se réduit à rien. Si au contraire le plan coupant AB, toujours perpendiculaire à CD, passe par le point T milieu de FD l'inflexion de la courbe cessera vers son milieu où elle sera très-peu courbe & presque droite; & au contraire à mesure que le plan AB s'approchera de D, toujours perpendiculairement à CD, la courbe deviendra de plus en plus courbe vers son milieu, & ressemblera fort à une ellipse, ce que l'on peut facilement concevoir par la transposition des ordonnées 1 *s*, 2 *t*, *c h*, qui vont en s'élevant, & qui se rapprochent à mesure que le plan coupant s'approche de D, & parce que l'ordonnée 4 *x* qui s'abaisse à l'égard de *c h* n'a plus lieu, lorsque le plan coupant passe en T, ou en-deçà vers D, de même que l'ordonnée 3 *u* n'a plus lieu, lorsque le plan coupant AB est plus près de D que le point 3 de la base *i h g*, n'est éloignée du point *i*, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

Il est évident que si le corps annullaire est fort épais à l'égard du vuide de son milieu *g* FG, la section sera plus sensiblement pliée dans la partie intérieure, c'est-à-dire quand la section se fait au-dedans de T, & plus arrondie en-dehors.

A l'égard de la seconde partie de ce Problême qui concerne la courbe faite par la section d'un corps annullaire, dont l'axe n'est pas dans un même plan, mais élevé en hélice tournante autour d'un axe, comme le lierre autour d'un arbre; nous avons dit

dit qu'elle étoit la même que la précédente, avec cette ſeule différence que ſes ordonnées K*k*, L*l*, M*m* ſous la Figure 149, ne font pas un angle droit avec leur axe a*b*, mais un angle aigu aK*k*, aL*l*, &c. leſquelles cependant ſeront toujours paralleles entr'elles, & inclinées à leur axe ſuivant le même angle. Pl. XIII. *Fig.* 149.

Ainſi pour tracer la courbe du corps cylindrique hélicoïde coupé par un plan parallele à l'axe de l'hélice; on commencera par tracer la ſection d'un corps annullaire horiſontal, de même demi-diametre de révolution CD, & de même diametre de baſe *i g*: enſuite ayant fait une ligne *a b* qui repréſente la ſection du plan vertical AB, avec l'horiſontal *a b*, on élevera au point *a*, une ligne *a* a perpendiculaire à *a b*, & d'une longueur *a* a, qui ſera déterminée par l'élévation de l'hélice ſur l'horiſon au point où le plan vertical coupe le côté extérieur montant du corps cylindrique hélicoïde; & de ce point a de hauteur donnée, on tirera la ligne a*b* inclinée, qui ſera l'axe de la ſection qu'on cherche; il ne s'agit donc plus que de diviſer cet axe en même raiſon que l'axe AB du corps annullaire eſt diviſé, pour cela il n'y a qu'à en tranſporter les diviſions des abſciſſes ſur l'horiſontale *a b*, ou (ſi on les met ſur le même axe ED, enſorte que AB ſoit parallele à *a b*) on ne fera qu'abaiſſer des paralleles à ED, par les diviſions KLME, &c. leſquelles couperont l'axe incliné a*b*, en des points KLME, &c. ſur leſquels on portera les ordonnées de la baſe *ihg*, aux points correſpondans aux nombres 1, 2, 3, 4, comme l'on a fait ci-devant, & comme la Figure 149 le fait voir très-ſenſiblement.

La ſeconde différence qu'il y a de cette courbe à celle du corps annullaire, eſt qu'elle n'eſt pas uniforme à chaque moitié le long de ſon axe a*b*, à cauſe de l'obliquité de ſes ordonnées; elle eſt plus arrondie vers *a* du côté de l'angle aigu, que vers *b* du côté de l'angle obtus, la raiſon en eſt claire; car quoique toutes ces ordonnées ſoient paralleles, les diſtances de leurs ſommets ne ſont pas égales; en effet ſi l'on tire des lignes droites des points a & *b*, aux points *k* & P, quoique les côtés a K & p*b* ſoient égaux, de même que K*k* & P*p*; il eſt évident, par la Géométrie élémentaire, que dans les triangles *pb*P, a*k*K, qui ont deux côtés égaux qui comprennent des angles différents, la baſe oppoſée à l'angle obtus ſera plus grande que celle de l'angle aigu.

DÉMONSTRATION.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe du corps annullaire cylindrique, & ſur ce plan pluſieurs cylindres d'inégale grandeur, mais concentriques au centre C, & dont l'axe commun ſoit perpendiculaire au même plan *i* DIC, les ſections de leurs ſurfaces coupées par ce plan feront autant de cercles concentriques ; & ſi l'on ſuppoſe un ſecond plan AÆB perpendiculaire au premier, & coupant le corps annullaire & les cylindres, il fera dans chaque cylindre un parallelogramme dont les côtés feront perpendiculaires au plan *i* DIC, comme K*k*, L*l*, M*m*, &c. & chacun de ces côtés aura une partie commune à l'ordonnée du cercle qui feroit fait par la ſection C*i*, CK, ou CD, d'un troiſieme plan coupant le corps cylindrique perpendiculairement à celui qui paſſe par ſon axe courbe, par le centre C, & l'origine de chaque ordonnée K, L, M, E, &c. comme C*y*, lequel feroit pour ſection un demi-cercle égal à *i h g*, que nous prenons pour baſe de ce corps ; donc tous les points *k l m* Æ, &c. ſont au contour de la courbe, *ce qu'il falloit faire.*

Nous avons dit au Livre I. de quel uſage étoit cette courbe dans les voutes ſur le noyau & la vis St. Giles (*Fig.* 152) on en verra l'application au trait de ces voutes, au Livre IV ; voilà à peu près toutes les ſections des corps, dont nous devons connoître les courbes.

Des courbes formées par les ſections du coin-conoïde.

Ce feroit ici le lieu de donner la maniere de tracer les courbes qui ſe forment dans le coin-conoïde lorſqu'il eſt coupé par des plans en différentes poſitions à l'égard de ſon axe ; mais comme il y en a de circulaires & d'elliptiques dont nous avons ſuffiſamment parlé ci-devant, & qu'afin de donner une plus parfaite connoiſſance de celles qui ſont particulieres à ce corps, nous en avons mêlé la théorie avec la pratique, dans l'addition que nous avons faite au premier Livre de cette nouvelle Edition, on pourra y avoir recours pour les décrire par pluſieurs points trouvés de deux manieres, ou par le calcul, ou ſimplement avec la regle & le compas.

De la ſpirale.

QUoique la ſpirale ne ſoit pas une ſection de ces corps réguliers qui ſont le principal objet de nôtre Stéréotomie, elle eſt cependant une ſection de ceux que la nature produit, & que l'Architecture imite en pluſieurs rencontres, tels ſont certains coquillages, & quelques cornes d'animaux : par cette raiſon nous avons cru devoir lui donner place dans la deſcription des courbes uſuelles pour la conſtruction & la décoration des édifices.

Il n'y a pas de courbe dans la Géométrie qui puiſſe être ſujette à plus de variété que la ſprirale; M. VARIGNON dans un Mémoire inſéré dans ceux de l'Académie des Sciences en a fait voir différentes générations, qui peuvent être pouſſées à l'infini; nous qui n'en voulons qu'à la pratique, nous nous contenterons d'en donner les premiers principes.

PROBLEME XVII.

Tracer la ſpirale la plus ſimple & la plus uniforme, qu'on appelle la ſpirale d'Archimede.

Du centre C (*Fig.* 136) & de l'intervalle CA pour rayon pris à volonté pour celui d'une révolution entiere de la ſpirale ; ayant décrit un cercle A, 3, 6, 9, A, on en diviſera la circonférence en autant de parties qu'on voudra avoir de points au contour de la ſpirale ; on la diviſe commodément en 12 comme dans cette Figure, parce qu'en portant ſix fois le rayon à la circonférence du cercle, on n'a plus qu'à diviſer en deux chaque ſixieme, & tirer les diametres A 6, 9, 3, &c. on peut multiplier cette diviſion autant que l'on voudra, pour avoir la courbe plus exactement. Enſuite on diviſera le rayon CA en autant de parties qu'on a diviſé la circonférence, pour trouver par leur moyen ſur chaque différente poſition du rayon AC, la longueur du rayon de la courbe, laquelle partant du point A, s'approche continuellement de ſon centre C; ou ce qui eſt encore mieux, ſi l'on veut la conſidérer autrement, partant du centre C, s'en

PL. 12. Fig. 136.

PL. 12. Fig. 140. grand ou de son petit axe, on auroit allongé ou resserré la spirale : 2°. Que plus la ligne ST sera contenue de fois dans AR, plus la spirale sera arrondie, & au contraire ; par où l'on voit que cette construction, indépendamment du changement qui provient de la courbe génératrice qu'on peut choisir, donne une grande facilité de se contenter sur son contour plus ou moins redoublé : au lieu de poser le sommet de la courbe génératrice au centre de la spirale, on peut la mettre dans une situation différente, mais alors la spirale qui en résultera, ne sera plus du nombre de celles qu'on appelle *vertico-centrales* dont nous parlons : je vais donner un exemple d'un autre espece que M. VARIGNON appelle *co-centrales*.

Fig. 141. Soit (*Fig.* 141) la courbe HYP, une hyperbole équilatere, dont AC & C 24 sont les asymptotes, lesquelles font un angle droit en C, où je pose le centre de la spirale, & par conséquent celui du cercle de révolution DEFG, que je fais d'une ouverture de compas prise à volonté, & dont je divise la circonférence en tel nombre de parties que je veux avoir de points de la spirale à chaque révolution : par exemple en douze. Ensuite ayant pris aussi à volonté une ligne constante, par exemple CG, je la divise aussi en douze parties égales, c'est-à-dire en un même nombre que la circonférence du cercle de révolution, & par chacune de ces parties, je mene des paralleles à une des asymptotes AC, que je prends pour l'axe AX de la spirale ; & parce que cette premiere parallele rencontre l'hyperbole hors de cet axe en H, je commence aussi ma spirale au point 1 *r*, éloigné de l'axe AX d'une douzieme partie de la révolution A 1 *r* du point 2, où la seconde division de la constante CG, donne le point 2 ; je fais un arc 2, 2 *r* de deux douziemes de la révolution, qui me donne le point 2 *r*, & ainsi de suite, comme aux spirales paraboliques verticocentrales ; mais enfin parce que l'hyperbole HYP, ne parvient jamais à son asymptote CG, cette spirale ne fera que tourner autour du centre C, dont elle approchera toujours à chaque révolution, sans pouvoir jamais y arriver.

Je ne m'arrêterai pas aux différences des positions des courbes génératrices, qui croisent l'axe de la spirale ; je dirai seulement qu'alors il se forme deux spirales, une d'un côté, l'autre de l'autre de cet axe, lesquelles sont égales & tournées en sens contraire, comme nous l'avons dit de la spirale d'Archimede,

(*Fig.* 136) ſi les deux parties de la courbe génératrice ſont égales; mais ſi elles ſont inégales, il eſt clair que la figure de cœur qui en réſulte deviendra irréguliere, un côté étant plus ou moins enflé que l'autre; ce qui n'eſt d'aucun uſage pour les ornemens d'Architecture. C'eſt pourquoi je paſſe ſur les variétés infinies qui en peuvent réſulter, les exemples que je viens de donner étant ſuffiſans pour exercer les Architectes & les Artiſtes qui ont des ornemens à tracer dans des agréables variations de contour de ſpirales.

J'avertirai ſeulement; 1°. Que ſi la courbe génératrice ſe ferme du côté de l'axe de la ſpirale, comme ſi l'on prenoit un demi-cercle ou une demie-ellipſe au lieu de leur quart, la ſpirale ne continueroit pas à tourner du même ſens, depuis la plus grande ordonnée; mais elle ſe rebrouſſeroit & reviendroit en quelque façon ſur ſes pas, ayant ſa concavité tournée du même côté.

2°. Que ſi l'on prend pour courbe génératrice une hyperbole équilatere co-centrique, c'eſt-à-dire, dont le centre ſoit le même que celui de la ſpirale, celle qui en ſera engendrée, n'aura ni commencement ni fin; c'eſt-à-dire, qu'elle commencera à une diſtance infinie de ſon centre, & n'arrivera jamais à ce centre, & cependant que lui donnant un commencement, elle coupera ſon axe après la premiere révolution; ce qui eſt une ſuite des propriétés des aſymptotes, qui approchent à l'infini de l'hyperbole ſans pouvoir y arriver, comme nous venons de le dire.

3°. Que ſi l'on prend pour courbe génératrice une courbe logarithmique, au lieu de l'hyperbole, la ſpirale qui en ſera engendrée aura un commencement & n'aura point de fin; ou ſi elle a une fin, elle n'aura point de commencement, ſelon que l'on mettra ſon aſymptote ſur l'axe, ou perpendiculairement à l'axe de la ſpirale.

On peut faire la même choſe par le moyen de l'hyperbole, en mettant le centre de la ſpirale, non au centre de l'hyperbole, mais ſur une de ſes aſymptotes à quelque diſtance de ce centre; ce qui fournit un moyen très-commode pour tracer une infinité de volutes qu'on peut faire venir d'un point éloigné du centre & de l'axe, & les faire finir au milieu par un *œil* circulaire, comme font les Architectes à la volute Ionique, parce que l'on peut ſauver plus délicatement le jarret qui ſe fait à la

jonction de la ſpirale & de cet *œil*, ſi elle eſt de la nature de celles qui tournent autour de leur centre ſans y arriver; par la même raiſon, on fait auſſi plus parfaitement la jonction de la branche droite du limon avec *la volute ou limaçon* qui le termine au bas des eſcaliers les plus à la mode.

On peut encore changer toutes ſortes de ſpirales en les élargiſſant ou en les reſſerrant de telle maniere que l'on voudra, par le moyen de la réduction des quarreaux changés en parallelogrammes & même en trapezes; ſi on vouloit la reſſerrer d'un côté plus que de l'autre, ſuppoſant par exemple que ſuivant un deſſein que je me propoſe, je trouve la ſpirale ALBVC (*Fig.* 140) trop ouverte ſur ſon diametre 2ʳ C 8, je n'ai qu'à faire des parallelogrammes reſſerrés ſuivant cette condition, comme on voit à la
Fig. 142. Fig. 142, & tracer ſur l'original des quarrés en même nombre, ce que l'on n'a pas fait ici pour éviter la confuſion, parce que tous les Deſſinateurs ſçavent réduire au quarreau du petit au grand, & qu'il n'y a ici d'autre différence que celle de la figure des quarreaux qui ſont quarrés dans l'original & oblongs dans la réduction; ce qui fait une figure diſſemblable, mais cependant encore proportionnelle en un ſens.

USAGE.

La ſpirale eſt une courbe dont on fait uſage en Architecture en pluſieurs ſortes d'ouvrages; premierement elle eſt très-fréquente dans les ornemens de ſerrurerie & de ſculpture; on l'employe pour les volutes des chapiteaux Ioniques & Compoſites en petit, & en grand dans les amortiſſemens de différentes pieces d'Architecture, particulierement pour les conſoles & les terminaiſons des contreforts ou piliers butans qu'on éleve pour arcbouter les voutes des nefs & des dômes des Egliſes, comme on en voit en quatre différens endroits au-dehors du Val-de-Grace à Paris, & dans toutes les Egliſes modernes, tant en Italie qu'ailleurs. Les Architectes qui ont du goût pour tracer l'ornement, leur donnent des contours tâtonnés en renflant ou en reſſerrant chaque partie, ſelon qu'ils trouvent que l'œil eſt plus ou moins ſatisfait: s'ils avoient connoiſſance des ſecours de la Géométrie, je ne doute point qu'ils ne réuſſiſſent beaucoup mieux dans la grace du contour, lequel étant intrinſéquement régulier, ſe préſente par toutes ſes parties avec une

136.

137.

138.

139.

140.

141.

142.

uniformité qui ne contente pas moins l'esprit que les yeux ; ce que l'on ne peut se flatter de faire par le seul tâtonnement.

Enfin la spirale est une courbe nécessaire pour former la base des enroulemens qui s'élevent en limace, comme sont ceux que l'on fait aux extrêmités des limons des escaliers, que les ouvriers appellent *limaçons* : la *circulaire*, telle que nous venons de la donner à la Figure, convient mieux à l'évasement des premieres marches, & à la jonction du limon droit que la spirale d'Archimede, ou la volute des Architectes, comme j'en ai fait l'expérience chez moi où je l'ai employée, & celle qui est hyperbolique co-centrale encore mieux ; nous donnerons ci-après la maniere d'en tracer les joints.

Des arcs rampans.

EN termes d'Architecture les lignes qui ne sont ni verticales ni horisontales, mais inclinées à l'horison, sont appellées *rampantes*, & les arcs dont les naissances ne sont pas de niveau entr'elles, l'une étant plus basse que l'autre, sont appellés *arcs rampans*, tels sont les *arcs-droits* des descentes biaises, dont les naissances du ceintre de face sont de niveau, & les arcades pratiquées au-dessous des rampes des terrasses ou des escaliers.

Pour expliquer géométriquement & plus généralement la signification de ce terme à l'égard des lignes courbes, on peut dire que toutes celles dont les ordonnées ne sont pas perpendiculaires à un diametre vertical, lorsqu'elles sont paralleles à la ligne qui passe par les naissances de l'arc, sont des courbes rampantes & *des arcs rampans*.

Il est bon de faire remarquer ici que les appareilleurs appellent particulierement *courbe rampante*, celle du limon de la *vis-à-jour* ; mais nous ne croyons pas devoir ici nous priver d'une expression générale pour nous conformer à un langage si peu respectable.

PROBLEME.

Changer en arc rampant un arc de cercle, ou d'une courbe quelconque.

Soit donné (*Fig.* 143) l'arc de cercle AHB qu'on suppose *Fig.* 143.

Pl. 13. Fig. 143. ici un demi-cercle, quoiqu'il puisse être un segment plus ou moins grand; sur le milieu C de la corde AB, on élevera une perpendiculaire indéfinie C *h*, à laquelle on menera deux paralleles par les extrêmités A & B; ensuite on prendra sur C *h* un point *c* à volonté pour le sommet d'un angle C *c b* qu'on fera égal au complement de l'inclinaison qu'on veut donner à la rampe avec une ligne de niveau *b* N, & l'on tirera la ligne *a b* qui sera terminée par les paralleles indéfinies A *a*, B *b*, dont les intersections en *a* & *b* donneront les points des naisances haute & basse de l'arc rampant qu'on se propose de faire.

Ensuite ayant tiré à volonté plusieurs paralleles OO, *i i*, DF à la corde AB, qui couperont CH aux points *r*, G, *e*; on portera les abscisses C *r*, CG, C *e* & CH, en *c* R, *c g*, *c* E, & *c h*: & par les points R *g* E, on menera des paralleles à *a b*, sur lesquelles on portera de part & d'autres les longueurs *r* O, G *i*, *e* D du demi-cercle qui donneront les points *o*, I, *f*, *h*, *d*, &c. par lesquels on tracera à la main, ou avec une regle pliante le contour de l'arc rampant *a h b*, qu'on demande.

Fig. 144. On peut faire la même chose d'une autre maniere, en menant à volonté (*Fig.* 144) autant de paralleles que l'on voudra à la ligne C *h*, prolongées indéfiniment, & portant sur chacune de ces paralleles, comme *o* R, & *o* D, les longueurs O *r* & O *d* comprises dans le segment de cercle donné, en OR & OD, au-dessus de la ligne inclinée *a b*, & l'on aura autant de points que l'on voudra *a* R *h* D *b* de l'arc rampant demandé, qui est, comme l'on voit, une portion d'ellipse.

Second exemple pour toute autre courbe que le cercle.

Fig. 145. Soit (*Fig.* 145) une spirale DBHL *c* que l'on veut faire ramper en tout ou en partie; ayant pris pour axe la verticale AB, qui passe par le centre de la spirale, à laquelle les Architectes ont donné le nom de *cathete*; on lui menera à volonté autant de perpendiculaires qu'on voudra avoir de points de la spirale rampante, comme DA, EH, FN, GI, &c. que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elles rencontrent une autre ligne *a b*, parallele à AB & distante à volonté, qu'elles couperont aux points *a h l k b*: ensuite on fera l'angle *h k i* égal au complement de l'inclinaison que l'on veut donner à la rampe, pour déterminer la position d'une des ordonnées *k i*, à laquelle on menera des

paralleles indéfinies par les points trouvés *a h l k*, comme *a d*, *h e*, *l n*, *c o*, *k g*, fur lefquelles on portera les longueurs des ordonnées à l'axe AB, comme AD en *a d*, HE en *h e*, LF en *l f*, &c. fuivant leur ordre, & l'on aura les points *d e f g b i n h m l c*, par lefquels on tracera à la main une fpirale, qui eft celle qu'on demande. *Fig.* 145.

Troifieme exemple, pour les Figures mêlées de différentes courbes, par exemple (*Fig.* 146) un contour de baluftre droit qu'on veut rendre rampant pour porter un appui de rampe d'efcalier. *Fig.* 146.

Ayant mené des perpendiculaires à l'axe AB, c'eft-à-dire, à la ligne du milieu du baluftre droit, jufqu'à la rencontre d'une parallele CD, pofée à diftance prife à volonté, on menera par tous les points de rencontre autant de lignes inclinées à CD, fuivant la pente de la rampe donnée, ou déterminée par la fituation des lieux, qui couperont une troifiéme parallele *a b* prife pour l'axe du baluftre rampant à diftance prife à volonté, en des points correfpondans aux divifions du baluftre droit, qui feront les milieux des diftances des côtés du baluftre rampant, comme on vient de le dire pour la fpirale dans l'exemple précédent ; ce que la Fig. 146 expofe fenfiblement à la vûe.

U S A G E.

Ce Problême & particulierement les deux derniers exemples, font la bafe de la pratique de tous les ornemens de bois, de pierre, ou de fer que l'on met aux appuis des rampes des efcaliers ; car ayant commencé par tracer régulierement les baluftres, guillochis & enroulemens de rinceaux & autres deffeins, tels qu'on les veut dans une fituation horifontale, on en ralonge les parties inférieures, & on racourcit les fupérieures dans une fi jufte proportion, que l'œil n'eft point choqué de ce changement ; & bien loin de caufer de la difformité dans les contours des ornemens, il femble au contraire qu'il y furvient une variété agréable à la vûe.

Il peut auffi fervir pour les ceintres des arcades & voutes rampantes, lorfqu'on n'a aucune fujettion de hauteur ou de direction de piédroit, parce qu'alors il n'y a qu'à changer l'arc circulaire en rampant ; mais à caufe des différences qui peuvent y furvenir, nous devons y pourvoir par un Problême général.

Des courbes qui conviennent à ces ſortes de voutes & d'arcades qu'on appelle Arcs-rampans.

NOus avons parlé au Problême précédent de la tranſmutation des courbes dont les ordonnées ſont horiſontales en courbes inclinées à l'horiſon; il s'agit à préſent de trouver le moyen de faire paſſer une courbe par certains points donnés, qui ſont ceux des impoſtes & des clefs des arcs rampans, avec cette circonſtance qu'elle ſoit touchée par les lignes droites qui paſſent par ces points, leſquelles doivent auſſi être données de poſition ou de direction.

Les lignes qui doivent toucher les arcs rampans, ſont premierement les deux *piédroits* ou *jambages* qui portent l'arcade; leſquels peuvent avoir trois ſituations différentes, 1°. ou verticale, lorſqu'ils ſont *à plomb*, en termes de l'Art; 2°. ou inclinés en *ſurplomb*; 3°. ou inclinés en *talud*.

Secondement, une ligne réelle ou imaginaire qui termine la hauteur de l'arc rampant, laquelle peut auſſi être horiſontale, ou inclinée à l'horiſon.

La ſituation la plus ordinaire des piédroits eſt la verticale; cependant quelquefois, pour plus de ſolidité, on leur donne du talud, & quelquefois auſſi, pour mieux buter & appuyer une voute ou un mur, on les fait en ſurplomb; ce cas eſt plus rare dans la pratique que le précédent, car on ne fait plus guere d'arcs-boutans comme dans l'Architecture Gothique; les Modernes tâchent de cacher la néceſſité de ces eſpeces de contreforts par des moyens plus agréables à la vûe, comme ſont des groupes de colonnes, ou des conſoles renverſées.

La ſituation la plus naturelle à la termination de la hauteur d'un arc rampant, ſemble être une ligne horiſontale; en effet il peut toujours être terminé par une telle ligne, qui devroit être appellée la ligne de *ſommité*; cependant on appelle ainſi toute ligne donnée qui traverſe les piédroits prolongés, & qui doit toucher la courbe de l'arc rampant.

Outre ces trois lignes eſſentielles aux arcs rampans, qu'elles doivent toucher, on en conſidere une quatrieme, qui joint leurs points d'attouchement aux piédroits qu'elle coupe, leſquels ne ſont

ſont pas de niveau, par la nature de cette eſpece d'arc ; on l'appelle *la ligne de rampe*.

Les différences de poſition de ces quatre lignes; ſçavoir, des deux piédroits, de la ligne de ſommité & de la ligne de rampe, font toute la difficulté & la variété des cas où il faut chercher les courbes convenables.

Il eſt évident à tous ceux qui ſçavent un peu de Géométrie, qu'on peut trouver une infinité de courbes qui peuvent toucher les trois premieres lignes droites dans tous les cas, ou du moins dans pluſieurs de ceux qu'on peut propoſer; mais on ſe borne en Architecture à celles des ſections coniques qui ſont les plus connues, pour éviter les difficultés que les autres entraînent avec elles, ou dans leur conſtruction, ou dans la maniere de leur mener des tangentes en certaines circonſtances marquées.

Pour moi je trouve qu'à cette difficulté près les ſpirales de M. VARIGNON, donnent un contour de ceintre autant & plus agréable à la vûe que celui des ſections coniques qu'on peut employer pour un arc rampant : je pourrois parler auſſi de la ſpirale d'ARCHIMEDE ; mais on ne peut pas la varier autant que celles-là. Or cette difficulté n'eſt pas petite, ſi l'on vouloit opérer géométriquement ; on peut même dire qu'elle eſt inſurmontable, car ARCHIMEDE a démontré que la ſous-tangente de la ſpirale étoit égale à la circonférence du cercle de révolution ; d'où il ſuit que ſi l'on pouvoit lui tirer une tangente, on auroit trouvé la quadrature du cercle. Cependant ſuppoſant la rectification de la circonférence du cercle, qu'on connoît ſuffiſamment pour ne pas trouver d'erreur dans la pratique ; on peut mener des tangentes à cette ſpirale, comme nous le dirons ci-après.

On demandera s'il eſt de néceſſité indiſpenſable que la courbe du ceintre de l'arc rampant touche les deux piédroits, & pourquoi ?

A cela je réponds, ce que j'ai déja dit ailleurs, que puiſque l'arc doit être une continuation du piédroit, il doit ſe faire une tranſition inſenſible de la ligne droite du piédroit à la courbe de l'arc rampant; or l'alliance de la ligne courbe avec la droite, ne peut ſe faire qu'au point de l'attouchement, où l'angle qu'elles font enſemble eſt infiniment grand, par conſéquent imperceptible à la vûe, puiſqu'il differe infiniment peu de la

ligne droite, l'œil ne peut être trompé que par cet artifice; toute autre jonction ailleurs qu'au point d'attouchement devient difforme & choque la vûe: l'Architecte de la Chapelle de Versailles n'a pas senti ce défaut, lorsqu'il a fait des arcs rampans sous les arcboutans au-dessus des bas-côtés; car leur jonction au grand mur est un bon pli bien marqué; c'est un arc coupé & appliqué contre ce mur sans art & sans naissance naturelle, sur un piédroit, ou sur un dosseret.

Le plus grand sujet de variation des arcs rampans vient de la ligne de sommité, qu'il est au choix de l'Architecte d'approcher ou d'éloigner des impostes de l'arc, & de lui donner telle direction & inclinaison qu'il juge à propos, suivant le dessein qu'il se propose, & l'égard qu'il a à la situation des lieux, comme lorsque l'arc rampant doit soutenir un pallier, ou se terminer sous un plinte de niveau, la ligne de sommité devient horisontale. Quelquefois il convient de donner à cette ligne une direction parallele à celle de la ligne de rampe, comme lorsque l'arc rampant soutient une seconde rampe égale & parallele à la premiere, quelquefois plus ou moins inclinée; si cette seconde rampe, ou un plinte ou corniche au-dessus est inclinée plus ou moins; dans ces deux dernier cas, le point d'attouchement de la ligne appellée de sommité, n'est pas au sommet de la courbe; je veux dire à l'endroit le plus élevé, comme les Figures 148 & 150 le font voir: puisque ce point est variable, il s'agit de le trouver, lorsqu'on a déterminé la distance & l'inclinaison de la ligne de sommité.

PROBLEME XX.

La direction des piédroits, la ligne de rampe, & celle de sommité d'un arc rampant étant donnés, décrire la section conique qui doit lui servir de ceintre.

Ou en termes Géométriques.

Trois lignes inclinées entr'elles qui doivent toucher une section conique, dont les points d'attouchement des deux extrêmes sont donnés, trouver celui de la moyenne, & les lignes nécessaires pour décrire cette courbe.

Soient les piédroits AR, BP (*Fig.* 147, 148, 150, 151) la

ligne de rampe RP, la ligne de fommité SO: Premierement, fi les piédroits AR, BP font paralleles entr'eux, auffi-bien que les lignes de rampe RP, & de fommité SO; * il eft clair que le point d'attouchement de cette derniere eft donné au milieu de SO au point T, parce qu'en ce cas la fection qui fatisfait au Problême eft une ellipfe, comme nous l'avons dit ci-devant, & que la ligne T t qui paffera par le milieu de RP, fera un diametre conjugué à la ligne de rampe où fera le centre C, parce que BP & SO étant des tangentes, les lignes qui leur font paralleles, & qui paffent par le centre C, font des diamertes conjugués; cela ne fouffre point de difficulté.

* *Fig.* 147.

Dans tous les autres cas où les lignes de rampe & de fommité ne font pas paralleles; quoique les piédroits foient paralleles entr'eux, ou ne le foient pas; on trouvera le point T, où la courbe doit toucher la ligne de fommité, comme il fuit.

Fig. 148. 150, 134, & 151.

Ayant prolongé les lignes RP & SO données jufqu'à ce qu'elles concourent en Y; par le point S on menera une parallele DE à OR, fi les piédroits ne font pas paralleles, comme aux Figures 150 & 151, laquelle ne fera qu'un piédroit prolongé, s'ils font paralleles, comme à la Figure 148, elle coupera RY en D; enfuite ayant porté DS en SE, ou Figure 148, PS en SE, on tirera ER qui coupera SO au point T, où fera celui d'attouchement que l'on cherche.

Ce point étant trouvé: 1°. Il fera facile de décrire la fection conique qui doit toucher les trois lignes AO, OS, SB aux points R, T, P, par le Problême XIV.

2°. On pourra auffi la décrire par le Problême XIII, parce qu'on a cinq points donnés; fi elle eft une ellipfe ou une hyperbole, dont le centre foit dans l'étendue du plan où on veut la décrire; car menant des paralleles à SO par les points donnés à la circonférence P & R qui couperont le diametre T t en V & u: fi on fait Vp = PV, ur = uR, qC = Cu, & qu'on meme par q une parallele à SO, fur laquelle on prenne qn, qN = uR, ur & Ct = CT, on aura déja huit points de l'ellipfe.

Fig. 150.

3°. Suppofant que le centre fe trouve loin hors de l'étendue de la furface, fur laquelle on veut la décrire; on pourra en trouver autant de points que l'on voudra par le Problême XV, car on a deux tangentes, & la pofition d'un, & même de deux diametres Sm & OM, qui paffent par les points S & m, O & M, fuppofant PT & TR divifés en deux également en m & M.

Fig. 150. 4°. On peut par ce moyen trouver les diametres conjugués ; car puisque T *t* est donné, en faisant C *t* = CT, que son conjugué doit passer par le point C trouvé, comme au Problême XV, & parallelement à SO, il ne s'agit plus que de trouver sa longueur de part & d'autre du point C ; ce que l'on peut faire par le Problême IV, puisqu'on a une & même deux ordonnées au diametre *t* T ; sçavoir R *u* & P *u*, ou par un autre méthode que voici.

Ayant mené par le centre C une ligne FG parallele à SO ; on menera aussi RK parallele à T *t* ; ensuite on cherchera une moyenne proportionelle entre CK & CG, laquelle donnera C z pour moitié du diametre conjugé à T *t* par l'Art. 46 qui dit que les lignes menées du centre à la tangente, & coupées par une ordonnée, sont divisées en raison continuellement proportionnelles CK : C z : : C z : CG.

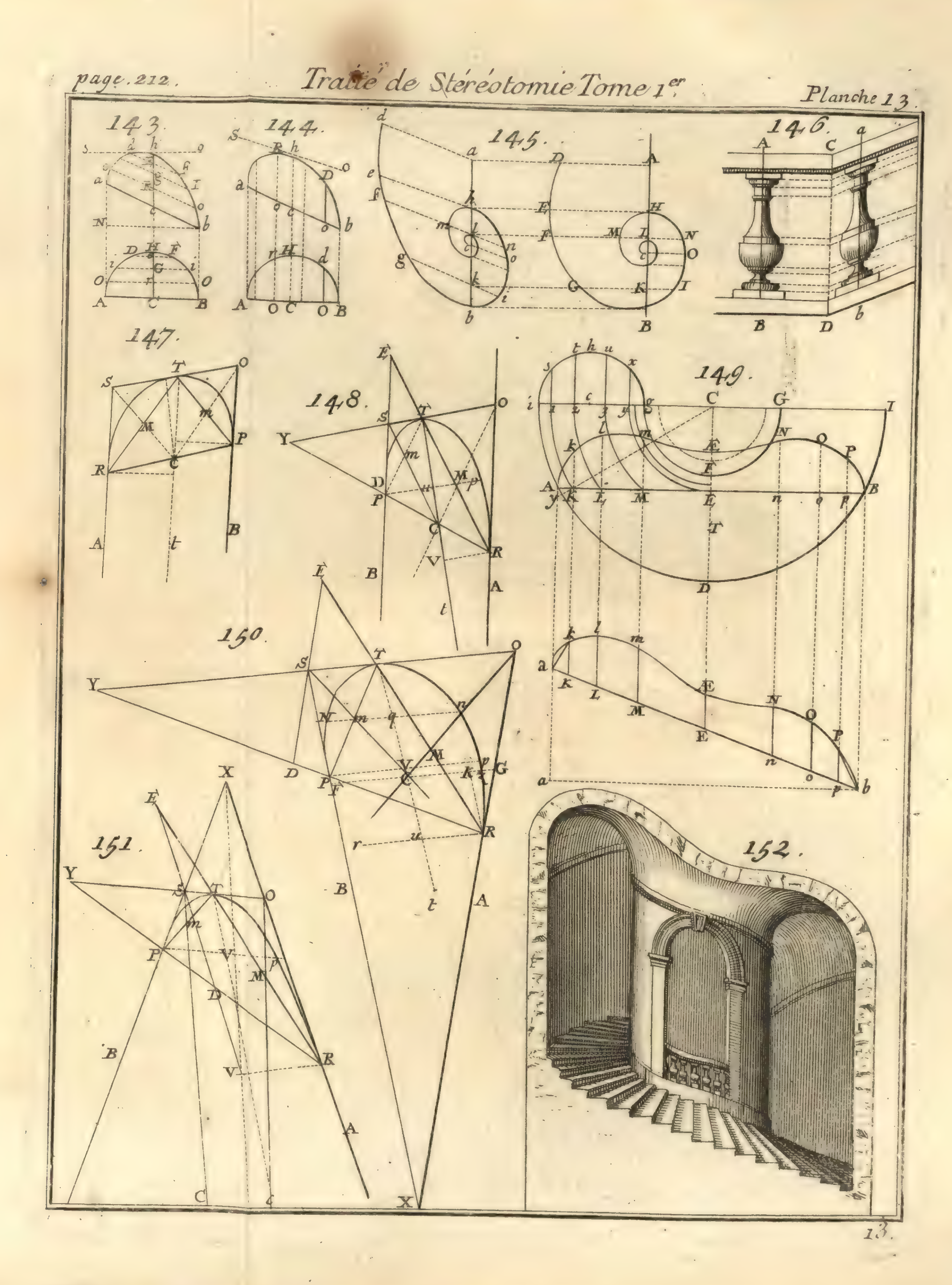
DEMONSTRATION.

Nous avons dit dans nos préliminaires sur les sections coniques, Art. 48, que les tangentes à une section conique qui se rencontrent, & qui sont terminées par d'autres lignes tirées par deux points d'attouchement, se coupent en raison harmonique ; ce que nous avons dit être démontré dans les Traités de ces sections : or la tangente OY est coupée par la ligne RP prolongée, qui passe par deux points d'attouchement R & P, & par les tangentes RO & PS, qui passent par ces mêmes points R & P ; donc on a trois points d'une division harmonique ; sçavoir, O, S, & Y, il reste à prouver que le quatrieme T est bien trouvé.

A cause des triangles semblables YOR, YSD, on aura YO : OS : : YS : SD = SE, & à cause des triangles semblables ORT, SET, on aura OR : SE : : OT : ST ; donc, par raison d'égalité, YO : OS : : OT, ST ; *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

Cette proposition renferme quinze Problêmes que François BLONDEL a donnés pour trouver les courbes des sections coniques qui peuvent toucher toutes sortes de piédroits & de lignes de sommité en quelque position qu'ils puissent être pour former un arc rampant ; ainsi elle abrege beaucoup cette matiere.


143.
144.
145.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.

CHAPITRE IV.

De l'imitation des courbes régulieres par des compositions d'arcs de cercles.

LOrsqu'on aime la régularité, on ne se sert point de ces courbes qui n'ont que de la ressemblance avec les régulieres, dont elles ne sont que des copies imparfaites, formées par la composition de plusieurs arcs de cercles de différents rayons; l'original est sans contredit préférable à la copie. Cependant l'ignorance des propriétés des courbes, même les plus communes, comme sont les sections coniques & les spirales, jointe à une plus grande facilité apparente de tracer des arcs de cercle, & peut être encore celle d'en tirer les joints de tête pour les traits des voutes, ont fait chercher plusieurs moyens de les imiter par un assemblage de portions de cercle; & comme l'ellipse est une des plus usuelles, les Dessinateurs & les Architectes se sont efforcés pendant long-tems, mais inutilement, de l'imiter parfaitement sans jarrets par 3 ou 5 portions de cercle, les axes étant donnés. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter les yeux sur les Planches du Livre du P. DERAND, particulierement sur celle du Chapitre XIX, où la position des centres de ses arcs rampans produit des jarrets trop considérables à leur contour pour qu'on puisse les imputer au Graveur.

On reconnoît les mêmes défauts dans une partie des deux Planches du Livre de BOSSE, sur la *maniere de dessiner l'Architecture*, quoiqu'il eut recueilli ce qui s'étoit fait de mieux jusqu'à son tems. La découverte d'une méthode plus exacte étoit réservée à des Géometres, tels que M. PITOT & CAMUS, tous deux de l'Académie des Sciences. Nous insérons ci-après le seul Problême du premier qu'il fit exécuter à l'arche du pont de l'Isle Adam sur l'Oise, en 1720, dont le ceintre est une anse de panier surbaissée, composée de trois arcs de 60 degrés chacun. Comme M. CAMUS depuis peu a beaucoup étendu cette théorie de l'imitation des ellipses par trois & cinq arcs de cercle rassemblés suivant les différentes circonstances données, nous

équation $\sqrt{3xx} + a - b + x$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}\overline{a-b} + \sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}^2}$, par la construction : $CY = a - b$ & $CZ = \frac{1}{2}\overline{a-b}$, ainsi $CE = = \sqrt{\overline{a-b} \times \frac{1}{2}\overline{a-b}}$, & $ZE = \sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}^2}$; mais CS (x) = CZ $\frac{1}{2}\overline{a-b}$ + ZS ou ZE $\sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}^2}$; donc $x = \frac{1}{2}\overline{a-b} + \sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}^2}$; *ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XXII.

Imiter par deux arcs de cercle les portions d'ellipses faites sur deux diametres, qui ne sont pas des axes conjugués, dont l'un est terminé par deux tangentes à ses extrêmités, & dont le conjugué est déterminé par une troisieme tangente donnée de position.

On ne peut imiter avec une composition de deux arcs de cercle rassemblés, toutes sortes d'ellipses faites sur des diametres conjugués, qui ne sont pas des axes, & qui doivent toucher une ligne donnée de situation & de distance ; mais on peut faire ensorte que l'ovale touchera la parallele de la troisieme tangente donnée.

Pour connoître si le Problême peut être résolu par des arcs de cercle.

Fig. 154. Soient (*Fig.* 154) PD & RG deux tangentes aux points B & A, & Dg une troisieme ligne qui doit toucher l'ovale proposée à faire ; on portera la longueur DB sur la ligne Dg en Db, & la longueur gA en $g\,a$: si ces deux points a & b ne tombent pas au même point, le Problême ne peut pas être résolu ; parce qu'il est démontré dans la Géométrie élémentaire *, que si d'un point d ou G pris hors du cercle, on lui mene deux tangentes dB, dT, ou GA, GT, elles sont égales entr'elles ; supposant donc la ligne Dg donnée ; il faut pour résoudre ce Problême, faire Db = DB, & $g\,a$ = gA, tirer Aa & Bb, le point T de leur intersection sera celui d'attouchement de la tangente dG, auquel on tirera la perpendiculaire indéfinie TC, & par les deux autres points d'attouchement A & B donnés, faisant Bc perpendiculaire sur dP, & AC perpendiculaire sur RG, les points C & c, où ces lignes couperont TC, seront les centres des arcs de cercle qui doivent représenter l'ellipse proposée à faire, dans le cas où elle peut en approcher le plus. Si la ligne Dg donné

*Eucl. l. 3. pr. 37.

donnée de poſition eſt au-deſſous du point T, comme EF, il faut faire E *h* = EB, & F *i* = FA, tirer B *h* & A *i*, leſquelles étant prolongées, ſe couperont au point T, qui eſt celui de l'attouchement que l'on cherche, par lequel ayant tiré une parallele *d* G à la donnée D *g* ou EF, on reconnoîtra que la ſomme des lignes B *d* & AG ſera égale à celles des parties *d* T & GT. *Fig.* 154.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles D *g* & *d* G, ou EF, DB : D *b* : : *d* B : *d* T, & *g* A : *g a* : : GA : GT, mais *g* A = *g a* (par la conſtruction) & DB = D *b*, donc *d* T = *d* B, & GA = GT; donc le point T eſt celui de l'attouchement de la ligne DG; *ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

D'où ſe tire la maniere de *faire toutes ſortes d'arcs rampans, avec des portions de cercle dans quelque poſition que ſoient les piédroits entr'eux, paralleles, en ſurplomb, ou en talud, & en quelque ſituation que ſoit la ligne de ſommité d G*: en voici des exemples pour les piédroits paralleles entr'eux, qui ſont les plus ordinaires.

Premier cas où la ligne de ſommité *d* G eſt horiſontale, & les piédroits à plomb. Soit (*Fig.* 155) la ligne de rampe donnée AB, ſa hauteur ſur l'horiſon BO étant porté ſur O *b* d'alignement à la ligne horiſontale AO, on diviſera A *b* en deux également en *m*, d'où l'on élevera la perpendiculaire *m* T : puis du centre *m* & pour rayon A *m*, on décrira l'arc de cercle AT juſqu'à la rencontre de *m* T; enſuite ayant pris ſur *m* T, la longueur *m c* = OB, le point *c* ſera le centre du ſecond arc BT qui rencontrera le premier au point d'attouchement T, ce qu'il falloit faire pour en rendre la jonction imperceptible. *Fig.* 155.

Second cas où la ligne de rampe AB eſt parallele à celle de ſommité *d* G.

Ayant diviſé l'horiſontale AO en deux (*Fig.* 156) également en *m*, & élevé en ce point la verticale *m* T, qui coupera la ligne de ſommité *d* G au point T, il faut faire A *d* = *a* T, comme nous l'avons dit au commencement de cette propoſition; pui au point T faire TC perpendiculaire à *d* G, ou ce qui eſt la même choſe à la parallele AB; le point C où cette perpen- *Fig.* 156.

diculaire coupera l'horisontale AO, sera le centre du grand arc de cercle AT : puis menant B *e* parallele à AO, elle coupera TC au point *c*, où sera le centre du second arc TB, qui se joindra au grand au point d'attouchement en T, comme il est nécessaire.

Fig. 157. *Troisieme cas* où la ligne de sommité D *g* (*Fig.* 157) n'est pas parallele à la ligne de rampe AB.

Ayant trouvé le point T, comme on l'a dit au commencement de ce Problême, on tirera TC perpendiculaire à D *g*, & B *c* parallele à A *o*, on aura comme au cas précédent, les points C & *c* pour les centres des deux arcs qui doivent former le rampant ATB.

DEMONSTRATION.

On voit que dans le fond tous ces cas ne different en rien pour la construction : car, 1°. (*Fig.* 155) puisque AO & *d* G sont paralleles entr'elles, de même que CT & A *d*; il est évident que A *d* = *d* T, & puisque C *b* = CA = CT, & O *b* = OB, BG sera égal à CO = TG, donc les deux tangentes de chacun de ces arcs AT, TB sont égales, par conséquent elles conviennent au cercle, & les centres C & *c* étant sur une même ligne, la même tangente *d* G est commune aux deux arcs de différens cercles.

Les deux cas suivans sont démontrés par le principe général qui établit la position des centres, & les mêmes conditions des tangentes, dont nous venons de parler.

COROLLAIRE.

Delà on tire la maniere de tracer *l'ovale pointue*, s'il est permis d'user ici de ce mot, pour exprimer l'inégalité de son contour aux extrêmités de son grand axe, laquelle à cause de sa conformité avec le contour d'un œuf appellé en latin *ovum*, est nommée en Architecture un *ove*. Comme c'est un ornement dont on fait grand usage dans les corniches, & qu'on en trouve de faux traits dans les Livres, je vais tâcher de les corriger. ALBERT DURER dans sa Géométrie en donne deux faux, l'un qu'il tire du cone, dont le contour fait un jarret à chaque extrêmité du grand axe, comme il seroit facile de le démontrer,

ſi la choſe en valoit la peine ; l'autre trait, qui a été ſuivi par quelques Auteurs, eſt une compoſition d'arcs de cercle, où il a fait encore une erreur groſſiere, joignant les ſecond & troiſieme arcs au-deſſus du point I en S au-dehors des rayons communs DI : 3 I.

Soit donné le petit diametre AB pour la plus grande largeur de l'ove ; on le diviſera en quatre parties, & on prolongera ce diametre de part & d'autre, de trois de ces parties, faiſant DA & B 2 égales à *m* B : puis du point C, milieu de AB, pour centre, on décrira un cercle AHBE, dont on diviſera les quarts de circonférence AE, BE en deux également aux points 3 & 4, par leſquels on menera les lignes DI, 2 *i*, qu'on fera égales à DB ou 2 A, en décrivant deux arcs BI, A *i* des points D & 2 pour centres, leſquels arcs étant continués, ſe couperont au point *x*, par où & par le centre C, on tirera la ligne H *x* : enſuite des points 3 & 4 pour centres, & de l'intervalle 3 I pour rayon, on décrira deux arcs qui ſe couperont en *y* ſur la ligne H *x* : on diviſera l'intervalle E *y* en deux également en *c*, par où on tirera les lignes 3 G, 4 *g*, qui rencontreront ces arcs en G & *g* ; enfin du point C pour centre, & de l'intervalle *c* G ou *c g* pour rayon, on décrira l'arc G *g*, qui achevera l'ovale en ove. Fig. 158.

Il eſt aiſé de voir qu'on peut allonger ou racourcir cet ove, en remontant ou rabaiſſant les centres 3 & 4, & le dernier *c*.

Les Architectes placent ordinairement cet ove dans une niche, dont *Boſſe* regle ainſi le contour. Il fait HL perpendiculaire & égale au diametre HE ; il la diviſe en deux également en O, & la moitié OL en quatre parties égales ; il diviſe enſuite le grand axe HF en trois également, & ce tiers en cinq : il porte une de ces cinquiemes de F en *p*, & de l'intervalle S *p* tiers de FH, il décrit un arc F z ; il ne dit pas de combien de degrés, ce qui ſeroit cependant néceſſaire pour avoir les intervalles des rayons *q* K, z N, qui ſont les cordes & les rayons de ces arcs.

Toute cette conſtruction n'eſt qu'une fantaiſie & un goût de deſſein arbitraire imité apparemment des reſtes des corniches antiques, où l'on voit ces niches formées de différentes façons, en côtes relevées & diviſées entr'elles par des ornemens de feuilles, & quelquefois de dards ; ce qui n'eſt pas de notre ſujet.

Nous avons donné ci-devant la maniere de décrire des de-

mi-ovales, par le moyen de trois arcs de cercle de 60 degrés chacun, ſuppoſant les axes donnés; il nous reſte à montrer comment on peut les faire de tant d'arcs de cercles que l'on voudra, ſoit régulierement en ovale, ou irrégulierement en portion d'ove; ce qui eſt néceſſaire pour tracer différentes ſortes de *cavets*, ou moulures creuſes, & les contours de certains amortiſſemens qu'on appelle *piédouches*.

Fig. 159. Soient, par exemple, (*Fig.* 159) donnés pluſieurs points A, 1, 2, 3, B, rangés d'une façon convenable au contour creux qu'on ſe propoſe, on prendra l'intervalle A 1 pour côté d'un triangle équilatéral A 1 D, & du point D pour centre, on décrira l'arc A 1: enſuite ayant tiré la corde 1, 2, & l'ayant diviſée en deux également en *m*, on y élevera une perpendiculaire *m e*, qui coupera 1 D prolongée en *e*, où ſera le centre du ſecond arc de cercle 1, 2; on tirera de même la corde 2, 3, & ſur ſon milieu M on élevera la perpendiculaire MC, qui coupera 2 *e* prolongée au point C, où ſera le centre du troiſieme arc 2, 3: ainſi de ſuite, on aura le dernier centre *f*.

La raiſon de cette pratique eſt claire par la ſeule conſtruction, où l'on reconnoît l'application de la regle générale, en ce qu'il y a deux centres ſur la ligne droite, où ſe fait la jonction des arcs qui doivent ſe toucher, c'eſt-à-dire avoir une tangente commune, comme TN, qui touche également les arcs 2, 1 & 2, 3, *ce qu'il falloit faire pour éviter tout jarret.*

COROLLAIRE.

Il ſuit de cet exemple, que quoique nous ayons compoſé des arcs rampans de deux ſeuls arcs de cercle d'un nombre de degrés égaux ou inégaux, on peut encore mieux les former de tel nombre d'arcs que l'on voudra; car ſi l'on conçoit la Figure 159 changée de ſituation, & qu'on prenne les points A & *p* pour des impoſtes, il eſt viſible que la courbe A 1 2 3 *p* peut ſervir pour un ceintre d'arc rampant; mais alors elle ſera moins une imitation de l'ellipſe, que de la ſpirale à laquelle le Problême ſuivant ſervira d'introduction.

PROBLEME XXIII.

La différence de hauteur des impostes A & H, & l'intervalle horisontal DA des piédroits d'un arc rampant étant donnés, tracer un ceintre composé d'autant d'arcs de cercle que l'on voudra, inégaux en rayons, mais égaux en nombre de degrés, ou si l'on veut d'une partie *de plus avec certaines circonstances.*

Soit (à la Figure au-dessus du chiffre 160) le ceintre ABH qu'on se propose de faire, par exemple, de cinq arcs de cercles; sur la hauteur donnée DH, comme diametre, on décrira un demi-cercle HID, qu'on divisera en cinq parties égales, c'est-à-dire, en cinq arcs, dont on tirera les cordes, ausquelles on menera des paralleles tangentes au cercle, pour lui circonscrire la moitié d'un décagone: ensuite ayant prolongé la ligne AD vers *n*, on portera successivement les cinq côtés de D en *n*. *Fig. 160.*

On divisera *n* A en deux également en X, par où on menera X *x* parallele & égale à DH, sur laquelle, comme diametre, ayant décrit un demi-cercle, on lui circonscrira le même polygone, mais tourné différemment, en commençant par porter une moitié de côté en X 1, & *x* 5, sur les paralleles DA & H 5, on fera C 3 égale à *o* 2, distance du centre *o*, à un angle du polygone, & des points 3 & 1, 3 & 5 pour centres & pour rayon le côté du polygone, on fera des interfections d'arcs qui donneront les points 2 & 4, pour tirer par les points 2, 3, 4, 5 les côtés qu'on prolongera indéfiniment vers B, E, F, G; enfin des points 1, 2, 3, 4, 5 pour centres & pour rayons 1 A, 2 B, 3 E, 4 F, 5 G, on décrira des arcs AB, BE, EF, FG, GH qui formeront ensemble sans aucun jarret le ceintre qu'on demande: si le nombre des côtés du polygone n'est pas complet, qu'il y ait une moitié de plus, il y aura aussi un arc de cercle moindre que les autres; ce qui arrivera toujours lorsque les côtés feront ensemble la moitié d'un nombre impair, comme du triangle équilatéral, du pentagone, de l'eptagone, &c.

Il n'est pas nécessaire de rendre raison de cette construction pour le concours des arcs de cercle qui se rencontrent au point commun d'attouchement; il suffit de dire pourquoi on a porté les côtés du polygone circonscrit sur la ligne AD prolongée;

c'eſt pour avoir l'axe Xx, & le centre C du polygone générateur qui doit être au milieu d'une ligne compoſée de la donnée DA & de l'ajoutée Dn; parce que chaque rayon des arcs de ſuite diminue de la longueur d'un côté du polygone 1 2, 2 3, 3 4, &c. par conſéquent tous enſemble diminuent de la quantité Dn, au-dedans d'un demi-cercle qui auroit XA ou Xn pour rayon, & feroit partie du cercle de révolution de la ſpirale dont cet arc rampant eſt une moitié. On voit par-là la raiſon de la conſtruction de la Figure 155, où nous avons porté la hauteur OB en Ob ſur AO prolongée, parce que nous étant propoſé de faire un ceintre de deux arcs de 90 degrés chacun, qui ſont la moitié du cercle, le polygone générateur en doit être le quarré, dont la hauteur OB eſt un côté qui doit être diminué ſur la longueur du rayon du ſecond arc : ce que l'on verra plus clairement au Problême ſuivant, qui n'eſt qu'une eſpece de Corollaire de celui-ci.

J'ai dit qu'il falloit que l'arc rampant fit une demi-révolution, parce que j'ai ſuppoſé les piédroits à plomb paralleles entr'eux ; mais s'ils étoient en talud, il faudroit qu'il en fit plus, & en ſurplomb moins, par la raiſon que nous avons ſouvent répetée, que les piédroits doivent être tangens aux arcs à leurs naiſſances.

PROBLEME XXIV.

Imiter la ſpirale par des portions d'arcs de cercle.

Suivant le principe général que tous les arcs inégaux doivent ſe joindre à un point commun d'attouchement, pour qu'on n'en apperçoive pas la jonction, il ne s'agit pour imiter la ſpirale que d'avoir toujours deux centres de ſuite ſur un même rayon, il faudroit encore que ces rayons diminuaſſent toujours dans une certaine proportion qui pourroit beaucoup varier, & que les angles qu'ils font entr'eux fuſſent égaux ou variables, auſſi dans une certaine proportion, comme nous l'avons dit des ſpirales ; ce que l'on peut bien concevoir après ce que nous avons dit de cette courbe, & l'exécuter ſuivant l'intention qu'on a de faire plus ou moins de révolutions, en imitant la ſpirale réguliere ; mais comme il ne s'agit pas dans cette imitation d'une ſi grande préciſion, qui ne peut convenir à une compoſition d'arcs de cercle, il nous ſuffit de donner la maniere générale de faire ce qu'on appelle en Architecture *volute.*

Ayant pris un point C pour centre de la ſpirale ou volute, (*Fig.* 160) on prendra ce point pour le milieu du côté d'un polygone quelconque : nous donnons ici pour exemple l'hexagone, (*Fig.* 160 & 161) & on le fera de telle grandeur que l'on voudra, à l'égard du plus grand rayon que l'on veut donner à la volute, & de l'intervalle que l'on veut occuper par les rayons oppoſés, dont on peut compter la diminution par le nombre des changemens des centres de chaque arc, & la longueur des côtés du polygone ajoutés enſemble. Les Architectes, qui, pour terminer les révolutions vers le centre, y font un cercle qu'ils appellent *l'œil* de la volute, ſe reglent par la grandeur de cet œil, auquel ils aſſignent un certain nombre de parties du module, c'eſt-à-dire, d'une diviſion faite ſur le diametre de la colonne, ſuivant leurs ſyſtêmes arbitraires. *Fig.* 160.

Pour nous qui ne propoſons qu'une maniere générale, dont on peut facilement déduire les particulieres, nous dirons ſeulement qu'ayant fait un polygone quelconque (*Fig.* 161) & ayant pris le milieu d'un de ſes côtés pour centre de la ſpirale, on tirera de ce point C à tous les angles du polygone des diagonales C 4, C 5, C 3, C 2, & enſuite s'étant fixé un nombre de révolutions, on y inſcrira autant de Polygones ſemblables au premier, qui auront toujours un de leurs côtés commun avec le premier 6 C 1, & les côtés de ces polygones feront encore en telle raiſon que l'on voudra, ſelon qu'on ſe propoſe de faire reſſerrer la volute plus ou moins vite. *Fig.* 161. & 162.

Cette diſpoſition étant faite, on prolongera tous les côtés de ces polygones d'une part ſeulement, & à volonté, autant à peu près qu'il convient à la longueur des rayons, ſuivant le premier AC qui a été donné, comme on voit dans la Figure 160, 1 2 *a*, 2 3 *b*, 3 4 *c*, 4 5 *d*, 5 G *e*, G 1 *f*, & 1 2 *a*, qui acheve la révolution. Enſuite du centre 2, & pour rayon 2 *a*, on fera l'arc *a b* terminé en *b* par le rayon 2 *h b* 1; du centre 3, & de l'intervalle 3 *b* pour rayon, on décrira l'arc *b c*; du centre 4, & pour rayon 4 *c*, on décrira l'arc *c d*, & ainſi de ſuite, en changeant de centre à chaque arc, poſant la pointe du compas ſur un des angles du polygone, & arrêtant l'autre au rayon fait du côté de ce polygone prolongé. *Fig.* 160.

Après la premiere révolution, on continuera de même pour la ſeconde ſur le polygone inſcrit immédiatement dans le premier; & au bout de cette ſeconde révolution, on continuera

Fig. 161. ſur les angles du troiſieme polygone, ſuivant l'ordre des chiffres de la Figure 161.

Il faut remarquer que la ſeconde révolution, commençant par deux centres 6, 7, qui ſont ſur un rayon commun, ne doit point faire de jarret avec la premiere; mais elle fait une ſorte d'irrégularité, en ce que la diſtance du centre 6 au centre 7, n'eſt pas égale à celle du centre 5 au centre 6, comme elle l'a été depuis le point 1 juſqu'au point 5, & comme elle le doit être enſuite aux intervalles 8, 9, 10, 11 & 12; la même choſe arrive à la troiſieme révolution. Cependant les Architectes qui donnent la Géométrie à bon marché, diſent comme D'AVILER, que la *volute de Goldman*, qui eſt faite ſur ce principe, eſt *Géométrique*, quoiqu'elle ne ſoit qu'un cas de notre méthode, dont la ſeule différence eſt, que ſon polygone central eſt un quarré, comme on voit en la Figure 162; mais en fait de volute Ionique, on n'a pas beſoin d'y regarder de ſi près; car les Architectes n'en veulent qu'à une décoration de goût, & non pas à une grande préciſion.

COROLLAIRE I.

Il ſuit que ſi l'on veut *aggrandir la volute* en-dehors, on peut en aggrandiſſant les rayons, continuer les arcs de ſuite, en changeant de centre ſur les mêmes angles des polygones, ou ſur d'autres circonſcrits ſur le même côté 6 C 1.

COROLLAIRE II.

Secondement, que ſi l'on veut *faire un double trait* qui vienne auſſi en ſe reſſerrant avec le premier, ayant déterminé la largeur *a i* ſur le rayon *c a*, on cherchera le côté d'un polygone ſemblable au premier, qui ſoit en même raiſon que *c i*, *c a*, par cette analogie $ca : ci :: c1 : cx$ appellant *x* le point qui ſera à l'angle du ſecond polygone ſur le rayon ſous 2 *b*; la petiteſſe de la Figure ne nous a pas permis d'exprimer ces différences, de peur d'y jetter de la confuſion : nous ne diſons point comment cela ſe fait par les lignes, car nous ſuppoſons que nous parlons à des Lecteurs qui ſçavent trouver une quatrieme proportionelle à trois lignes données, comme il eſt enſeigné chez EUCLIDE, *liv.* 6, *prop.* 12.

REMAR-

REMARQUE.

On voit par la Figure 162, que la volute de GOLDMAN que D'AVILER donne comme la plus convenable au chapiteau Ionique, n'eſt qu'un cas de notre maniere générale d'imiter la ſpirale par des arcs de cercle, en prenant pour le polygone central le quarré au lieu des autres polygones qui ont plus de côtés, d'où réſulteroient cependant des volutes plus parfaites.

CHAPITRE V.

De la diviſion des ſections coniques par des lignes droites perpendiculaires à leurs arcs.

ON ſçait que la perpendiculaire à un arc n'eſt autre choſe que celle qui fait des angles droits avec la tangente de cet arc au point d'attouchement; ainſi il faut conſidérer chaque point de diviſion comme celui d'un attouchement, y ſuppoſant une tangente réelle ou poſſible, à laquelle il faut tirer une perpendiculaire par le point d'attouchement donné, ou par un autre point pris hors de la courbe; ce qui s'exécute différemment pour chacune des ſections coniques.

I°.

Pour le cercle.

PROBLEME XXV.

Par un point donné, tirer une perpendiculaire à un arc de cercle, dont on ne connoît pas le centre.

Il peut y avoir trois cas dans ce Problême: 1°. ou le point donné eſt dans l'arc; 2°. ou hors de l'arc 3°. ou à l'extrêmité de l'arc. Pl. 15. Fig. 163.

Si le point donné eſt à la circonférence en D, (*Fig.* 163) on prendra de part & d'autre deux longueurs égales D*e*, D*f*; & des points *e* & *f* comme centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté pour rayon, on fera une interſection d'arcs en

g, par où & par le point D, on tirera la ligne *g* D, qui eſt celle qu'on cherche.

Fig. 163.

Secondement, ſi le point donné eſt hors de l'arc DGB, comme en *d*: du point *d* pour centre & pour rayon d'un intervalle pris à volonté, on tracera l'arc *h i* qui coupera le donné AGB aux points *h* & *i*, deſquels comme centres, & de la même ouverture de compas, ou de telle autre qu'on voudra pour rayon, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la moitié de la diſtance des centres *h* & *i*, on fera une interſection d'arcs en *b*; ſi par les points *b* & *d* on tire une ligne *b d*, la partie *d* G ſera celle que l'on cherche.

3°. Si le point donné eſt ſur l'extrêmité de l'arc donné AGB en B, & qu'on ne puiſſe pas le prolonger au-delà de ce point; 1°. par la maniere ordinaire, ayant porté à volonté deux longueurs égales BK, K *l* pour faire avec d'autres ouvertures pour rayons, à volonté l'interſection en P du même rayon BP, & du point K pour centre, on fera un arc en R, & de KP pour rayon, & du centre B on fera une interſection en R, la ligne RB ſera la demandée. Autrement on portera trois longueurs égales priſes à volonté ſur cet arc comme en K, *l*, *m*, & par le premier cas ayant fait KP & *l* N perpendiculaires ſur l'arc AGB, & égales entr'elles; on tirera les lignes *l* P, KN qui ſe couperont au point O; enſuite ayant tiré BP, & fait B *q* = KO par le point *q*, on menera KR = KN, ou BP; enfin par les points R & B on tirera RB qui ſera la ligne que l'on cherche.

DÉMONSTRATION.

Par les élémens de Géométrie, il eſt évident que ſi l'on tire les cordes *e f* & *h i*, la perpendiculaire ſur le milieu eſt auſſi perpendiculaire aux arcs dont elles ſont ſous-tendantes; or les deux opérations ont été faites comme ſi les cordes avoient été tirées de *e* en *f*, & de *h* en *i*, & qu'on voulut leur tirer des perpendiculaires, & les diviſer en deux; donc les lignes D *g* & *d* G ſont perpendiculaires à l'arc AGB; de ſorte que ſi l'on prolongeoit ces lignes, elles ſe rencontreroient au centre du cercle en *c*.

La raiſon de la conſtruction du troiſieme cas n'eſt pas moins claire, car les triangles *l* KP, KBR ont été faits égaux; mais le côté KP eſt perpendiculaire à l'arc *l* KB (par la conſtruc-

tion ;) donc BR le fera auſſi au même arc, *ce qu'il falloit faire.* Pl. 15. *Fig.* 163.

USAGE.

Ce Problême ſert à tracer les joints de tête de tous les ceintres circulaires des voutes, afin que les arrêtes des angles des vouſſoirs qui les compoſent, ſoient d'égale réſiſtance ; c'eſt ce que les ouvriers appellent le *trait quarré ſur la ligne courbe*, & *au bout de la ligne courbe*, lorſqu'il s'agit de faire le joint à une extrêmité, comme en BR.

Les ouvriers ont coutume de faire la même opération ſur les arcs qui ne ſont point circulaires, comme les ſurbaiſſés ou ſurhauſſés, qui ſont des portions d'ellipſes ou d'autres courbes ; cependant elle ne convient qu'au cercle, & eſt défectueuſe dans les autres courbes ; l'erreur à la vérité n'en eſt pas bien ſenſible, lorſque l'on ne ſe ſert que d'une petite longueur des rayons d'interſection, & qu'on prend une fort petite corde ou portion d'arc dans les grandes voutes ; mais dans les petites, & lorſqu'on prend un grand arc de l'ellipſe ailleurs qu'aux environs de ſes axes, elle peut être fort ſenſible : en un mot elle eſt contraire à la régularité, à la ſimétrie, & peut nuire à la ſolidité, comme nous l'avons expoſé.

LEMME.

La perpendiculaire ſur le milieu de la corde d'un arc de ſection conique autre que le cercle, & qui n'eſt pas un des axes, eſt oblique à cet arc.

Soit (*Fig.* 164) l'arc ADPB portion d'une ellipſe, d'une parabole, ou d'une hyperbole, & le point D ou P, qui ne ſoit pas à l'extrêmité d'un des axes de la courbe : ſi ayant fait $bP = Pe$, des points *b* & *e*, comme centres, on fait des interſections d'arcs en *g* & *h* avec des rayons égaux, de longueur priſe à volonté, je dis que la ligne menée par ces deux points *g* & *h*, qui eſt perpendiculaire à la corde *be*, ne la ſera point à ſon arc *bPe*. *Fig.* 164.

DE'MONSTRATION.

Une ligne n'eſt perpendiculaire à un arc, que lorſqu'elle

Pl. 15. Fig. 164. l'eſt à ſa tangente au point P où elle le rencontre ; mais ſi P*t* perpendiculaire à P *h* eſt une tangente, la corde *b e* qui lui eſt parallele, & coupée en deux également en *m* par la ligne P *h* ſera une ordonnée, & cette ligne P *h* ſera un diametre ; or il n'y a de diametres perpendiculaires aux ordonnées que les axes, donc le point P eſt ſur un axe ; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Secondement, il eſt démontré qu'on ne peut mener qu'une tangente par un point P ; cependant il eſt clair que par cette conſtruction on pourroit en mener pluſieurs ; car ſi au lieu des points *b* & *e*, équidiſtans de P, & centres des interſections *g* & *h*, on en prend deux autres auſſi équidiſtans de P*e*, comme B & *r*, la corde *r*B ne ſera plus parallele à *b e*, & par conſéquent la perpendiculaire *x*P*y* ne ſe confondra point avec la premiere *g h*, mais elle la croiſera ; & cependant encore au même point P, *r* P égalera BP, comme *b* P étoit égal à P *e*, par la conſtruction ; la raiſon en eſt fort ſenſible ; car les arcs de l'ellipſe n'étant pas d'une courbure égale comme ceux du cercle, les cordes égales ne ſous-tendent pas des arcs égaux, celle qui eſt plus près du grand axe, répond à un plus grand arc que celle qui eſt près du petit axe, où la courbe ſe redreſſe & approche plus de ſa corde ; donc par la méthode des ouvriers, on trouve pluſieurs joints de tête différemment inclinés à l'arc, & cependant il n'y en a qu'un ſeul de bon, qui eſt la perpendiculaire à la tangente au point de diviſion du joint, donc leur méthode eſt mauvaiſe ; *ce qu'il falloit démontrer.*

On auroit fait peu d'attention à la pratique des ouvriers, ſi elle n'avoit été enſeignée par les Auteurs qui ont écrit de la coupe des pierres, leſquels ont dû en ſentir l'irrégularité, en ce qu'elle ne fait pas des angles égaux de part & d'autre du joint des vouſſoirs ; de ſorte que l'arrête de l'un eſt aigue, & l'autre obtuſe, ce que nous avons cru devoir faire remarquer avant que d'établir la vraie maniere de tirer les joints ſur les arcs de toute autre ſection conique que le cercle.

PROBLEME XXVI.

Par un point donné à la circonférence d'une ſection conique, tirer une perpendiculaire à ſon arc.

Il faut premierement connoître les foyers de la ſection, ſoit

ellipse, parabole, ou hyperbole ; & s'ils ne sont pas donnés, il faut les chercher par les Problêmes II. X, & XI.

Par les foyers F & *f* des trois Figures 164, 165, 167, on tirera au point donné D les lignes droites FD & *f* D, qu'on prolongera en M & L, *Fig.* 164, & seulement en L, Fig. 165, parce que la parabole n'ayant qu'un foyer, on tirera par le point D la ligne DM, parallele à l'axe OFH, & pour l'hyperbole, (*Fig.* 167) il ne sera nécessaire de prolonger que FD en L, parce que la ligne *f* D du foyer opposé, donnera l'angle *f* DL dont on a besoin. *Fig.* 164. 165 & 167.

Du point D comme centre, & d'un intervalle pris à volonté, on fera un arc LXM qu'on divisera en deux également en X, par où & par le point donné D, on tirera XD, qui sera la ligne qu'on cherche.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée par le point D, *t* DT perpendiculaire à DX : il est démontré dans tous les Traités * des sections coniques, que les lignes droites menées des deux foyers à un même point de la courbe, par lequel passe une tangente, font des angles égaux avec cette tangente *t* T ; mais ces angles *f* DT & FD*t*, (*Fig.* 164) sont égaux à leurs opposés au sommet *t* DL, TDM ; si on leur ajoute à chacun la moitié de l'angle LDM, les angles *t* DX & TDX, seront égaux entr'eux, donc ils seront droits ; or (par la construction) cet angle LDM est divisé en deux également, donc la ligne XD qui le divise, sera perpendiculaire à la tangente *t* T, & par conséquent à l'arc ; *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Apollonius. l.* 3. *prop.* 48 & pour la Par. *l.* 1. *p.* 33.

La même démonstration est claire dans la Figure 167, avec cette différence qu'il n'est pas nécessaire de prolonger *f* D, mais seulement FD en L, parce que l'angle *f* DT est au-dehors de l'hyperbole, & qu'il n'y a que son égal TDF, dont un côté est dedans.

A l'égard de la Figure 165 pour la parabole qui n'a qu'un seul foyer F que l'on puisse déterminer, on peut suivant le sistême de la Géométrie de l'infini la considérer comme un ellipse infiniment allongée ; alors son second foyer étant infiniment loin, la ligne NDM qui en seroit tirée au point D, seroit parallele à l'axe OT : il en résulte en effet la même égalité des angles ND*t*, FDT, comme il est prouvé par d'autres moyens ; ainsi la mê-

me construction pour tirer une perpendiculaire à l'arc d'une section conique, ou plutôt à la tangente au point d'attouchement, est la même pour toutes; excepté pour le cercle où les deux foyers sont réunis à son centre.

AUTREMENT.

On peut démontrer cette proposition si l'on veut admettre l'axiome que M. de ROBERVAL établit pour l'invention des tangentes, que *la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point là*: or la direction des lignes tirées à un point de l'hyperbole de chacun des foyers tend à l'éloigner également, donc la ligne qui divise également l'angle de ces lignes est la touchante, & dans l'ellipse l'une de ces lignes tend autant à s'éloigner, que l'autre à s'approcher du foyer, donc la ligne qui divise leur angle est la tangente.

USAGE.

On auroit pû intituler ce Problême pour en exprimer l'application à la pratique, *maniere de tracer les joints de tête des ceintres faits d'arcs de sections coniques*, & on en auroit indiqué tout d'un coup l'usage pour la coupe des pierres; mais comme nous n'avons pas encore expliqué ce que c'est que *joint*, il convenoit d'énoncer la proposition en termes généraux.

Je dirai en passant, que ce Problême est fondé sur une vérité qui a fourni de merveilleuses inventions dans la Catoptrique pour réfléchir la lumiere, parce que *l'angle d'incidence est égal à l'angle de reflexion*; c'est de-là que j'en avois tiré la pratique que je donne pour les joints, avant que j'eusse sçû que M. BLONDEL l'avoit déja fait dans ses Problêmes d'Architecture, mais il n'a pas pourvû au cas suivant.

PROBLEME XXVII.

Par un point donné hors de la circonférence d'une section conique, lui mener une perpendiculaire.

Ce Problême n'est pas si simple que le précédent, & se résout différemment pour la parabole & pour les deux autres sec-

tions coniques, l'ellipfe & l'hyperbole ; c'eft un Problême *de minimis*.

1°. *Pour la parabole*: (*Fig*. 165.)

Soit le point donné P hors de la parabole, on en abaiffera une perpendiculaire PH fur l'axe OS prolongé vers T s'il le faut; on fera HK égale à la moitié du parametre, c'eft-à-dire, à 2FS; on divifera enfuite l'intervalle KS en deux également au point *m*, où l'on fera *m*C perpendiculaire à l'axe OS, & égale au quart de HP : fi du point C pour centre, & pour rayon l'intervalle CS, on décrit un arc de cercle, il coupera la parabole ASB au point *x*, qui eft celui que l'on cherche, par lequel & par le point donné P, tirant une ligne P*x*, elle fera perpendiculaire à la courbe, ou plutôt à la tangente T*t* au point *x*. *Fig*. 165.

Nous ne pouvons pas donner la démonftration de cette conftruction dans toute fon étendue, parce qu'elle fuppofe des propofitions qu'il feroit trop long de rappeller ici & de démontrer ; nous indiquerons feulement fur quoi elle eft fondée ; du point *x* ayant mené la tangente *x*T jufqu'à l'axe OS prolongé, ce qui eft facile à faire en portant la diftance de l'ordonnée K*x* au fommet de l'axe S, au-delà du fommet de S en T : on trouve par les propriétés de la parabole & du cercle qu'elle coupe, que les triangles PE*x*, & *x*KT font femblables, & leurs angles K*x*T & P*x*E égaux, aufquels ajoutant l'angle commun T*x*E, on reconnoîtra que l'angle T*x*P eft droit ; *ce qu'il falloit faire*.

2°. *Pour l'ellipfe*.

Soit (*Fig*. 166) l'ellipfe ADB, & le point P donné hors de la circonférence, par lequel il faut tirer une perpendiculaire à l'arc AD à un point inconnu *x*, qu'il faut trouver fur cet arc, lequel point foit celui d'attouchement d'une ligne *t*T, à laquelle P*x* foit perpendiculaire. *Fig*. 166.

On commencera par chercher le parametre de l'axe AB, comme nous l'avons dit au Problême II, où en portant le demi-axe CD en C*d* fur AB, on tirera AD ; & par le point *d*, on lui menera une parallele *de*, qui donnera fur CD le point *e*, par lequel on tirera AF, qui fera coupée en F par une parallele BF menée à CD par l'extrêmité B du diametre AB ; la ligne BF fera le parametre, lequel fera porté de B en *f*, & de *f* en K,

Fig. 166. parallelement à DC prolongée ; par le point K, on tirera l'indéfinie AG : ensuite on prendra la distance CH du centre C à la perpendiculaire PH abaissée sur le diametre AB du point P donné, & on la portera de A en *g* sur AB, on portera H*g* de A en N sur l'axe BA prolongé en N, par où on menera MNS parallele à DC ; par le point N on menera NL parallele à PC tirée du point donné P au centre de l'ellipse C, & terminée à la rencontre de PH prolongée en L, ce point L donnera la distance LH d'une ligne MQ, qu'il faut mener parallelement à l'axe AB, les deux lignes MS & MQ feront les asymptotes d'un arc d'hyperbole P *xy* qui coupera l'arc AD au point *x*, que l'on cherche pour tirer la ligne demandée P *x*.

On peut encore trouver la distance de la ligne MQ, en portant PH sur AC qui tombe ici en *g*, & tirer *g*G jusqu'à la rencontre menée par le point G parallelement au diametre AB de AG, la ligne MQ sera l'asymptote.

Les asymptotes étant données, il est aisé de trouver autant de points que l'on voudra de l'hyperbole, qui doit donner le point *x* par son intersection avec l'ellipse AD (par le Problême XII.) ; il n'y a qu'à tirer à volonté par le point P une ligne quelconque qui coupe les asymptotes, par exemple, SPR en S & en R : si l'on porte PS en R*y*, le point *y* sera un de ceux de l'hyperbole, par lequel on tirera d'autres lignes à volonté, comme Y*y* V, qui donneront par la même construction d'autres points de cette courbe vers *x* & Z, en portant la distance *y*Y en V, *r* en-deçà & au-de-là de *x*, & par les points P *x* Z *r*, on tracera l'hyperbole P *xry* qui coupera l'ellipse AD au point *x*, par où & par le point P donné, si l'on tire la droite P*x* qui est une corde de l'hyperbole, cette ligne sera celle que l'on cherche, laquelle sera perpendiculaire à l'ellipse, ou plutôt à sa tangente *t* T au point *x*.

3°. *Pour l'hyperbole.*

Fig. 167. Soit (*Fig.* 167) l'axe donné RS, le centre C, la moitié du second axe CV, par le moyen duquel on trouvera CK moitié du parametre, comme on l'a dit au Problême XII ; ou en faisant VK perpendiculaire sur VR, par le point K, on fera K*r* perpendiculaire à RS, & égale à CR, & on tirera la ligne R*r* : ensuite par le point donné P, ayant mené PE parallele à K*r* ;

on

on portera CE en Re, & on tirera eh parallele à Kr; on portera aussi la distance eh de C en H, par où on menera HG parallele à Kr, & par H la ligne HI parallele à CP, laquelle coupera PE au point I, par lequel on menera GIN parallele à RS; les deux lignes Gg, GN, sont les asymptotes d'une seconde hyperbole, laquelle passant par le point donné P, doit aussi passer par le point X que l'on cherche; la ligne droite menée de P par X satisfera à la proposition, en ce qu'elle sera perpendiculaire à l'arc de l'hyperbole SB, ou plutôt à sa tangente tT au point X; *ce qu'il falloit faire.* PL. 15. Fig. 167.

Introduction à la démonstration.

La démonstration de ce Problême dépend d'une autre proposition, qui est que si l'on prend sur un axe d'ellipse ou d'hyperbole un point plus éloigné d'une de ses extrêmités que la longueur de son demi-parametre, & que la distance du centre de cette ellipse ou hyperbole à une ordonnée au même axe, soit en même raison avec la distance de cette ordonnée au point donné hors de la courbe, que l'axe à son parametre; la ligne menée de ce point à celui de la courbe où se termine l'ordonnée, est la plus petite de toutes celles qu'on y peut mener. Cela supposé, comme il est démontré au Livre VII. *prop.* 6 des sections coniques de M. de la HIRE, soit prolongé Px en p, où cette ligne rencontre l'axe AB, & tirée dx parallele à PH, il ne s'agit que de démontrer que l'axe est au parametre, comme Cd est à dp (*Fig.* 166). Fig. 166.

Par le point x soit mené dxX, parallele à PH, qui coupera PC en X, & par le point p, où Px prolongée, rencontre l'axe AB soit menée pz aussi parallele à PH : pour diminuer le nombre des signes, soit nommé l'axe AB (a) le parametre BF (b) par la construction $a:b::$ PL : LH :: CN : NH; donc (par la cinquiéme du sixiéme d'EUCL.) les triangles NHL, PHC sont semblables entr'eux, lesquels sont semblables encore aux triangles Gpz, CdX, à cause des paralleles dX & pz; donc Cd : Cp :: dX : pz; & Cp : Cd :: pz : dX, en divisant Cd : Cd — Cp = dp :: dX : dX — pz = qX; & en composant Cd + dp = Cd + zq : zq :: dX + qX : qX :: CH + HN : HN :: a : b; donc Cd : pd :: a : b, donc px (par la proposition citée ci-dessus) est un *minimum*, par conséquent aussi

P x, qui eſt par la même raiſon perpendiculaire à la tangente T t, p P étant une ligne droite ; *ce qu'il falloit démontrer pour l'ellipſe.*

Nous omettons la démonſtration pour l'hyperbole, elle eſt fondée ſur le même principe, & ſera facile à déduire de la précédente, en faiſant attention aux aſymptotes & à leurs propriétés ; il faut ſeulement ajouter, où l'on retranche pour l'ellipſe. Le peu d'uſage que nous avons à faire de cette courbe, n'exige pas que l'on s'y arrête plus long-tems.

USAGE.

Ce Problême de mener une perpendiculaire à une courbe par un point donné au-dehors, ne tombe gueres dans la pratique de l'Architecture pour la coupe des pierres, parce qu'on fait ordinairement les diviſions de joints par des points pris ſur les arcs des ceintres, comme il a été enſeigné au Problême précédent. Cependant comme il peut arriver dans une décoration de vouſſoirs à croſſettes, ou pour tirer quelques rayons ſur une ellipſe, qu'on auroit beſoin de ce Problême : nous avons crû devoir le joindre au précédent pour la perfection de la doctrine, dans laquelle on ne doit pas négliger ce qui n'eſt pas d'un fréquent uſage, parce que les Livres ſont plus utiles pour les cas extraordinaires, que pour ce qui ſe pratique tous les jours, dont on peut s'inſtruire facilement ; d'ailleurs c'eſt un contentement à l'eſprit de ſçavoir ce qu'on auroit à faire, ſi le cas arrivoit.

Je dois avertir d'une petite difficulté qui peut ſe préſenter & embarraſſer un Lecteur peu verſé dans ces matieres ; c'eſt que la perpendiculaire tirée par le point donné P hors de l'ellipſe ſur l'axe AB, peut tomber hors de cette ellipſe ſur la prolongation de l'axe ; alors l'hyperbole ne peut rencontrer l'ellipſe. Pour y remédier, au lieu d'abaiſſer la perpendiculaire ſur un axe, il faut l'abaiſſer ſur ſon conjugué, & faire la même opération.

De la divifion des fpirales par des perpendiculaires à leurs arcs.

PROBLEME XXVIII.

Par un point donné au contour de la fpirale, tirer une perpendiculaire à fon arc.

PRemierement, il eft évident que lorfque les fpirales ne font qu'une imitation des vraies courbes méchaniques par une compofition d'arcs de cercles, comme font les *volutes* des Architectes; il n'y a pas plus de difficulté à mener des perpendiculaires à leurs arcs par des points donnés qu'au cercle; puifque chacun d'eux a fon centre différent, auquel cette perpendiculaire prolongée doit aboutir.

Secondement, s'il s'agit de la fpirale d'ARCHIMEDE, ou des autres de VARIGNON, on ne peut donner la folution de ce Problême, qu'en fuppofant la rectification de la circonférence du cercle de révolution; car ARCHIMEDE a démontré que la foustangente de la fpirale à la fin de la premiere révolution étoit égale à la circonférence du cercle circonfcrit; & comme nous ne pouvons faire la divifion propofée, que par une perpendiculaire à la tangente de la courbe au point donné; ce Problême eft un de ceux dont la folution Géométrique fera auffi long-tems à trouver que la quadrature du cercle.

Cependant fuppofant le rapport du diametre du cercle à fa circonférence, comme 7 eft à 22, ou 100 à 314, ce qui eft fuffifant pour la pratique des arcs, il fera aifé de trouver les tangentes à la fpirale d'ARCHIMEDE en tel point que l'on voudra marquer à fon contour.

Soit (*Fig.* 168) la fpirale ADBPC, qui fait deux révolutions completes, la premiere de C en B, la feconde de B en A : fi le point donné pour mener une perpendiculaire à cette courbe eft en B, à la fin de la premiere révolution, ayant tiré BC au centre C, on lui fera une perpendiculaire BG égale à la circonférence du cercle qui auroit BC pour rayon, ou à la moitié, comme dans cette Figure, à laquelle menant GT parallele & égale à BC ou à fa moitié, fi l'on n'a pris que la moitié de la circonférence; du point T on tirera TB qui fera la tangente, à la- Fig. 168.

Fig. 168. quelle si l'on tire par le point B donné, la perpendiculaire BX; cette ligne sera celle qu'on demande.

Si le point donné est en A, à la fin de la seconde révolution; on fera de même une perpendiculaire sur CA, que l'on fera égale à la circonférence du cercle qui a CA pour rayon, ou à son tiers, comme dans cette Figure, sur laquelle faisant *t g* parallele & égale au premier rayon BC, ou à son tiers, la ligne *t* A sera la tangente au point A, & la perpendiculaire A*x*, celle qu'on demande.

Nous prenons ici des parties aliquotes semblables, pour que la Figure n'occupe pas trop de place; ce qui ne change rien à la position des tangentes, parce qu'on sçait que les triangles semblables ont les angles opposés aux côtés homologues égaux.

Si le point donné est en P dans l'intervalle de la premiere révolution, ayant tiré comme ci-devant PC & sa perpendiculaire PH, on portera sur PH la longueur de la circonférence du cercle P *h i*, qui a CP pour rayon, & faisant HI parallele à PC & égale à BC rayon, de la révolution complette, on menera IPT qui sera tangente au point P, & la perpendiculaire P*x* sera elle qu'on chercche.

Si le point donné étoit en *q*, entre la premiere & la seconde révolution BE *q* A, on en agiroit encore de même, ne portant pour la perpendiculaire à la sous-tangente que le premier rayon BC.

La démonstration de cette construction, qui est de M. PERSONIER de Roberval, est fondée sur un principe des mouvemens composés qu'on peut voir dans la premiere collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, & sur les 19 & 20e. prop. des spirales d'ARCHIMEDE.

Ou pour abréger, il faut multiplier l'arc de révolution (x) par son rayon (y) & le diviser par le rayon (a) du cercle de la premiere révolution, suivant la formule de M. VARIGNON $\frac{xy}{a}$ pour trouver les sous-tangentes de cette spirale.

Présentement il faut voir comment on doit tirer les soustangentes des autres spirales d'un degré plus élevé que celle d'ARCHIMEDE, comme sont les paraboliques, verticocentrales, & les hyperboliques cocentrales, dont nous avons donné la construction ci-devant.

Appellant (m) le degré de cette courbe, M. VARIGNON trouve pour expression générale des sous-tangentes de ces premieres

$\frac{mxy}{a}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut rectifier l'arc de révolution EN, (*Fig.* 140, PLANCHE 12) compris depuis l'axe AX, juſqu'au point donné N, le multiplier par ſon rayon CN, & par le degré (m) de la courbe génératrice qui eſt ici 2, puis diviſer ce produit par le rayon de la premiere révolution complete, & l'on aura la longueur Cx de la ſous-tangente Cx; ainſi ayant tiré du centre C la droite CN au point donné N, on lui menera par le point C la perpendiculaire Cx égale à la longueur trouvée par quotient de cette diviſion, qui ſera priſe ſur la même échelle qui aura ſervie à meſurer le contour de l'arc de révolution pour le rectifier, & les deux rayons de l'arc de révolution incomplete, & de la révolution complete. PL. 12. *Fig.* 140.

Ou bien ſi l'on veut trouver la longueur de la ſous-tangente ſans calcul, on le peut de la maniere qui ſuit, avec la regle & le compas.

On portera ſur le rayon CN prolongé le double de ſa longueur en Cn; & ſur CH perpendiculaire à ce rayon, la longueur CH égale à l'arc de révolution rectifié, puis ayant fait H9 parallele & égale à Cn, on portera ſur la même H9 prolongée la longueur CD du rayon de la premiere révolution complete de 9 en G, laquelle révolution ſe compte depuis le centre C; enfin par les points G & n, on tirera la ligne Gnx qui rencontrera HC prolongée en x; la ligne menée du point x par le point donné N, ſera la tangente que l'on cherche.

La raiſon de cette opération eſt facile à concevoir: ſuppoſant que l'expreſſion Algébrique $\frac{mxy}{a}$ pour les ſpirales paraboliques verticocentrales a été démontrée par M. VARIGNON, comme elle l'eſt en effet dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, il eſt clair que je conſtruits cette équation qui eſt dans ce cas $\frac{2xy}{a}$, c'eſt pourquoi je porte le double du rayon CN $= y$ en Cn pour avoir un parallelogramme C$9 = 2xy$; enſuite pour le diviſer par a, c'eſt-à-dire, par le rayon de la premiere révolution complete, qui eſt CD, parce que la ſpirale fait deux révolutions & demi de C en A, je porte CD (a) de 9 en G, pour tirer Gnx qui feroit la diagonale d'un rectangle fait de HG par Hx, ſuivant laquelle les complemens ſont

égaux (par la quarante-troisieme du I. Livre d'EUCLIDE) ainsi le rectangle Hn qui est un de ces complemens, sera égal à celui qu'on peut supposer de l'autre côté de cette diagonale, lequel ayant pour un de ses côtés $9G = CD = a$, aura par conséquent l'autre égal à Cx qu'on cherche; puisqu'en divisant un rectangle par une de ses racines, le quotient donne l'autre.

On sera peut-être surpris que j'applique à l'exemple que je donne d'une spirale circulaire, l'expression des sous-tangentes, des paraboliques verticocentrales : il ne faut pas prendre ici le nom de parabole dans la signification seule de celle d'APOLLONIUS, mais aussi pour les autres de différens degrés, qui sont tous désignés par la lettre m; ainsi il faut remarquer que le quart de cercle dans cette situation est une espece de demi-parabole. En effet, suivant la Géométrie de l'infini, cette courbe n'est qu'un demi-cercle infiniment allongé, puisque dans le cercle, les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles des abscisses; & dans la parabole, dont le diametre ou plutôt l'axe est infini, les abscisses ne différant que d'une longueur finie, elles sont censées égales, mesurées depuis le point de rencontre de l'ordonnée à la partie qui s'allonge infiniment; d'où il suit que les quarrés des ordonnées de la parabole sont comme leurs abscisses, donc l'expression des sous-tangentes convient au quart de cercle verticocentral, puisqu'elle convient de plus à d'autres courbes, dont les abscisses sont entr'elles, comme les puissances quelconques de leurs ordonnées, ainsi que le démontre M. VARIGNON.

On a pû remarquer que j'ai pris le nombre *deux* pour la valeur de m, parce que la parabole & le cercle sont du second degré, sur quoi on pourroit me demander quelle est la courbe parabolique du premier degré, puisque celle-ci est du second; à quoi je répondrai que c'est le triangle, s'il est permis de le mettre au rang des sections coniques & des courbes; car on peut lui trouver des abscisses & des ordonnées, comme je l'ai dit au I. Livre page 16; & sous cette considération on peut le regarder comme la génératrice de la spirale d'ARCHIMEDE, dont les arcs de révolution sont entr'eux comme leurs rayons; c'est pourquoi l'expression m s'évanouit, de sorte que celle des sous-tangentes se réduit à $\frac{xy}{a}$ qui est plus simple que la précédente, dont nous

avons donné la conſtruction $\frac{2xy}{a}$, où nous avons doublé la longueur de CN, qu'il ne faut pas doubler à la ſpirale d'ARCHIMEDE.

La même conſtruction que nous avons donnée pour trouver les ſous-tangentes des ſpirales paraboliques vertico-centrales, ſert pour trouver celles des hyperboliques cocentrales, dont nous avons donné un exemple à la Figure 141, avec cette différence que l'expreſſion Algébrique devenant négative, il faut opérer en ſens contraire, c'eſt-à-dire, prendre les ſous tangentes du côté oppoſé.

REMARQUE.

Il arrive aſſez ordinairement que les ſous-tangentes deviennent ſi longues, qu'elles ne peuvent être contenues dans la ſurface ſur laquelle on trace l'épure, c'eſt-à-dire, le deſſein de grandeur naturelle à l'ouvrage qu'on ſe propoſe ; pour remédier à cet inconvénient, il faut ne prendre que le tiers ou le quart, ou toute autre partie des longueurs données, & mettre la ſous-tangente ſur le rayon perpendiculairement, & à une diſtance proportionelle du centre C.

USAGE.

Le principal uſage du Problême qui enſeigne la maniere de mener des tangentes aux ſpirales eſt, comme nous l'avons dit, pour la coupe des joints des volutes, conſoles, limaçons & autres ouvrages en ſpirale, qu'on peut faire de pierre de pluſieurs pieces ; mais il faut remarquer que le liſtel de la volute étant compoſé de deux ſpirales différentes, l'une qui forme l'arrête extérieure, l'autre l'intérieure, la perpendiculaire à la tangente de l'une des deux ne l'eſt pas à l'autre ; de ſorte que ſi le joint eſt en bonne coupe ſur une arrête, il ſera en fauſſe coupe ſur l'autre ; mais comme ce mal eſt ſans remede, à moins que de faire le joint courbe, il convient pour la plus grande régularité de tracer entre les ſpirales de ces deux arrêtes une moyenne par les diviſions de la moitié de la largeur du liſtel, ou de celle du limon, s'il s'agit du limaçon, & mener les perpendiculaires aux tangentes ſur les points de diviſion pris ſur cette ſpirale moyenne ; ainſi la fauſſe coupe ſe diviſera partie

ſur l'arrête extérieure, partie ſur l'arrête intérieure.

Le ſecond uſage de ce Problême eſt pour faire un *œil* circulaire au milieu de la ſpirale qui puiſſe ſe raccorder avec elle ſans aucun jarret à la jonction de ces deux courbes ; car ayant déterminé ſur la ſpirale un point, où l'on veut qu'elle ſe joigne à *l'œil* circulaire, il faut mener par ce point une tangente & une perpendiculaire à cette tangente par le même point, ſur laquelle on prendra le rayon du cercle qui doit former l'*œil*, & par ce moyen les deux courbes ſe joindront par une tranſition inſenſible ſans aucun jarret.

D'où il ſuit que le centre de *l'œil* ne tombera pas ſur le centre de la ſpirale, parce qu'il n'y a que le cercle dont la perpendiculaire à la tangente paſſe par le centre; cette propriété ne lui étant pas commune avec la ſpirale.

Cette perfection de jonction des deux courbes ſe trouve obſervée dans la volute de GOLDMAN, qui n'eſt pas pour cela une ſpirale Géométrique quoiqu'en diſe D'AVILER, mais une compoſition d'arcs de cercle, dont la ſuite des rayons n'eſt pas en raiſon exactement uniforme, comme je le dirai en ſon lieu; ainſi la cathete d'une volute en ſpirale Géométrique ou Méchanique paſſant par le centre de *l'œil*, ne doit pas paſſer par celui de la ſpirale, ou ſi l'on veut qu'elle paſſe par le centre de la ſpirale, elle ne paſſera pas par celui de *l'œil*; c'eſt à l'Architecte à choiſir l'un des deux, l'éloignement de ces deux centres peut être plus ou moins grand, ſuivant la grandeur ou la petiteſſe de *l'œil* de la volute, & la diſtance du point d'attouchement de la ſpirale (où ſe fait la jonction) de ſon centre, ſi le rayon de l'œil eſt plus petit que cette diſtance, ſon centre tombera au-dedans, s'il eſt plus grand, au-dehors.

Des diviſions de quelqu'autres courbes uſuelles par des perpendiculaires à leurs arcs.

OUtre les courbes des ſections coniques & les ſpirales; il s'en trouve encore d'autres à diviſer par des perpendiculaires à leurs arcs, dans quelques *traits* de la coupe des pierres; mais ſi rarement qu'il n'eſt pas fort néceſſaire de s'arrêter à en chercher les tangentes.

La

163.
164.
165.
166.
167.
168.

La premiere eſt celle d'une eſpece de cicloïde, qui eſt la courbe dévelopente de la circonférence de la face de la *Trompe érigée ſur une ligne droite*, ſuivant le trait du P. DERAN, ſur laquelle il faut tirer les joints de tête, ce qu'il fait en opérant ſur cette courbe comme ſur un arc de cercle, en prenant de part & d'autre des ouvertures de compas égales, & faiſant des deux diſtances, comme centres des arcs de cercle qui ſe coupent, & donnent à peu près cette perpendiculaire, & ſuffiſamment pour qu'on n'en puiſſe appercevoir l'irrégularité, ſi l'on prend de petites diſtances du point donné à diviſer; nous donnerons un autre trait de la même trompe, où l'on n'a pas beſoin de cette opération.

La ſeconde eſt cette courbe du quatrieme ordre dont nous avons parlé, qui eſt la ſection d'un anneau ou d'une hélice : dans celle-ci on n'a pas beſoin de faire des joints de tête réguliers, parce qu'elle n'eſt pas employée pour une face apparente; & quand elle le ſeroit, l'inclinaiſon des joints ſe trouveroit déterminée par celle de l'arc droit de la voute qui n'eſt qu'un demi-cercle ou une demi-ellipſe.

La troiſieme ſeroit la chaînette qu'on pourroit employer pour mettre l'équilibre entre les vouſſoirs égaux; mais outre qu'au lieu de cette courbe on pourroit ſe ſervir de la parabole qui en eſt très-peu différente, c'eſt que l'une & l'autre ne conviennent guere aux ceintres, ſi l'on a quelque égard à l'agrément de leur contour, & à celui de leur naiſſance à l'impoſte, lorſque les piédroits ſont à plomb : cependant les Curieux pourront ſe ſatisfaire ſur la maniere de décrire cette courbe méchaniquement, dans le ſecond Tome, (Planc. 33, Fig. 50) au Chapitre V. & ſur celle de la décrire par pluſieurs points trouvés Géométriquement, au troiſieme Tome, après le III. Problême du Chapitre douzieme (Planc. 110. Fig. 230) l'art de lui tirer une tangente par un point connu & par conſéquent la coupe d'un joint de tête de vouſſoir. Si par un hazard extraordinaire il ſe préſentoit d'autres courbes à diviſer, on pourra s'en tirer en opérant comme ſur un arc de cercle, & corrigeant à la vûe ce qui pourroit paroître défectueux.

SECONDE PARTIE
DU SECOND LIVRE.

CHAPITRE V.

De la deſcription des ſections des corps qui ne doivent, ou ne peuvent être décrites que ſur des ſurfaces concaves ou convexes.



ES ſections dont nous avons parlé dans la premiere Partie de ce Livre ont été conſidérées comme devant être décrites ſur des ſurfaces planes, quoiqu'elles ſoient originaires des ſurfaces courbes : il s'agit à préſent de les tracer ſur les ſurfaces qui leur ſont naturelles, de même que celles qui ne peuvent être décrites ſur des plans, auſquels elles ne peuvent s'adapter. Cependant, parce que les points des contoures de ces dernieres ne peuvent ſe trouver que par le ſecours des lignes droites qu'on ne peut chercher ſur des ſurfaces courbes, en ce qu'elles ne ſont pas à la ſurface du ſolide, mais au-dedans, comme ſont les rayons, les ordonnées & les abſciſſes; il a fallu avoir recours à une repréſentation imparfaite & défigurée, faite ſur une ſurface plane par des paralleles abaiſſées ſur cette ſurface de pluſieurs points de la courbe : ce qu'on a appellé *la projection*, du mot latin *projicere*, qui veut dire jetter, comme ſi tenant un corps en l'air, on jettoit ou laiſſoit tomber de chacun de ſes points une goute d'encre ſur un plancher, la ſuite de ces goutes liées par une ligne continue, donneroit une figure qui ſeroit la projection de ce corps.

De la projection.

Le mot de projection a pluſieurs ſignifications, il peut s'ap-

pliquer à l'action de jetter, mais nous la resserrons ici à la description d'un corps formée sur un plan par des perpendiculaires à ce plan, où si l'on veut l'étendre encore davantage, par des paralleles menées des angles de ce corps ou de plusieurs points de son contour sur ce plan en quelque situation qu'il soit à son égard.

Il suffit cependant à l'usage que nous en devons faire, de considérer les lignes verticales & les horisontales, parce que c'est à ces deux genres de situations constantes, & que l'on peut toujours déterminer, qu'on doit rapporter les lignes inclinées à l'horison. Selon cette restriction nous pouvons dire, pour nous accomoder aux termes de l'Art, que la projection d'un corps est la trace de plusieurs *à-plombs*, abaissés de leurs angles ou de leurs contours pour en faire *le plan* ou Ichnographie, ou de plusieurs lignes de niveau tirées de même de ses angles, ou de son contour sur une surface *à-plomb*, pour en faire les *profils* ou les *élévations.*

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

D'où il suit que la projection faite sur un plan vertical ou horisontal, raccourcit la représentation de toutes les lignes & surfaces qui ne sont pas paralleles au plan sur lequel on la fait.

Car soit (*Fig.* 169) la ligne AB, dont on fait la projection sur le plan *g h*: il est évident que si cette ligne étoit dans la situation a B parallele à ce plan, les perpendiculaires a D, BF abaissées de ses extrêmités seroient aussi paralleles & égales, & par conséquent que la représentation DF seroit égale à a B; mais que si l'on transporte le point a en A sans mouvoir le point B, on raccourcira la représentation de cette ligne de la distance qu'il y aura de la perpendiculaire aD à AE qui est égale au sinus verse a S de l'angle a B A de l'inclinaison de la ligne AB abaissée à son extrêmité A au-dessous de la ligne horisontale a B, si la projection se fait par des verticales; donc la représentation EF sera plus petite que la ligne AB. PL. 16. *Fig.* 169.

On peut démontrer cette vérité d'une maniere plus simple en menant A *c* parallele à EF, parce qu'alors on reconnoîtra que la projection d'une ligne qui n'est pas parallele au plan de description, est toujours égale au côté d'un triangle rectangle,

dont la ligne objective est l'hypotenuse; d'où nous tirons la proposition suivante, qui est fondamentale pour tracer les desseins qu'on appelle *épures* pour la coupe des pierres.

THÉOREME.

Les projections des lignes courbes qui sont dans un plan perpendiculaire à un ou plusieurs autres plans de description, sont des lignes droites, dont les divisions faites par des paralleles menées par plusieurs points de ces courbes, sont toujours en même proportion avec les abscisses co-ordonnées.

Premierement il est clair que la projection d'une ligne courbe qui est dans un plan perpendiculaire à celui de description est une ligne droite; car puisque toutes les lignes menées des points de la courbe sur le plan de description, sont dans le même plan; on ne doit plus considérer que la section des deux plans, laquelle suivant la Géométrie élémentaire est nécessairement une ligne droite: ainsi la projection de l'ellipse ABDE, (*Fig.* 170) est la ligne *a d* dans le plan *g h*, & la ligne *b e* dans le plan *g h*, & la ligne *be* dans le plan *g k*, l'une *ad* est horisontale sur le plan horisontal, & l'autre *b e* verticale sur le plan vertical; & les points c^1, & c^2 de ces deux lignes sont la représentation de trois points rassemblés en un; sçavoir, c^1 qui représente les points B, C, E; & C^2 les points A, C, D: de sorte que *c a*, *c d* sont les représentations d'un quart ou d'une moitié d'ellipse; ce qui est visible, & à quoi il faut s'accoutumer pour concevoir tout ce que nous dirons dans la suite sur des Figures où nous n'exprimeront souvent les lignes courbes que par des droites.

Fig. 170.

Quant à la seconde partie de ce Théorême touchant le rapport des divisions faites par des paralleles menées de plusieurs points des courbes; nous n'étendrons la démonstration qu'aux sections coniques, qui sont presque les seules dont nous avons affaire, particulierement du cercle & de l'ellipse.

Soit une ligne *k* L ou *b e* (*Fig.* 171) coupée par des paralleles *a t*, Q *s*, P *r*, le rectangle de $a\text{T} \times \text{T}d : k\text{T} \times \text{TL} :: \text{Q}c \times cq : kc \times cl$; il en est de même des rectangles faits par les parties de la ligne *be* coupées par les paralleles *a t*, Q *s*, P *r*; donc

Fig. 171.

les points T, *c*, *z*, ſections de lignes tirées des points *a*, Q, P, ſur la ligne *k*L, donnent des diviſions ſur cette ligne qui ſont en même rapport entr'elles que celles que les mêmes points *a*, Q, P donnent ſur la ligne *be*, quoique différemment ſituée à l'égard de l'arc *a*P de l'ellipſe au-dedans de la courbe.

Il ne ſera pas difficile de faire voir que le même rapport ſubſiſtera à l'égard des lignes qui ſont hors de la courbe, par exemple, de *g*H; car ſi l'on mene par le point *g* une ligne *gf* parallele à *be*, il eſt évident que les diviſions *rs* & *st* ſont égales à *zn* & *nm*: mais à cauſe des paralleles *at*, Q*s*, P*r*, les triangles *gt*M, *gs*N, *gr*O ſont ſemblables; donc $rs = zn : st = nm :: ON : NM :: zc : cT$, donc la projection des points P, Q, *a*, ou *p*, *q*, *d*, faite par des lignes paralleles entr'elles, donne toujours des diviſions qui ſont en même rapport entr'elles, ſur les plans différemment ſitués à leur égard, ſoit au-dedans, ſoit au-dehors de la courbe, & quelque angle que les lignes de projection faſſent avec ces plans; *ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit que la projection faite ſur des plans perpendiculaires aux paralleles de projection, n'eſt pas une repréſentation plus réguliere des objets, que celle qui eſt faite par des lignes obliques, & que cette maniere de repréſenter les corps eſt Géométrique, puiſqu'elle conſerve toujours un certain rapport des parties des courbes projettées.

COROLLAIRE II.

De-là il ſuit que ſi l'on fait la projection d'un cercle par des lignes paralleles, perpendiculaires, ou obliques au plan de deſcription, les diviſions correſpondantes des deux côtés de la ligne de projection qui paſſe par ſon centre, ſeront égales entr'elles, à cauſe de l'uniformité de cette courbe: il en ſera de même à l'égard de l'ellipſe, lorſque la projection ſe fera par des lignes perpendiculaires au plan de deſcription.

Ce que nous diſons du cercle & de l'ellipſe eſt encore vrai à l'égard de la parabole & de l'hyperbole, lorſque les lignes de projection ſont paralleles à leurs axes.

On peut étendre ce Théorême à d'autres courbes qu'aux

Sections coniques, comme aux spirales & aux ovales faites par la section des corps annullaires dont nous avons parlé : en un mot la projection conserve toujours une certaine régularité de rapport, qui est le seul moyen d'adapter à une ligne droite quelques propriétés d'une ligne courbe, & d'appliquer sur un plan les surfaces concaves ou convexes, sans confusion de leurs parties, quoiqu'elle transforme quelquefois une courbe en une autre.

THEOREME.

La projection d'un cercle qui n'est pas parallele à son plan de description est une ellipse, & au contraire celle de l'ellipse peut être un cercle; & celle des ellipses, paraboles ou hyperboles, est une courbe d'une même espece plus ou moins allongée.

Fig. 172. Soit (*Fig.* 172) le quart de cercle AEFC dans le plan AEHC, sur lequel on fait la projection de ce même quart de cercle supposé élevé sur ce plan en D, de l'intervalle de l'arc DE, mesure de son angle d'inclinaison DAE, le rayon AC demeurant immobile sur le plan. Des points D & G, pris à volonté à la circonférence du quart de cercle, ayant abaissé sur le même plan les perpendiculaires D*d*, G*g* qu'il faut supposer telles, quoiqu'elles ne le soient pas dans la Figure, à cause de la perspective; si par les points *d* & *g* on tire les droites A*d*E, B*g*F perpendiculaires au rayon AC, on aura deux triangles semblables A*d*D, B*g*G rectangles en *d* & *g* par la construction, & dont les angles en A & B sont égaux, puisqu'ils sont celui de l'inclinaison des deux plans des quarts de cercle DAC & EAC, donc A*d* : AD :: B*g* : BG; mais AD = AE & BG = BF; donc AE : A*d* :: BF : B*g*, c'est-à-dire, que les ordonnées de la courbe sont entr'elles comme celles du cercle; ce qui n'appartient qu'à l'ellipse, * *& qu'il falloit démontrer.*

* L. 1. art. 41.

On auroit pû démontrer la même chose tout d'un coup en considérant le cercle à la surface d'un cylindre scalene, dont la section perpendiculaire à l'axe est une ellipse; car les lignes de projection étant multipliées à l'infini, & passant à la circonférence d'un cercle formeroient la surface d'un cylindre.

Par ce moyen on démontre tout d'un coup la seconde partie

de ce Théorême, qui dit que la projection d'une ellipse est souvent un cercle, & ordinairement une ellipse plus ou moins allongée ; car l'ellipse considérée à la surface du cylindre droit se réduit à un cercle à sa base ; & si le cylindre est coupé plus ou moins obliquement, soit qu'il soit droit ou scalene, la section est une ellipse plus allongée ou plus racourcie.

La même démonstration sert pour la troisieme partie, qui dit que la projection des paraboles & hyperboles sont des courbes de même espece, comme il a été dit au Théorême III, qui ne different de celle qu'on veut représenter par la projection, qu'en ce qu'elles sont plus ou moins allongées ou racourcies, suivant le plus ou moins d'obliquité de la section ; car les lignes de projection multipliées à l'infini forment un corps cylindrique, qui a pour base une parabole ou une hyperbole, c'est l'inverse du Théorême III.

COROLLAIRE.

D'où il suit que plus les lignes de projection font les angles aigus, avec le plan de la Figure qu'on veut projecter, plus la Figure se resserre ; de sorte que si ces lignes font un angle infiniment aigu, elles tombent dans le plan de la Figure, & la réduisent à une ligne droite, comme nous l'avons dit ci-devant.

USAGE.

L'application de cette proposition se présente tous les jours à la pratique de la coupe des pierres & des autres ouvrages d'Architecture ; car la projection, c'est-à-dire, en termes de l'art, le *plan* d'une porte, soit en plein ceintre, soit surhaussée, soit surbaissée dans un mur en talud, comme sont ordinairement ceux des revêtemens des fortifications, est une ellipse fort resserrée, suivant le plus ou le moins d'inclinaison du talud, & celui d'un joint de lit d'une niche sphérique en coquille est de même une ellipse qui se resserre vers la clef, où elle devient une ligne droite, & s'ouvre vers les impostes, où elle devient un arc de cercle.

Ces deux propositions sont encore nécessaires pour l'intelligence des Figures suivantes, & des traits en général, où l'on représente souvent les cercles & les ellipses par des lignes droi-

tes qui en ſont la projection, ou par des ellipſes extrêmement reſſerrées.

De la deſcription du cercle ſur les ſurfaces concaves ou convexes de la ſphere, du cone, & du cylindre.

PROBLEME XXIX.

Par deux ou trois points donnés ſur la ſurface d'une ſphere, décrire un cercle.

On doit conſidérer la ſurface de la ſphere, comme compoſée de deux Figures, l'une concave, l'autre convexe; cette différence n'eſt pas un objet pour la théorie, où l'on n'a pas égard à l'impénétrabilité des corps, mais bien pour la pratique qui ne peut opérer ſur l'une comme ſur l'autre.

Premierement s'il s'agit de décrire un cercle majeur dans la ſurface concave; il ſuffit qu'on ait deux points donnés, pourvû qu'on connoiſſe le diametre de la ſphere, & qu'ils ne ſoient pas diamétralement oppoſés; car il eſt clair, par la génération de la ſphere (*Art.* 1.) que le diametre d'un cercle devient l'axe de la ſphere, lorſqu'on le fait mouvoir autour de ce diametre; par conſéquent qu'il eſt commun à tous les cercles qui paſſent par l'axe de la ſphere.

Si les deux points donnés ſont moins éloignés que de 180 degrés, on ne peut y faire paſſer qu'un cercle majeur, mais une infinité de cercles mineurs de différentes grandeurs; d'où il réſulte que, pour ceux-ci, ce n'eſt pas aſſez de deux points donnés, il en faut trois pour en déterminer la poſition & la grandeur, parce qu'il en faut chercher le diametre comme il ſuit.

Fig. 173. Soient les trois points donnés A, B, E (*Fig.* 173) dans la ſurface concave de la ſphere; on en meſurera les diſtances pour en faire à part, ſur une muraille ou autre ſurface plane, un triangle ABE, puis par les points B & E, on tirera aux lignes AE, AB des perpendiculaires B *d*, E *d* qui ſe rencontreront au point *d*; ſi par ce point *d* & l'oppoſé A, on tire une ligne A *d*, elle ſera le diametre qu'on cherche.

COROLLAIRE.

De cette méthode on tire celle de trouver le diametre d'une ſphere;

ſphere ; car ſi avec un cordeau de longueur arbitraire, & d'un point P pris à volonté pour pole, on décrit un cercle ſur la ſurface concave, en ayant trouvé le diametre par la pratique précédente, on fera un triangle iſoſcele de la longueur du diametre AE pour baſe, & des deux longueurs du cordeau AP, EP pour côtés, ſur leſquels on fera aux points A & E, deux perpendiculaires qui ſe rencontreront au point D : la ligne PD ſera le diametre de la ſphere qu'on cherche. Cela ſuppoſé pour décrire un cercle majeur par les deux points donnés A & B) *Fig.* 173) il faut tracer à part ſur une ſurface plane un quart de cercle (*Fig.* 174) ou ce qui eſt la même choſe un triangle rectangle iſoſcele, dont les jambes *a c*, *p c* ſoient égales au rayon de la ſphere, l'hypotenuſe *ap* ſera la corde d'un arc de 90 degrés qui ſervira à trouver le pole du cercle propoſé. *Fig.* 175. *Fig.* 174.

Des points A & B comme centres, & la corde AP pour rayon, on fera une interſection de deux arcs de cercle qui ſe couperont en P où ſera le pole, duquel on décrira le cercle majeur EABF, qui eſt repréſenté ici en perſpective, c'eſt-à-dire qu'on y fixera le cordeau, une perche, ou un ſimbleau, pour tracer le cercle dans la ſurface concave de la ſphere à peu près comme on ſe ſert du centre ſur une ſurface plane. *Fig.* 173.

J'ai dit dans la ſurface concave, parce qu'il eſt viſible qu'on ne peut pas opérer de même ſur la convexe, ſur laquelle au lieu de ſe ſervir de la corde *ap* (*Fig.* 174) pour rayon des interſections qui donnent le pole ; il faut ſe ſervir de l'arc *alp* ; c'eſt pourquoi il faut un inſtrument pour y ſuppléer, ou un compas à pointes courbées, ſi la ſphere eſt petite, comme ſont dans l'artillerie les boulets & les bombes ; mais ſi la ſphere eſt grande comme une voute, au lieu d'un cordeau, il faut ſe ſervir d'un aſſemblage de trois pieces de bois *p* H, H *g*, *g a* aſſemblées à angle droit, dont la grande H*g* ſoit égale à la corde *pa*, & les deux autres à la fleche *f l*; & pour les entretenir en cet état, il faut les lier par des liens ou écharpes IK, *i k*, qui les empêchent de s'ouvrir ou de ſe fermer. *Fig.* 174.

Pour trouver le pole d'un cercle mineur, dont on a trois points donnés (*Fig.* 175) on décrira ſur une ſurface plane par le moyen du triangle APE le cercle AE *d*, puis ayant diviſé l'arc BE en deux également en *m*, on tirera le diametre *m t* perpendiculairement à BE, ſur le milieu C duquel on mene- *Fig.* 175.

ra la perpendiculaire X$c$$x$, puis du point m ou t pour centre, & de l'intervalle du demi-diametre de la ſphere pour rayon, on décrira des arcs de cercle qui couperont la perpendiculaire Xx au point G qui repréſente le centre de la ſphere, duquel & avec le même rayon on décrira des arcs qui couperont la ligne Xx aux points x & X, où ſeront les poles du cercle mineur ABEd que l'on cherche; ainſi les diſtances Xm ou xt, ſeront les rayons des interſections des arcs de cercle qu'on fera des points B & E, comme centres pour avoir le point d'un des poles, comme nous l'avons dit ſur la Figure 173.

Fig. 175.

Ou bien méchaniquement & avec une exactitude ſuffiſante pour la pratique, on enfilera trois cordeaux égaux dans un anneau (*Fig.* 173) en S pour la ſurface convexe, & en P pour la concave, qui ſeront d'une longueur proportionnée à peu près à celle qu'on juge à vûe d'œil, & un peu plus longue; on les nouera enſemble par un bout, & on attachera les autres aux points donnés, puis faiſant couler l'anneau en rapprochant de la ſurface de la ſphere les trois cordeaux également tendus, on parviendra exactement au pole, où l'on attachera un des cordeaux pour tracer le cercle demandé ſur la ſurface de la ſphere. Cette méthode a cela de commode qu'elle peut ſervir ſur la ſurface convexe, en éloignant l'anneau au-deſſus du pole autant qu'on le voudra, pour éviter le frottement du cordeau qui ſert de ſimbleau, lequel doit être tangent à la ſphere, pour n'être point plié ſur la ſurface convexe, où ce pli, ou plutôt cette courbure cauſeroit des ondulations par le frottement.

Mais ſi on avoit un cercle majeur à décrire, comme les ſocles ou les côtés d'une couverture de dôme, tels qu'on en voit à celui des Invalides; on ne pourroit aſſez élever le point S pour éviter le frottement, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir du niveau ou du plomb; ſi les cherches doivent être de niveau comme les ſocles, ou à plomb comme les côtes, ou ſi de tels ornemens étoient inclinés, comme des entrelas de cercles, il faudroit avoir au pole une perche perpendiculaire à la ſurface convexe par la pratique dont nous parlons qui ſerviroit à alligner le cordeau, afin qu'en le courbant, il ne ſe détournât point de ſa direction; parce que pour peu qu'il ſe courbe à droite ou à gauche, il ſe racourcira & donnera de faux points du cercle propoſé.

DEMONSTRATION.

Premierement, il eſt clair qu'ayant trouvé la corde de 90 degrés de la circonférence de la ſphere, & l'ayant appliquée aux deux points donnés, la rencontre de deux de ces cordes égales eſt le pole qui eſt toujours éloigné de 90 degrés d'un grand cercle, par la ſeizieme propoſition des ſphériques de THEODOSE. *Fig.* 175.

Secondement, pour trouver le diametre d'un cercle dont on a trois points donnés, nous avons élevé des perpendiculaires ſur AB & AE pour avoir la poſition de ce diametre, parce que (par la trente-unieme Prop. d'EUCL. *l.* 3) l'angle droit eſt toujours dans le demi-cercle ; & puiſque les lignes B *d* & E *d* ſont bien poſées, leur rencontre ſe terminera au point de la circonférence du cercle diamétralement oppoſé au point A : la même conſtruction eſt encore plus intelligible dans le Corollaire pour trouver le diametre de la ſphere.

Troiſiemement il eſt démontré dans la treizieme propoſition des ſphériques de THEODOSE, que ſi dans la ſphere un cercle en coupe un autre en deux également & perpendiculairement, les poles de celui qui eſt coupé, ſont dans la circonférence de celui qui le coupe & à diſtances égales; or il eſt viſible que le cercle mineur ABE *d* eſt coupé en deux également par ſon diametre *mt*, lequel eſt la corde d'un cercle majeur, dont le diametre X*x* eſt élevé perpendiculairement ſur cette corde ; par conſéquent les points X & *x* ſont les poles du cercle ABE *d*, & les lignes X*m*, X*t*, *xm* & *xt*, les diſtances, ſont les tangentes de ces poles au cercle ; car quoique les deux cercles majeur & mineur ſoient dans cette Figure ſur un même plan, il faut les concevoir à angle droit l'un à l'autre ; de ſorte que ſuppoſant le mineur dans le plan du papier, le majeur ſeroit élevé en l'air perpendiculairement en tournant ſur la corde *mt*, qui doit êtr immobile.

USAGE.

Ce Problême eſt néceſſaire aux Peintres, aux Sculpteurs en ſtuc ou en plâtre, & aux marbriers qui ont des ornemens circulaires à tracer dans la ſurface concave d'une voute ſphérique, ou ſur la ſurface convexe, comme par exemple des ſocles, des

côtes d'arcs doubleaux, des bordures de bas relief, ou des ouvertures feintes, ou des entrelas circulaires.

A l'égard des ouvertures vrayes ou feintes faites après coup dans une voute ſphérique ; je dirai en paſſant que VIVIANI *a trouvé le moyen de percer une voute hémiſphérique en quatre endroits pour des fenêtres, en ſorte que le reſte de la voute ſoit géométriquement quarrable.*

Quoique cette propoſition n'ait aucun rapport à notre ſujet qui n'a pour but que la diviſion des ſurfaces & non pas leur étendue ; je crois qu'on ne ſera pas fâché de cette petite digreſſion : la conſtruction de ce Problême conſiſte à diviſer la baſe de l'hémiſphere par deux diametres à angles droits, ſur leſquels on fait quatre petits demi-cercles pour baſes de quatre moitiés de cylindres droits qui percent l'hémiſphere ; le reſtant des quatre ouvertures qu'ils font, eſt quarrable, c'eſt-à-dire, qu'on en peut trouver la ſurface géométriquement. On a vû par nos principes au Théorême VII. que la courbe que font chacun de ces demi-cylindres étoit une ellipſimbre ; il ne s'agiroit plus que de quarrer l'eſpace enfermé dans ces ellipſimbres pour avoir la ſurface totale de l'hémiſphere ; mais quoique la Géométrie ne ſoit pas parvenue à ce degré de perfection, elle nous fournit pour la pratique des moyens ſuffiſamment exacts.

PROBLEME XXX.

Par un point donné ſur la ſurface d'un cylindre, tracer un cercle.

Si le cylindre eſt droit, & que la baſe ſoit donnée, il n'y a point de difficulté ; il n'y a qu'à ſuivre le contour de la baſe à diſtance égale priſe toujours parallelement à l'axe, ſoit avec une regle ou un cordeau, ou en petit, avec cet inſtrument de Menuiſier qu'on appelle *Truſquin* ; mais ſi l'on n'a pas la baſe, ou parce qu'elle eſt oblique ou rompue, ou embarraſſée par quelque corps qui la couvre, comme ſi l'on vouloit tracer un ornement circulaire, tel qu'une baſe ou une aſtragale à un pilier Gothique en place ; il faut commencer par mener pluſieurs paralleles à l'axe, & tracer le cercle, s'il eſt queſtion d'un cylindre ſcalene, comme une ellipſe ſur un cylindre droit, ainſi que nous le dirons ci-après ; nous parlerons ſeulement ici du cylindre droit.

Premiere maniere de tracer des paralleles à l'axe du cylindre, *la base étant donnée.*

Soit une base droite ou oblique ABDE ; ayant applani cette base, on y menera deux lignes *g* G, *f* F paralleles entr'elles, qu'on divisera en deux également en M & *m*, par où si l'on tire la ligne BE, son milieu C sera l'extrêmité de l'axe du cylindre : on en fera autant sur la base opposée pour trouver l'autre extrêmité du même axe ; ensuite ayant posé une regle HI à volonté sur cette base, pourvû qu'elle passe par le pied C de l'axe, on tracera la ligne AD : posant aussi une autre regle KL sur la base opposée, on la fera tourner sur l'extrêmité de l'axe, jusqu'à ce que regardant l'une par l'autre, leur direction soit parallele ; en sorte que celle du côté où l'on regarde couvre si bien l'autre, que les deux lignes supérieures ou inférieures de ces regles se confondent en une, ce qu'une personne seule peut faire en arrêtant une des regles dans sa position, & tenant l'autre pour la tourner comme il convient, pour faire en sorte que le rayon visuel rase les deux regles, de maniere qu'elles ne paroissent point se croiser, ce qu'on appelle *bornoyer*, parce que l'on ferme ordinairement un œil, & que nous avons exprimé par des lignes qui partent d'un œil *æ*, à la Fig. 177, en cette situation si on trace des diametres sur les bases, la ligne menée à la surface du cylindre par l'extrêmité de ces diametres ainsi correspondans, est une parallele à l'axe du cylindre, par exemple D *d*. *Fig.* 177.

Lorsque les bases sont embarrassées comme à un pilier en place, qui est engagé par le haut & par le bas, on est obligé d'avoir recours à des manieres méchaniques pour tracer des paralleles à l'axe.

La premiere & la plus simple, est celle de se servir du plomb pour les cylindres posés bien verticalement comme des piliers ronds ; & s'ils sont inclinés, c'est d'appliquer de *champ* une regle fort large OP, & dont les côtés opposés sont bien paralleles le long du pilier, & la tourner de maniere qu'en regardant par dessus cette regle, elle ne croise point la ligne tangente du pilier ; en sorte que les rayons visuels *æ* O, *æ* P rasent l'un & l'autre, la surface du pilier ; la ligne tracée sur la même surface cylindrique au long du côté de la regle qui appuye sur le cylindre, est une parallele à l'axe.

La seconde maniere, qui est encore méchanique, est de tra-

Fig. 176. cer avec un compas d'un point C pour centre, & d'une ouverture prise à volonté une ligne courbe *d*E*e*, sur la surface du cylindre, comme l'on décrit un cercle sur une surface plane; ensuite d'une ouverture de compas un peu plus grande que la premiere, mais moindre que la longueur de l'arc de cylindre, dont elle est la corde developpée, c'est-à-dire rectifiée, on décrira sur du carton un demi-cercle, ou seulement un secteur de cercle qui en approche, dont on posera le centre en C, & l'ayant appliqué & plié sur la surface du cylindre, on y en tracera le contour qui coupera celui de la courbe précédente en deux points X & *x*, par lesquels si l'on tire une ligne droite, on aura la parallele à l'axe qu'on cherche, à laquelle il sera facile d'en tirer d'autres par des points donnés s'il le faut. On peut faire la même chose avec un cordeau, mais moins exactement; cela supposé comme une préparation nécessaire pour tracer les cercles & les ellipses à la surface du cylindre.

Si le cylindre est droit, il ne s'agit que de faire des sections perpendiculaires aux lignes paralleles à l'axe: ainsi on prendra à volonté les points *x* & X pour centres, & de tel intervalle qu'on voudra pour rayon, on fera des intersections d'arc en H & en K, & plus loin en *h* & en *k*, ou plus près en *l* & *i*, & l'on appliquera sur ces points *k*K, *l i*, H *h* une regle pliante, avec laquelle on tracera le cercle autour du cylindre s'il est droit; car s'il est scalene, la section perpendiculaire à l'axe sera une ellipse, auquel cas pour décrire un cercle par le point donné, il faut mener par ce point un contour parallelele à la base, ou faisant un angle sous-contraire.

Fig. 180. Pour tracer des lignes paralleles à l'axe dans la surface concave d'une portion de cylindre, comme dans une voute, (*Fig.* 180) au lieu de prendre deux paralleles des deux côtés du centre, on les prendra toutes deux du même côté, comme *a f*, *b e*; on les divisera chacune par le milieu en M & *m*, & on menera par ces milieux la ligne *d*C qui sera un diametre; mais parce que le cylindre n'est pas complet, ce diametre ne sera terminé que d'un côté en *d*, & ne l'étant pas au-delà de C, on ne pourra en avoir le milieu C, qu'en répetant la même opération par deux autres lignes *i h*, K*g* qui donneront un second diametre E *c* qui coupera le premier en C, centre de la base où passera l'axe du cylindre. On en fera autant à la base opposée, & l'on aura l'autre extrêmité de cet axe, auquel il ne sera pas difficile de mener

des paralleles, en tendant un cordeau d'un bout de l'axe à l'autre, & bornoyant par cette ligne deux points dans la surface concave; de sorte que cet axe soit dans le même plan, & que le cordeau les couvre à l'œil qui doit être un peu éloigné du cordeau, du côté opposé aux points que l'on veut marquer sur la surface concave, pour y tracer une parallele à l'axe du cylindre.

DEMONSTRATION.

La premiere maniere de tracer une parallele à l'axe du cylindre est fondée sur ce que les ordonnées à un diametre sont coupées en deux également par ce diametre; lequel étant aussi divisé en deux également, donne le centre de la base du cylindre, soit qu'elle soit circulaire ou elliptique; or quelle qu'elle soit, l'axe passe par son centre, & les deux regles HI, KL que l'on dirige par le rayon visuel dans le même plan passant par l'axe, donnent aussi les côtés du parallelogramme par l'axe, dont les côtés opposés sont paralleles; donc D*d* est une ligne parallele à l'axe; *ce qu'il falloit faire.* *Fig. 177.*

La seconde maniere de tracer une parallele à l'axe du cylindre par le moyen d'une regle d'une certaine largeur, quoique méchanique, est exacte dans son principe; car puisqu'elle est dirigée par les rayons visuels dans un plan tangent au cylindre, ce plan ne le touchera que suivant une ligne parallele à l'axe, & le plan de la regle étant de largeur égale d'un bout à l'autre, fera un parallelogramme, dont un côté sera sur le plan tangent, & l'autre sur le cylindre, toujours également éloigné de la ligne d'attouchement; donc il lui sera parallele, & par conséquent à l'axe.

La troisieme maniere, quoique méchanique, est aussi exacte dans son principe; on trace sur le cylindre deux courbes à double courbure *d*E*e*, *m*MB de différente nature, qui ne peuvent se rencontrer qu'en quatre points; sçavoir, deux de chaque côté en X*x* d'une section par l'axe AG; celle de ces courbes qui est tracée avec le compas, a tous ses diametres passans par le centre C, courbes de courbures inégales, à la réserve de *d e* qui est droit, & de contour inégalement long, qui ont cependant des sous-tendantes toujours égales, lesquelles sont les lignes droites qu'on imagine passer par les deux points du compas; & au contraire celle qui est tracée avec un cercle *Fig. 176.*

Pl. 16. Fig. 176. plié, a tous ses diametres de contour également long, & toutes les sous-tendantes inégales. Chacune de ces courbes a un diametre droit qui leur est commun sur le côté AB, & un ciculaire qui lui est perpendiculaire; sçavoir, CE dans la premiere, & CM pour la seconde ; tous les autres sont elliptiques, dont la courbure se redresse à mesure qu'ils approchent de AB; de sorte qu'étant tous inégaux de chaque côté, ils ne peuvent aboutir au même point que lorsqu'ils approchent également de ce diametre droit, qui est le côté du cylindre, comme en X & *x*, donc la ligne X *x* est parallele au côté, & par conséquent à l'axe; *ce qu'il falloit faire.*

Quant à la maniere de tracer le cercle sur la surface du cylindre, il est clair que l'on suppose que le cylindre soit droit, parce que les points K *i*, *k* H étant chacun également éloignés des points *x* X, sont dans un même plan perpendiculaire au côté *x* X du cylindre, par conséquent à son axe, auquel ce côté est essentiellement parallele.

D'où il résulte une section parallele à la base, c'est-à-dire, un cercle.

Mais aussi il est clair que si le cylindre étoit scalene, cette section perpendiculaire au côté seroit une ellipse qui ne seroit point parallele à la base; ainsi pour décrire un cercle à la surface d'un cylindre scalene, il faut en avoir la base, tirer des paralleles à l'axe sur la surface, c'est-à-dire plusieurs côtés, & porter sur chacun de ces côtés la même distance du point donné au contour de la base, pour avoir autant de points que l'on a de côtés; mais alors on ne peut plus se servir de la regle pliante posée de plat pour tracer le cercle, parce que la direction de son pli se tourne perpendiculairement au côté du cylindre, au lieu que celle du contour du cercle le coupe obliquement d'un angle égal à celui que l'axe fait avec le plan de la base; mais on peut s'en servir en la posant de *chan*, c'est-à-dire, sur son épaisseur appliquée sur ces points trouvés, parce que l'ellipse est une courbe plane, & qu'une regle d'une largeur beaucoup plus grande que son épaisseur étant pliée, se dirige facilement sur un plan; il n'en seroit pas de même s'il s'agissoit d'une courbe à double courbure, il faudroit alors que l'épaisseur fut égale à la largeur, afin qu'elle ne fit pas plus de résistance à se plier d'un côté que de l'autre.

Enfin la derniere opération pour tirer des paralleles à l'axe dans

dans une ſurface concave de portion de cylindre, eſt la même que la premiere redoublée, parce que le centre de la ſection étant dans chaque diametre, il ſera dans le point de concours des deux où ils ſe croiſent.

USAGE.

Ce Problême eſt un des fondamentaux de la conſtruction des voutes cylindriques, parce qu'il ſert à trouver l'arc droit des berceaux circulaires ou elliptiques, ou pour le ceintre entier, ou pour une petite portion, telle qu'eſt un vouſſoir, pour y poſer la *cerche*, c'eſt-à-dire le modele de la courbe, lequel doit être préſenté perpendiculairement à une ligne parallele à l'axe; car pour peu que cette ligne lui fût inclinée, le modele de la courbe circulaire ou elliptique marqueroit une concavité ou une convéxité, laquelle étant continuée ſuivant la direction d'une ligne qui croiſeroit la direction de l'axe, donneroit une ſurface différente de celle qu'on ſe propoſe, comme on peut l'appercevoir par la différence de la ſection du plan qui paſſeroit par cette courbe.

Ce Problême peut encore ſervir à tracer ſur une doële de berceau des ornemens de Peinture ou de ſtuc, comme des arcs-doubleaux.

La maniere de faire des paralleles à l'axe, peut être employée au même uſage, par exemple, à diriger une corniche dans un berceau rampant, dont la régularité de l'impoſte ſeroit douteuſe; ce qu'on a ſouvent lieu d'examiner à cauſe du peu d'exactitude des Ouvriers dans les voutes même les plus ſimples.

Enfin ce Problême eſt néceſſaire pour la conſtruction de ceux qui ſuivent.

PROBLEME XXXI.

Par un point donné à la ſurface d'un cone, faire paſſer un cercle.

Premier cas. Lorſque le cone eſt droit, & que le ſommet eſt donné; il ne s'agit que de fixer un cordeau ou une regle au ſommet, & de ce point, comme pole, décrire un cercle, en tournant ſur la ſurface concave ou convexe, cela eſt très-ſimple.

2°. Mais ſi le ſommet n'eſt pas donné comme dans un cone tronqué, il faut tirer ſur la ſurface du cone deux lignes droites, c'eſt-à-dire deux côtés, leſquels étant prolongés, ſe rencontreront au ſommet du cone.

Pour tirer ces côtés, il ſuffit d'appliquer une regle bien droite ſur la ſurface du cône, en ſorte qu'elle ne laiſſe point de jour entr'elle & cette ſurface. Si cependant le cone tronqué étoit d'une grande circonférence, on pourroit s'y tromper, parce que la ſurface étant d'une convéxité peu ſenſible, vers la baſe ſurtout, on pourroit biaiſer la regle ſans s'en appercevoir; c'eſt pourquoi ſi l'on veut opérer exactement, il faut tirer des paralleles ſur les plans des baſes oppoſées, que nous ſuppoſons premierement paralleles entr'elles, & faire pour cette eſpece de cone tronqué la même opération que nous avons faite à la Figure 177, pour trouver le côté du cylindre; alors on ſera ſûr que la rencontre des côtés du cone trouvés par ce moyen, en donnera exactement le ſommet, ſi l'on veut s'en ſervir, mais on peut s'en paſſer. Car ayant trouvé deux côtés du triangle par l'axe du cone qui diviſe les deux baſes en deux parties égales, on ſubdiviſera chacune de ces parties en un même nombre de parties égales, & l'on tirera des lignes droites des unes aux autres, à la baſe ſupérieure & inférieure, comme l'on voit à la Figure 186; la diſtance du point donné à la ſurface du cone priſe de l'une des baſes, & portée ſur chacune de ces lignes ou côtés du cone, donnera des points par leſquels on menera à la main une ligne courbe qui ſera le cercle demandé.

Il faut remarquer ici qu'on ne peut pas ſe ſervir pour le tracer d'une regle pliante poſée de plat, parce que la ſurface de la largeur s'appliquant perpendiculairement au côté du cone, la direction de ſon pli donneroit une courbe qui s'écarteroit des points marqués, pouvant être une ellipſe, une parabole, ou une hyperbole, ſuivant l'ouverture de l'angle du ſommet du triangle par l'axe; ce qui eſt clair, mais on peut s'en ſervir en la poſant de *cant* ou de champ; on ſe ſert encore de la regle d'une autre maniere, on bornoye par ſon côté deux ou trois points, ſuivant leſquels on la tient appuyée d'un côté, & en l'air par l'autre, puis fermant un œil, on ſuit avec le crayon l'allignement de cette regle, ſans changer l'œil de place.

Si les baſes oppoſées du cone tronqué ne ſont pas paralleles, il eſt clair que l'une étant circulaire, l'autre ſera elliptique, & que c'eſt de la circulaire qu'il faut prendre les meſures de la diſtance du point donné.

Mais ſuppoſant que la baſe circulaire eſt ſeule plane, & que la partie tronquée n'eſt pas applanie, on peut encore tracer les

côtés sur la surface du cone en prenant des points à son contour équidistans d'un troisiéme au milieu des deux, & de ces points, comme centres, faire des intersections d'arcs, comme si on élevoit une perpendiculaire sur une surface plane, & sur les côtés ainsi trouvés, tracer le cercle par le point demandé, comme nous venons de le dire.

Troisieme cas. Lorsque le cone est scalene, quand même son sommet seroit donné, on ne peut plus s'en servir comme d'un pole pour tracer le cercle par le point donné, ni de la distance du point donné à la surface mesurée sur un côté jusqu'à la circonférence de la base, parce que le contour du cercle parallele à la base, est inégalement distant de celui de la base, quoique les plans de l'un & de l'autre soient supposés paralleles, & par conséquent équidistans.

Il faut alors (*Fig.* 179) abaisser une perpendiculaire SP du sommet S du cone scalene donné ASB sur le plan de sa base AB prolongé; ce qui est une opération familiere à ceux qui sçavent bien faire des Cadrans pour trouver le pied du stile, & qui est un Problême du XI Livre d'EUCLIDE, Prop. XI. Ceux qui ne sont pas Géometres, le font par le moyen d'une équerre qu'ils posent d'un côté sur le plan, & appuyent l'autre au sommet S, & en la tournant sur le côté SP marquent le point P, par lequel si l'on tire une ligne par le centre C, on aura le triangle rectangle APS, & par conséquent l'obliquangle ABS, qui est la plus oblique de toutes les sections par l'axe du cone, c'est-à-dire qui en marque le plus long côté AS, & le plus petit BS. *Fig. 179.*

Ayant décrit ce triangle sur une surface plane, & le demi-cercle A 2 B, moitié de la base du cone, on le divisera en autant de parties qu'on voudra avoir de points du cercle demandé, comme ici en quatre, aux points 1, 2, 3, d'où l'on tirera des perpendiculaires sur le diametre AB, qui le couperont aux points E, C, G, desquels on tirera des lignes au sommet S; puis par le point donné D ou *d*, s'il est dans ce triangle ASB, on tirera une ligne D *d* parallele à AB; & s'il n'y est pas, nous verrons par la suite de l'opération ce qu'il faut faire pour tirer cette parallele.

Du point E pour centre & pour rayon ES, on fera un arc S *h* qui coupera AB prolongée en *h*, d'où l'on tirera au point 1 la ligne 1 *h* qui sera le côté du cone passant par le point 1; on

Fig. 168. trouvera de même les côtés 2 *k*, & 3 *l* qui aboutiront en *b*, *k*, *l*, à différens points donnés sur AB prolongée par la transposition des lignes CS & GS.

Ensuite du point E pour centre & pour rayon E*e*, où ES coupe D*d*, on fera un arc *ef*, qui donnera sur AB le point *f*; la ligne *fx* menée parallelement à E 1, donnera sur le côté 1 *h* le point *x* que l'on cherche, qui est un de ceux de la circonférence du cercle demandé, pris sur le côté 1 *h*, dont la projection est ES dans le triangle par l'axe ASB; le rayon C*m* donnera un point auprès de G, d'où tirant G*y* parallele à C 2, on aura le point *y*: ainsi des autres.

Si le point donné D n'est pas sur les côtés du triangle par l'axe ASB, mais qu'il soit par exemple en *g*, ayant tiré par le sommet du cone le côté S*g*, il coupera la base au point 3, d'où ayant trouvé le côté 3 *l*, on portera sur ce côté la distance donnée 3 *z* égale à 3 G pris sur la surface du cone; puis de *z* tirant *zb* perpendiculaire sur AB prolongé, la distance G*b* donnera sur GS le point *g* par où doit passer la parallelle D *d*, pour trouver les points de la circonférence du cercle demandé, comme nous venons de le dire.

Il n'est pas nécessaire de parler ici du cercle de la section sous-contraire, parce qu'il est aisé d'y suppléer, en faisant attention qu'au lieu d'opérer sur la ligne D *d* parallele à la ligne AB, il faut tracer une autre ligne NB, ou sur une de ses paralleles qui fasse avec SA un angle égal à l'angle SBA.

DEMONSTRATION.

Il est clair par la nature du cone que l'on ne peut trouver de lignes droite à la surface, que celles qui sont menées du sommet à la circonférence de sa base que toutes ces lignes sont égales dans le cone droit, & inégales dans le scalene; que lorsqu'elles sont égales, qui en a une les a toutes; mais que lorsqu'elles sont inégales, on ne peut les trouver par la projection sur le triangle par l'axe ASB, comme on a trouvé ci-devant les côtés du cylindre sur le parallelogramme par l'axe, parce que les lignes ES, CS, GS, sont les côtés d'un triangle rectangle, dont le côté du cone qui leur répond est l'hypotenuse. Or il est clair qu'en transportant, par exemple, ES en E *h*, le côté E 1 restant immobile à angle droit sur AB, la ligne 1 *h*

représente exactement le côté du cone, & 1 x la distance de la base à une section parallele faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe ASB, & parallele à la base. Pl. 18. Fig. 179.

Que les angles SE 1, SC 2, SG 3 soient droits, c'est une suite de la construction. parce que le plan du triangle par l'axe ASB passe par la ligne SP qui a été faite perpendiculaire au plan de la base AB; c'est-à-dire du demi-cercle A 2 B; par conséquent toutes les lignes E 1, C 2, G 3, perpendiculaires à la commune section AP de ces deux plans, sont perpendiculaires à toutes celles qui sont tirées dans le plan ASP, comme SE, SC, SG, &c.

Nous avons supposé dans ce Problême que le cone étoit droit, ou incliné sur une base circulaire; mais si l'on n'avoit qu'une base elliptique, & qu'on voulut tracer un cercle sur le cone, il faudroit chercher l'angle de l'inclinaison d'un plan coupant celui de la base, dont la section fût un cercle, pour avoir le profil du triangle par l'axe du cone elliptique. Comme cette proposition n'a été donnée par aucun des Auteurs des Traités des sections coniques que je connoisse, & que j'y ai trouvé de grandes difficultés, j'ai eu recours au célebre M. BERNOULLI, un des premiers Mathématiciens de notre siecle, qui a bien voulu m'en donner la solution; il est convenu „ que ce Problême étoit „ du nombre de ceux qui, quand on ne s'y prend pas bien, en- „ gagent dans un calcul pénible, & conduisent à des équations „ de quatre dimensions, & que sa solution étoit une chose nou- „ velle.

Ce grand homme * qui a le bonheur d'avoir deux fils, nommé Daniel & Jean, qui marchent à grand pas sur ses traces dans les hautes Sciences, comme il a paru par plusieurs Ouvrages de Mathématique de leur façon, ayant parlé au second (qui a remporté deux prix de l'Académie des Sciences de Paris) de ma question il l'a résolu d'une autre maniere, dont il a bien voulu me faire part. On la verra à la suite de celle de M. son pere, que je mets ici mot à mot, persuadé que ce qui vient des grands hommes doit être conservé sans altération; dans cette idée j'aurois copié en entier la lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, s'il n'y avoit répandu des expressions si obligeantes sur mon Ouvrage, que je ne pourrois les répeter sans pécher contre la modestie. Il n'en falloit pas moins pour me faire supprimer les marques de sa politesse & celles de la bienveillance dont

* Il est mort depuis la premiere Edition de ce Traité.

il m'honore, à laquelle je suis extrêmement sensible.

PROBLEME XXXII.

Etant donné un cone ASB droit, sur une base elliptique ADB, dont AB est le petit axe, dont le plan doit être conçû perpendiculaire au plan du triangle isoscele ASB; on demande la position d'un plan incliné sur l'ellipse, dont la section dans le cone soit un cercle.

Fig. ✠ *pres de la Fig.* 182. 1°. J'appellerai le *grand côté* du cone elliptique la droite SD, (ou S*d*) tirée du sommet S à l'extrêmité D du grand demi axe de l'ellipse, dont le plan doit être considéré comme perpendiculaire au plan du triangle isoscele ASB.

DÉFINITIONS.

2°. *Le petit côté* du cone sera SA tirée du sommet S à l'extrêmité A du petit axe de l'ellipse.

Soient nommées

La hauteur ou l'axe du cone SC	$= a$
Le petit demi-axe de l'ellipse CA ou CB	$= b$
Le grand demi-axe de l'ellipse CD	$= c$

Le grand côté du cone SD $= \sqrt{cc + aa} = n$, la différence du quarré de CD, & du quarré de CA, c'est-à-dire, $cc - bb = hh$, & partant $\sqrt{cc - bb} = h$, pour faire une ligne droite égale à h on a $\sqrt{cc - bb}$, il n'y a qu'à décrire un demi-cercle sur CD, & y inscrire la corde Ca égale à CA, tirant ensuite l'autre corde Da, on aura D$a = \sqrt{cc - bb} = h$: ou bien dans l'angle droit ACD, tirés une hypotenuse AF égale à CD, on aura CF $= \sqrt{cc - bb} = h$: notez que le point F sera un des foyers de l'ellipse.

Solution. Le plan de l'ellipse ADB étant perpendiculaire au plan du triangle ASB, je cherche la position d'une ligne droite yY dans le triangle isoscele ASB, laquelle passe par le centre C de l'ellipse, & sur laquelle si on dresse un plan aussi perpendiculaire au plan ASB, je veux que ce plan dressé fasse dans le cone par sa section un cercle, dont le diametre sera yY, & CD une ordonnée commune à l'ellipse & au cercle, parce que

le plan de l'ellipse & le plan du cercle se coupent dans la droite CD : il faudra donc, par la propriété du cercle, que CD soit la moyenne proportionelle entre les deux segmens du diametre Cy & CY, & partant que le rectangle C$y \times$CY de ces deux segmens soit égal au quarré de l'ordonnée CD, & c'est ce qu'il faut exécuter.

Fig. ✠ près de la *Fig.* 182.

Ayant prolongé Yy jusqu'à SE perpendiculaire à SC, soit SE $= x$: on aura, à cause des triangles semblables SyE, & AyC, SE : AC : : Ey : yC, & *componendo* SE + AC : AC : : Ey + yC ou EC : yC, c'est-à-dire, $x + b : b :: \sqrt{xx+aa} : y\text{C} = b\,\frac{\sqrt{xx+aa}}{x+b}$. Pareillement, à cause des triangles semblables SYE, BYC, on aura SE : BC : : EY : CY, & *dividendo* SE — BC : BC : : EY — CY, ou EC : CY, c'est-à-dire, $x - b : b :: \sqrt{xx+aa} : \text{CY} = b\,\frac{\sqrt{xx+aa}}{x-b}$; or le rectangle yC$\times$CY devant être égal au quarré de CD, j'aurai d'abord cetre égalité $b\,\frac{\sqrt{xx+aa}}{x+b} \times b\,\frac{\sqrt{xx+aa}}{x-b}$ ou $\frac{bbxx+bbaa}{xx-bb} = cc$, d'où on trouve par la réduction $xx = \frac{bbcc+bbaa}{cc-bb} = bb\,\frac{mm}{hh}$, par conséquent $x = b\,\frac{m}{h}$; *ce qu'il falloit trouver.*

Construction Géométrique.

Faites cette analogie : *Comme h ou $\sqrt{\text{CD}^2 - \text{AC}^2}$ ou CF est à b ou AC, ainsi m ou SD est à une quatrieme* ; je dis que si vous prenez SE égale à cette quatrieme, & que vous tiriez par le centre C la droite EY, la partie yY interceptée entre les deux petits côtés SA & SB, prolongée, fera la position & la grandeur du diametre cherché ; sur lequel si on dresse un plan perpendiculaire au triangle ASB, la section de ce plan fera dans le cone un cercle, donc aussi tous les autres plans paralleles à celui-ci, feront par leurs sections tout autant d'autres cercles.

SCHOLIE.

Que si vous aimez mieux trouver trigonométriquement l'angle de l'inclinaison de la section; sçavoir, l'angle ACy, qui est

égal à l'angle E, vous n'avez qu'à faire cette analogie ; comme ES est à SC, ainsi le sinus total est à la tangente de l'angle cherché AC y.

COROLLAIRE.

On en trouve maintenant tout ce que l'on veut, par exemple, C x, ou la distance du centre de l'ellipse au centre du cercle; car $yY = yC + CY = b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x+b} + b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x-b} =$ (en substituant la valeur de x) $\frac{cn}{m+h} + \frac{cn}{m-h} = \frac{2mcn}{mm-hh} =$ en substituant la valeur de $mm-hh$ qui est $= aa + bb = nn$) $\frac{2mcn}{nn} = \frac{2mc}{n}$, donc la moitié $\frac{mc}{n} = Yx$ ou yx, & en retranchant Cy, ou $\frac{cn}{m+h}$, il reste $Cx = \frac{mc}{n} - \frac{cn}{m+h} = \frac{mmc - nnc + hmc}{mn - hn} =$ (en substituant pour $mm - nn$ sa valeur $cc - bb$, ou hh) $\frac{hhc + hmc}{mn + hn} = \frac{hc}{n}$: ainsi C x sera la quatrieme proportionelle de n, h & c, c'est-à-dire, de SA $\sqrt{CD^2 - AC^2}$ & CD, ou de SA, CF & CD.

Ce que vous trouvez, (c'est toujours M. BERNOULLI qui parle en réponse) que *le quarré de la moitié du diametre* y Y *qu'on cherche, est égal au quarré de la moitié du grand axe CD, de la base, plus au quarré de* Cx; n'est autre chose qu'une application d'une proposition du II. Livre d'EUCLIDE, qui est qu'une ligne droite comme y Y étant coupée également en x, & inégalement en C, le quarré de la moitié yx est égal au rectangle des segmens inégaux $yC \times CY$ plus au quarré de l'interceptée Cx. Car, comme j'ai remarqué ci-dessus, le rectangle $yC \times CY$ doit être égal au quarré de CD; donc on aura aussi Yx^2 ou $yx^2 = CD^2 + cx^2$, comme vous avez trouvé; ceci est encore confirmé par ce que je viens de démontrer en dernier lieu, où j'ai trouvé $Yx = \frac{mc}{n}$, $Cx = \frac{hc}{n}$ & $CD = c$; il faut donc faire voir qu'effectivement $\frac{mmcc}{nn}$ sera $= cc + \frac{hhcc}{nn} = \frac{nncc + hhcc}{nn}$; or il est clair que $mm - nn$ étant égal $cc -$

bb

$bb = hh$, on aura $nn + hh = mm$, donc $\frac{nncc + hhcc}{nn}$ devient $= \frac{mmcc}{nn}$; ainsi on a $Yx^2 = \frac{mmcc}{nn}$, & aussi $CD^2 + Cx^2 = \frac{mmcc}{nn}$, par conséquent $Yx^2 = CD^2 + Cx^2$.

Vous dites, Monsieur, que vous ne connoissez pas CX, parce que l'angle ASX vous est inconnu: voilà CX trouvé, puisqu'il est égal $\frac{hc}{n}$ indépendamment de l'angle ASX, si pourtant par curiosité on veut trouver cet angle, je m'y prendrai en telle maniere.

Dans le triangle ACy, on a trouvé l'angle ACy, l'angle CAy est donné, le côté AC est aussi donné: de ces trois choses données, on trouve CyA, & le côté Ay, donc dans le triangle xyS, on aura l'angle xyS, & les deux côtés xy & yS, ce qui sert à trouver l'angle xyS que l'on cherche.

Quant au côté Ay on le trouve immédiatement par la premiere similitude des deux triangles SyE, CyA en faisant comme SE + AC est à AC, ainsi Sy + yA, ou SA, est à Ay, c'est-à-dire, $x + b : b :: n \frac{nb}{x+b} =$ Ay, & mettant pour x sa valeur $\frac{bm}{b}$ on aura $\frac{nb}{x+b}$, ou A$y = \frac{hn}{m+h}$; faisant donc comme $m + h$ ou SD + Cd est à h ou Cd, ainsi n ou SA est à une quatrieme: cette quatrieme sera celle à laquelle il faut prendre Ay égale, & tirant ensuite par le centre de l'ellipse C la droite y CY, cette droite sera encore le diametre du cercle cherché; ce que j'ai voulu remarquer par occasion.

En supposant au lieu d'un cone droit, un cone scalene ou oblique sur une base elliptique; on résoudra le Problême par la même méthode, & avec la même facilité.

Autre solution du même Problême, par M. Jean BERNOULLI le fils.

Supposé que le point y soit le point cherché dans la ligne AS, par lequel le plan dont est question doit passer.

Ayant tiré de ce point la ligne yH perpendiculaire à la base AB du triangle ASB, & la ligne yK parallele à la même base

qui joigne les deux côtés SA & SB de ce triangle, je nommerai

SA = SB (le petit côté du cone) $= d$
SD (le grand côté du cone) $= e$
CD (le demi grand axe de l'ellipse) $= a$
AC = CB, le demi petit axe $= b$
FC (la distance du foyer F au centre C de l'ellipse) $= f$
Ay (la distance de l'extrémité A du petit axe au point cherché y) $= x$

Ces dénominations étant faites j'aurai SC (l'axe du cone) $= \sqrt{dd-bb}$, & SA (d) : SC $(\sqrt{dd-bb})$: : Ay (x) : IC, ainsi IC $= y$H $= x\sqrt{dd-bb}$, pareillement SA (d) : AC (b) : : Sy $(d-x)$: yI ; on aura yI = IK = HC $= \frac{bd-bx}{d}$; or $\overline{yC}^2 = \overline{yH} + \overline{HC}^2$, donc yC $\frac{\sqrt{xx-2bbx+bb}}{d}$. Pour trouver CY, je fais cette analogie yK = 2yI : CB : : yY : Cy ; *& dividendo*, yK — CB $\left(\frac{bd-2bx}{d}\right)$: CB (b) : : yY — CY $= y$C $\left(\frac{\sqrt{xx-2bbx+bb}}{d}\right)$: CY ; on trouvera CY $=$

$$d\,\frac{\frac{\sqrt{xx-2bbx+bb}}{d}}{d-2x}.$$

Maintenant puisque le cercle cherché & la base du cone se coupent dans la ligne CD, celle-ci sera une corde du cercle ; la ligne yY en sera une aussi, & même elle en sera un diametre, ayant pour appliquée le demi-grand axe CD, par conséquent le rectangle des segmens de ce diametre où yC × CY sera égal à $\overline{CD}^2$, c'est-à-dire, $\frac{dxx-2bbx+bbd}{d-2x} = aa$, & en retranchant bb de part & d'autre $\frac{dxxx}{d-2} = aa - bb =$ (par la propriété de l'ellipse) $\overline{CF}^2 = ff$, donc $xx = -\frac{2ffx}{d} + ff$ & $x = -\frac{ff}{d} + \frac{f}{d}\sqrt{ff+dd}$, ou (en substituant pour $\sqrt{ff+dd}$, sa valeur e) $x = \frac{fe-ff}{d}$; faisant donc comme d ou SA est à f ou

FC, ainſi $e - f$, ou SD — FC, eſt à une quatrieme : cette quatrieme ſera la cherchée.

Les Corollaires qu'on pourroit tirer de cette ſolution, ſont les mêmes que ceux de la précédente.

Pour réduire ces deux ſolutions à la pratique de la regle & du compas, qui eſt la plus commode pour les Artiſtes, on opérera ainſi à la premiere.

Du centre C & CD moitié du grand axe pour rayon, on fera l'arc D *d* qui rencontrera BA prolongé en *d* : ſi l'on tire *d* S, cette ligne repréſentera le grand côté du cone.

Par le foyer F & le point A, extrêmité du petit axe, ayant tiré l'indéfinie FA *e*, on portera ſur cette ligne la longueur du grand côté du cone S *d*, de F en *e*, par où on menera *e g* parallele à AB, qui coupera CS en *g* : par le ſommet S on menera la ligne SE, parallele & égale à *e g*; & enfin par les points E & C on tirera EY qui coupera les côtés SA & SB prolongés en *y* & Y, la partie *y* Y ſera le diametre du cercle que l'on cherche; laquelle étant diviſée en deux également en *x*, le point *x* en ſera le centre.

Si de ce même point *x* par S on tire *x* S, cette ligne ſera l'axe du cone.

Pour la ſeconde ſolution : ayant tiré une ligne A *e* faiſant un angle quelconque avec AS, on portera la longueur CF, diſtance du centre au foyer de l'ellipſe, de A en *o* ſur A *e*, & de *d* en *n* ſur *d*S, puis faiſant SV égal à S *n* ſur *o* S, on tirera par les points V & C la ligne VY, qui coupera AS en *y*, où eſt le point cherché; ainſi la ligne *y* Y ſera le diametre du cercle demandé, qu'on tracera ſur la ſurface du cone elliptique de la même maniere que l'ellipſe ſur le cone droit circulaire, dont nous parlerons après celle de décrire l'ellipſe ſur le cylindre.

USAGE.

Cette propoſition ſert pour les *traits* des voutes coniques appellées trompes, tant droites que biaiſes, c'eſt-à-dire, dont les baſes (qui ſont leurs faces) ſont perpendiculaires ou obliques à leurs axes, parce que les joints de doele & les faces des trompillons ſont toujours des cercles ou portions de cercles paralleles à cette baſe : d'ailleurs quand même les faces ne ſeroient pas planes, comme ſont celles des trompes ſur le coin qui ſont

angulaires, les convexes & les concaves des tours rondes & creuses, & les ondées, comme celle d'anet, il faut toujours pour la facilité de l'exécution suppoſer une baſe circulaire du cone droit ou oblique, de laquelle, comme d'un terme, on porte les allongemens au-dehors, ou les reculemens en-dedans des parties excédentes ou défaillantes des concavités ou des convéxités des faces.

De la deſcription de l'ellipſe ſur les ſurfaces concaves ou convexes du cylindre & du cone.

PROBLEME XXXIII.

Le grand axe d'une ellipſe avec un point à la ſurface du cylindre ; dont la diſtance à un des axes eſt connue, étant donnés, y tracer l'ellipſe.

ON peut trouver les points néceſſaires pour décrire une ellipſe ſur la ſurface du cylindre de deux manieres, ou ſur des cercles paralleles à la baſe, ou ſur des lignes droites paralleles à l'axe ; comme la premiere eſt la plus longue & plus compoſée dans l'opération, parce qu'outre pluſieurs cercles qu'il faut décrire ſur des ſurfaces courbes, il faut encore au moins une parallele à l'axe du cylindre, nous lui préferons la ſeconde.

Fig. 176. Si le point donné eſt à une des extrêmités du grand axe, par
Fig. 178. exemple en L, on fera ſur une ſurface plane à part (*Fig.* 178) un angle *l g a* égal à celui de l'axe du cylindre ſur la baſe, droite, ſi le cylindre eſt droit & aigu ou obtus, s'il eſt ſcalene ſur un des côtés de cet angle comme *a g*, on portera le diametre du cylindre, puis du point *g* comme centre, & de la longueur de l'axe de l'ellipſe pour rayon, on tracera un arc de cercle qui coupera le côté *a l* en *l*, la ligne *g l* ſera la poſition de l'axe de l'ellipſe dans le parallelogramme par l'axe du cylindre ; puis on décrira ſur *ag* comme diametre le demi-cercle *a n o p g*, qu'on diviſera en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de l'ellipſe comme ici en quatre aux points *n*, *o*, *p*, par leſquels on menera des perpendiculaires ſur *a g* qu'on prolongera juſqu'au diametre *g l*; les lignes compriſes entre les diametres *a g*

&c *g l*, feront les diftances du contour du cercle de la bafe à l'ellipfe demandée ; on tranfportera fur le contour de la bafe du cylindre (*Fig.* 176) les divifions *a*, *n*, *o*, *p*, *g* de la Figure 178, & par ces points on tirera des paralleleles à l'axe, fur lefquelles on portera les diftances QR, *c*S, *q u* de la Figure 178, & l'on aura fur la furface du cylindre les points L, N, O, P, G, par lefquels on tracera à la main l'ellipfe demandée. *Fig.* 176. & 178.

Si le point donné eft ailleurs qu'aux extrêmités du grand axe, la même conftruction fubfiftera, mais elle demande une préparation pour la pofition du cercle qui doit repréfenter la bafe du cylindre : on décrira fur le grand axe *g l* de l'ellipfe une demi-ellipfe, ou feulement le quart d'ellipfe où le point donné P fe trouve dont on connoît par la fuppofition l'arc P *g* ; puis ayant mené fur la furface du cylindre par ce point une ligne *r* P parallele à l'axe, on y portera la diftance *q u* iffûe de l'ordonnée P *u*, & par le point P on tracera un cercle fur la furface du cylindre, qui repréfentera celui de la bafe, & on continuera comme au cas précédent.

DEMONSTRATION.

Le grand axe de l'ellipfe doit toujours être dans le plan du parallelogramme par l'axe du cylindre, parce qu'il partage l'ellipfe en deux parties égales, comme ce parallelogramme partage le cylindre ; or le triangle *l a g* repréfente une partie du plan de ce parallelogramme, & le plan de l'ellipfe eft auffi perpendiculaire à celui de la fection par l'axe du cylindre, donc les diftances des points du contour de la bafe à ceux de l'ellipfe prife fur des paralleles à l'axe, font égales à celles des points correfpondans des diametres de l'un & de l'autre, comme font *q u*, *c* S, QR, puifqu'on peut fuppofer à chaque point *p*, *o*, *n* une fection perpendiculaire au plan *g a l*, fuivant les lignes *p q*, *o c*, *n* Q qui feront auffi des parallelogrammes, où les ordonnées de l'ellipfe *u* P & SO, RN feront des côtés paralleles, parce que les deux plans de la bafe & de l'ellipfe font perpendiculaires au troifiéme *g a l*, par conféquent (par la neuvieme du XI Liv. d'EUCL.) les lignes *p q* & *u* P feront égales entr'elles, de même que les diftances *q u* & *p* P, non dans cette Figure 178, mais à la furface du cylindre *Fig.* 176, ainfi des autres *c* S & *o* O, QPL & *l n* N, quoiqu'elles ne le foient

pas dans la Figure, où ces deux plans ne peuvent être repréſentés dans leur vraie ſituation l'un à l'égard de l'autre, parce qu'ils doivent être en l'air perpendiculairement au plan *g a l*; donc l'opération eſt exacte.

USAGE.

Ce Problême eſt d'un très-fréquent uſage dans la coupe des Pierres; car la plus grande partie des voutes ſont des berceaux ſouvent biais par tête, ou parce qu'ils ne ſont pas horiſontaux, comme les deſcentes, ou parce que le mur de face eſt en talud, ou parce que leur direction eſt oblique à ce mur par la contrainte des lieux; dans tous ces cas, on ſuppoſe une ſection perpendiculaire au berceau que l'on appelle *l'arc droit*, d'où on avance ſur des paralleles à l'axe du berceau les diſtances qui excédent l'arc droit pour former une face elliptique; ce que l'on verra pluſieurs fois au IV. Livre.

PROBLEME XXXV.

Un point étant donné à la ſurface du cone, qui ſoit à l'extrêmité du grand axe de l'ellipſe donnée, ou d'une ordonnée connue, tracer l'ellipſe ſur la ſurface courbe du cone.

Lorſqu'on a le grand axe d'une ellipſe, on a toujours ſa poſition dans le cylindre, en quelques points qu'on place ſes deux extrêmités, elle ſera toujours égale; il n'en eſt pas de même dans le cone: ſi le point de poſition n'eſt pas déterminé, l'ellipſe que l'on peut trouver avec un grand axe donné peut varier, en ce que ſon petit axe peut être plus ou moins grand, & ſelon qu'il ſera incliné à la baſe, l'ellipſe ſera plus ou moins différente du cercle de cette baſe; de ſorte qu'à moins qu'on n'ait le point de poſition de l'extrêmité du grand axe, il faut encore connoître le petit, ou une ordonnée, auquel cas on trouvera la ſituation

Fig. 181. du grand axe de l'ellipſe dans le triangle par l'axe du cone.

On commencera (*Fig.* 181) par chercher le parametre de l'axe donné EL & de l'ordonnée connue, comme nous l'avons dit au Problême XV, ce qui eſt facile; on inſcrira enſuite le triangle par l'axe du cone *b* S *a* dans un cercle S *a b*, puis on cherchera une quatrieme proportionelle à l'axe don-

né, à son parametre, & au côté S *a*, qui donnera sur S *a* la longueur *a* P; par le point P on menera PD parallele à *b a*, qui coupera le cercle au point D, par où & par le point S on tirera l'indéfinie SDF, sur laquelle portant la longueur de l'axe donné de S en K, on menera par le point K la ligne KL parallele à S *b*, & par le point L la ligne LE parallele à SK; cette ligne EL sera l'axe donné dans la position où il doit être pour que l'ellipse soit telle qu'on la demande à la surface du cone, dont *b* S *a* est la section du triangle par l'axe, auquel le plan coupant le cone doit être perpendiculaire. Cette préparation étant faite.

Soit (*Fig.* 183) le triangle par l'axe du cone BSA, l'axe de l'ellipse EL & l'axe du cone SC, du point C, milieu de la base BA, on décrira le demi-cercle BMA, & des points E & L extrêmités de l'axe de l'ellipse, ayant abaissé des lignes E *e*, L *l* perpendiculaires à BA, ou paralleles à l'axe SC; on divisera l'intervalle *e l* en deux également en *c*, on décrira de ce point, comme centre, & pour rayon *c e* le demi-cercle *e r s t l*, qui sera la projection de la moitié de l'ellipse proposée. *Fig.* 183.

On prendra ensuite sur le côté BE autant de parties égales que l'on voudra avoir de points à la circonférence de l'ellipse, par lesquelles on menera des paralleles à BA, comme 4 *f*, 3 *i*, 2 *d*, 1 *b*, *o* L jusqu'à la rencontre de l'axe EL, & par les points *f*, *i*, *d*, *b*, on abaissera des perpendiculaires à la base BA prolongées jusqu'au cercle *e s l*, comme *b u*, *d t*, *i s*, *f r* qui couperont sa circonférence aux points *r*, *s*, *t*, *u*, par lesquels & par le centre C on tirera les lignes C *r* 4^b, C *s* 3^b, C *t* 2^b, C *u* 1^b, qui donneront sur la base du cone les points 4^b, 3^b, 2^b, 1^b, par lesquels & par le sommet S on tirera des lignes droites sur la surface qu'on n'a pas marqué dans la Figure 183, mais bien dans la Figure 185, qui auroit dû être de grandeur égale à l'autre, si la place l'avoit permis; ces lignes serviront à trouver les points de la circonférence de l'ellipse, en portant les divisions correspondantes à leur origine, par exemple B 4 sur 4 S en 4 *r*, B 3 sur 3 S en 3 *s*, B 2 sur 2 S en 2 *t*, B 1, sur 1 S en 1 *u*, & l'on aura ainsi des points à la surface du cone, par lesquels menant une ligne courbe à la main, on aura l'ellipse proposée.

DÉMONSTRATION.

Fig. 181. Premierement, pour la position de l'axe EL, il faut démontrer qu'il doit être à son parametre comme aS est à aP.

Si l'on suppose un plan qui coupe le cone parallelement à la base, comme en mn, le cercle qu'il fera par cette section aura une ordonnée GI commune avec l'ellipse EIL, à l'intersection des deux plans du cercle & de l'ellipse; donc $\overline{GI}^2 = nG \times Gm$ & $LG \times GE : \overline{GI}^2 ::$ EL est à son parametre; or à cause des paralleles LE & SF, qui font les triangles semblables LGn, SFa, on aura $LG : Gn :: SF : Fa$, & $EG : Gm :: SF : Fb$, donc $\overline{SF}^2 : Fa \times Fb ::$ EL est à son parametre; or à cause du cercle $SDab$ * $FD \times DS = Fa \times Fb$, donc l'axe EL est à son parametre $:: \overline{SF}^2 : FD \times FS :: aS : SP$; *ce qu'il falloit démontrer.*

* Eucl. l. 3. p. 36.

Secondement, pour rendre raison de la maniere dont on a trouvé les points à la circonférence de l'ellipse.

Fig. 183. Il est clair par ce que nous avons dit de la projection au Theorême, que celle de l'ellipse EL est un cercle, ou sa moitié un demi-cercle esl, & que si l'on suppose des plans perpendiculaires à celui du triangle par l'axe BSA, & paralleles à cet axe SC du cone, leurs intersections avec le plan de l'ellipse se fera suivant les ordonnées qui sont égales dans l'ellipse & dans le cercle qui est sa projection, puisqu'elles sont communes aux deux sections, dont les points r, s, t, u, sont dans leur position horisontale, à l'égard du point C qui représente l'axe.

Il ne reste plus qu'à déterminer leur hauteur au-dessus de la base BA du cone, laquelle doit être trouvée sur des lignes à la surface qui passent par les points r, s, t', u, & par le sommet S, lesquelles sont représentées par la projection $Cr4^b$, $Cs3^b$, $Ct2^b$, $Cu1^b$, & parce qu'on ne peut pas avoir ces hauteurs verticalement, mais sur la surface inclinée du cone, il faut concevoir plusieurs plans paralleles à la base, & passans par les points f, o, i, d, b, dont les sections seront des cercles qui couperont les lignes tirées par les points de la base 4^b, M 3^b, 2^b, 1^b, en des points qui seront à la circonférence de l'ellipse, puisqu'ils coupent tous l'ellipse en deux points, & que les lignes 4^bS, 3^bS, 2^bS, 1^bS, la coupent aussi aux points des ordonnées marquées, donc chaque intersection des cercles & des lignes

gnes correſpondantes, qui tirent, de même que les cercles, leur origine des points *f, o, i, d, b*, ſera un des points de l'ellipſe; *ce qu'il falloit trouver.* Fig. 183.

Si le cone eſt droit, les diviſions E 4, 3 4, 3 2, ſont égales ſur tous les côtés tirés de la baſe du cone à ſon ſommet S; ainſi l'on peut ſans tracer les cercles porter ces intervalles ſur chaque côté du cone tiré des points correſpondans 4^b M 3^b, 2^b, 1^b, de la baſe au ſommet; puiſque les cercles paralleles les coupent tous en parties égales.

Si le cone eſt ſcalene les diviſions ne ſeront plus égales, mais ſeulement proportionelles, & alors on ne peut ſe diſpenſer de tracer les cercles pour avoir les points de leur interſection avec les différens côtés plus ou moins inclinés, ſuivant l'obliquité du cone.

USAGE.

Ce Problême eſt une introduction à la conſtruction des trompes coniques en talud, ou en ſurplomb, ou biaiſes, dont les faces ſont elliptiques.

PROBLEME XXXV.

Un point étant donné à la ſurface d'un cone pour ſommet d'une parabole, décrire cette courbe ſur la ſurface concave ou convexe.

Soit (*Fig.* 184) le triangle ASB, la ſection du cone donné par ſon axe SC & par le point donné P, tracé ſur une ſurface plane; on menera par ce point P une ligne P*a* parallele au côté SB, qui coupera la baſe du triangle en *a*. Du point C, milieu de cette baſe, pour centre, & pour rayon CA, on décrira un demi-cercle B*y*A qui repréſentera la moitié de la baſe du cone; enſuite ayant diviſé la ligne P*a*, qui repréſente l'axe de la parabole demandée, en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra avoir de points à ſa circonférence, comme auſſi aux points *q, r, s*, on menera par ces points des paralleles à AB, qui couperont l'axe du cone SC aux points *o*, 1^c, 2^c, *s*, & le côté SA aux points P *t u* V, deſquels on abaiſſera ſur BA des perpendiculaires qui la couperont aux points PT *u* V; & des points *q, r, s*, d'autres perpendiculaires ou paralleles à l'axe prolongées au-deſſous de BA. Enfin du point C comme centre & Fig. 184.

pour rayons les longueurs CT, C*u*, CV, on décrira des arcs de cercle concentriques TQ, *u* R, SV qui couperont les paralleles à l'axe SCS aux points Q, R, S a, la ligne courbe menée par ces points PQRS a dans le demi-cercle de la base du cone B*y* A sera la projection de la parabole demandée, par le moyen de laquelle on la tracera sur la surface concave ou convexe du cone, comme on va le dire.

Fig. 182. Soit (*Fig.* 182) le cone *b*S*a* égal à celui de la Fig. 184; ce qu'on n'a pû observer dans cette Planche faute de place, mais que l'on peut supposer; on menera du sommet S par le point P donné à la surface, une ligne droite SA sur laquelle ayant porté les distance S*t*, S*u*, SV, SA de la Figure 184 aux points 1, 2, 3, 4, on tracera par chacun de ces points un cercle par le Problême XXXI. sur lequel on portera de part & d'autre de la ligne SA l'arc de la projection qui est correspondant à cette division, par exemple l'arc TQ qui est le premier au-dessous du sommet P de 1 en Q, l'arc *u* R de 2 en R, & enfin l'arc VS de la Fig. 184, en 3 S de la Fig. 182, & par les points P, Q, R, S, *x*, ainsi trouvés d'un côté, & les équidistans de l'autre côté de la droite SA, on tracera à la main ou avec une regle pliante, mince & large, posée de cant, la parabole demandée; j'ai dit avec une regle mince & large, parce que cette courbe, quoique décrite sur une surface convexe ou concave, est plane dans son contour.

DÉMONSTRATION.

La raison de cette construction est facile à trouver pour peu qu'on fasse attention à la Figure 184: car premierement on coupe le cone en plusieurs tranches paralleles à la base, qui font autant de sections circulaires de rayons inégaux, qui sont transportés sur celui de la base CA par les perpendiculaires P*p*, *t*T, *uu*, VV; de sorte que le centre C qui représente, en un seul point de projection, tout l'axe SC, représente aussi tous les centres de ces sections répandus sur cet axe *o*, 1[c], 2[c] *s*, & toutes les paralleles à l'axe *q* 1 Q, *r* 2 R, *s* CS, *a* a, représentent des sections verticales des plans, qui coupent ces cercles perpendiculairement au triangle par l'axe BSA, & par les points d'intersection, où les diametres des cercles coupent l'axe de la parabole; par conséquent ils donnent les cordes de ces arcs cir-

culaires par l'interſection des deux plans perpendiculaires entr'eux, & du troiſieme P *a* qui forme la parabole par ſa ſection dans le cone, où ſe terminent les arcs des ſections circulaires.

Les longueurs des cordes des demi-arcs TQ, *u* R, VS, A *a* étant ainſi trouvées, il eſt clair qu'elles ont été bien transportées ſur le cone à la Figure 182, & dans leurs juſtes places; & par conſéquent que les points à la circonférence de la parabole ont été trouvés ſur la ſurface concave ou convexe du cone; *ce qu'il falloit faire.*

Il eſt auſſi clair par ce que nous avons dit ci-devant de la projection des ſections coniques, & par le Théorême III du I. Livre, que la courbe PQR a, tracée dans le plan de la baſe B *y* A, eſt encore une parabole, quoique différente de celle de la ſection propoſée P *a*.

Nous avons dit au Problême X à quoi ſert la deſcription de la parabole.

PROBLEME XXXVI.

Le premier axe d'une hyperbole, & un point qui ſoit une de ſes extrémités étant donné à la ſurface du cone, tracer cette courbe ſur la ſurface concave ou convexe.

Soit (*Fig.* 184) le triangle BSA la ſection par l'axe du cone; par le point donné H on prolongera indéfiniment le côté AS vers K, puis du point H pour centre & pour rayon la longueur du premier axe donné HK, on fera un arc qui coupera AS prolongé en K; ſi de ce point K par H on mene une ligne droite KY, on aura la poſition de l'axe de l'hyperbole dans le cone, laquelle étant donnée il n'y a qu'à faire ſa projection de la même maniere qu'on a fait celle de la parabole, ce que la Figure fait ſuffiſamment voir, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en répeter la conſtruction. On obſervera ſeulement, 1°. qu'elle eſt beaucoup abrégée, lorſque l'axe KH eſt parallele à l'axe du cone SC; parce que la projection *hy* eſt une ligne droite qui termine tout d'un coup tous les arcs 1 E, 2 C, 3 I. 2°. Que ſi l'axe HY panche vers S, la projection du contour aura ſa concavité tournée vers B, & au contraire ſi cet axe panche en-dehors. *Fig.* 184.

Nous avons dit au Problême XII, à quoi ſert la deſcription de l'hyperbole.

Corollaire général ſur la projection des ſections coniques.

Il ſuit de la méthode dont nous venons de faire uſage pour décrire les ſections coniques ſur le cone, qu'on peut auſſi très-commodément l'employer pour *décrire ſur un plan toute ſorte de ſection conique, le triangle par l'axe du cone, & un axe de la ſection étant donnés dans ce triangle.*

Car ſi au lieu de prendre les arcs de la projection des tranches paralleles qui donnent des cercles concentriques, terminés par la projection du plan qui forme la ſection, on prend les cordes de ces arcs rangées ſucceſſivement ſur un axe à angle droit, ce ſeront autant d'ordonnées, par l'extrêmité deſquelles on fera paſſer la courbe que l'on cherche.

Premier exemple pour l'ellipſe.

Fig. 183. Soit le triangle par l'axe du cone BSA (*Fig.* 183) dans lequel l'axe EL de l'ellipſe eſt donné; ayant diviſé cet axe en autant de points que l'on voudra *b, d, i, f*, on abaiſſera par ces points & par les extrêmités EL des perpendiculaires à la baſe BA, au-delà de laquelle on les prolongera en *r, s, t, u*; enſuite ſur *e l* comme diametre, ſi l'on fait un demi-cercle *e r s t u l*, il coupera toutes ces paralleles aux points *r, s, t, u*, qui déterminent la longueur des ordonnées qui conviennent à l'ellipſe aux points *b, d, i, f*; ainſi ayant élevé des perpendiculaires à cet axe ſur ces diviſions, on portera les longueurs des ordonnées au cercle qui eſt la projection de l'ellipſe ſur ces perpendiculaires; ſçavoir, R *r* ſur *f g*, D *s* ſur *i h*, F *t* ſur *d i*, G *u* ſur *b* K, & l'on aura les points E, *g, h, i*, K, L, par leſquels on tracera la demie-ellipſe à la main, ou avec une regle pliante.

Second exemple pour la parabole.

Fig. 184. Soit le triangle par l'axe du cone BSA (*Fig.* 184) & l'axe de la parabole P a donné dans ce triangle, ayant diviſé cet axe par pluſieurs plans paralleles à la baſe BA, & paſſant par les points pris à volonté *q, r, s*, on fera la projection des cercles qu'ils font dans le cone, & la projection de la parabole a RQ*p*, comme nous l'avons dit ci-devant; par les paralleles *a* a, *s* S, R *r*, Q *q*, P *p*, on fera des perpendiculaires ſur P *a* aux points *q, r, s*, ou,

pour éviter la confusion des lignes, sur une parallele P^2 A, & l'on portera sur ces perpendiculaires les sinus des arcs QT, R*u*, SV; sçavoir *a* a, S *3*, R 2, Q 1, lesquels seront rangés successivement aux points correspondans de l'axe de la parabole, comme 1 Q en *q* Q^2, 2 R en *r* R^2, *3* S en *s* S^2, & *a* a en A a^2, & l'on aura les points Q^2, R^2, S^2, a^2, par lesquels on tracera la parabole à la main ou avec une regle pliante. *Fig.* 177.

Troisieme exemple pour l'hyperbole.

Soit (*Fig.* 184) le triangle par l'axe du cone BSA, & l'axe de l'hyperbole donné HY dans ce triangle; ayant divisé cet axe en autant de parties qu'on voudra par des plans qui coupent le cone parallelement à sa base, en *f*, *g*, *i*, & ayant fait la projection des arcs de cercle qui passent par les points *e*, *d*, *i*, par le moyen des paralleles à l'axe SC; on tirera autant de perpendiculaires à l'axe HY donné ou à quelqu'autre égal, & également divisé comme *h*B, sur lesquelles on portera les sinus des demi-arcs de la projection, 1 E, 2 D, *3* I, B *y* correspondans à chaque division; c'est-à-dire, les perpendiculaires sur B *h* tirées des points F, G, I, B qu'on transportera en F f^2, G g^2, I i^2, B y^2, & par les points *h*, f^2, g^2, i^2, y^2, on tracera à la main une courbe qui sera l'hyperbole que l'on cherche.

La démonstration de ces pratiques est la même que celle que nous avons donnée de la description de ces courbes, sur des surfaces concaves ou convexes; en effet il n'y a rien de changé, excepté qu'au lieu de prendre les arcs de la projection pour les porter de part & d'autre d'un côté du cone, sur des cercles paralleles à la base, ici l'on prend les demi-cordes de ces mêmes arcs sur des lignes paralleles à cette base sur un plan.

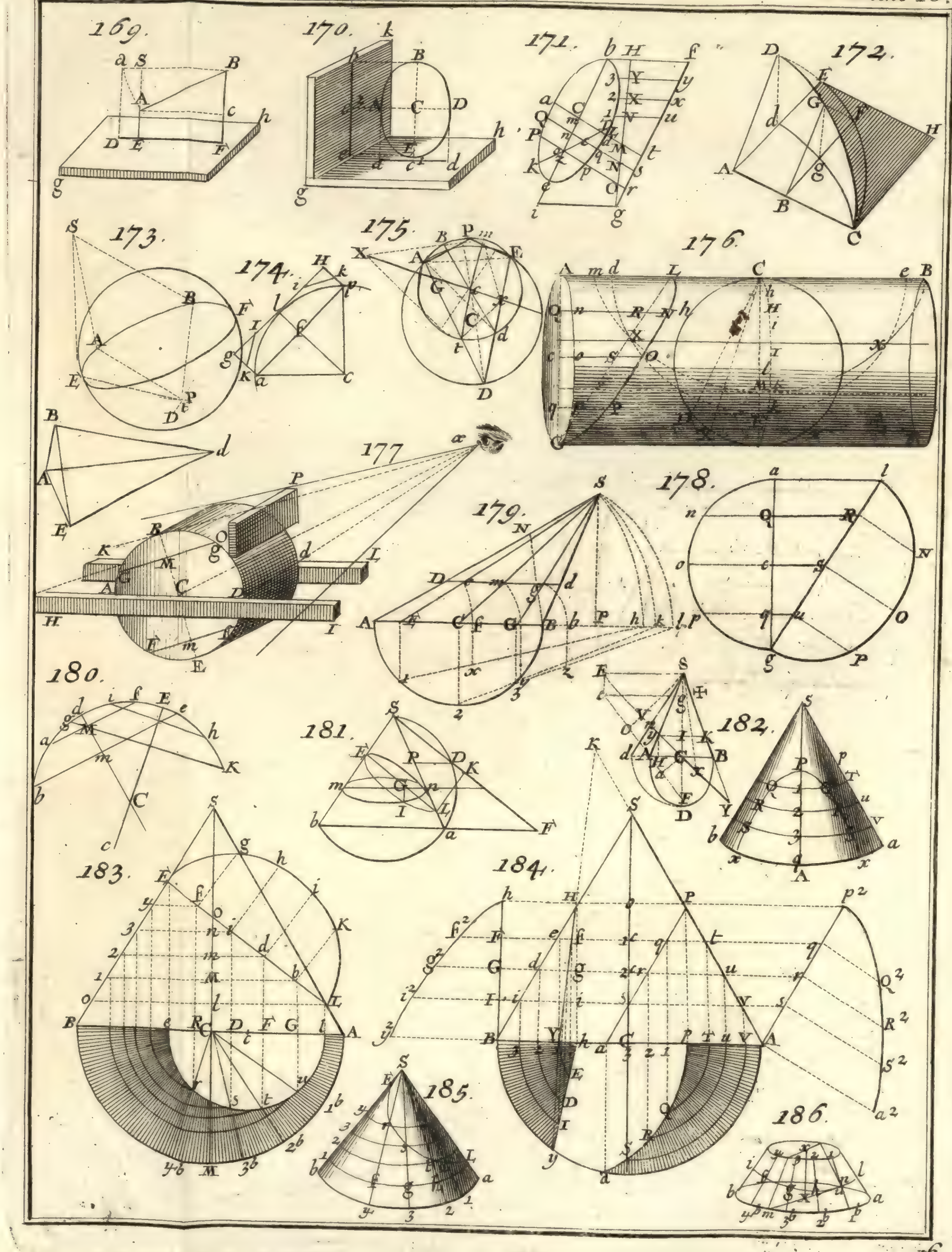
Remarque sur cet usage.

On peut toujours se servir de la méthode de la projection dans l'Architecture pour la coupe des pierres, parce que les cones sont ordinairement donnés, de même que les axes des sections dans ces cones, & parce qu'on est toujours obligé de faire des *plans* & des profils; on a aussi la projection des divisions de ces cones par les tranches qui sont ordinairement les rangs des pierres; il ne s'agit que d'y reconnoître les cordes qui sont

les ordonnées & abſciſſes, leſquelles ſont toûjours égales ſur le côté du cone & ſur l'axe de la parabole, & dans les autres ſections où elles ſont inégales ſur le côté du cone & ſur l'axe, elles ſont toujours en même raiſon avec celles de l'axe, parce que l'un & l'autre ſont diviſés par des paralleles à la baſe du cone. Comme cette pratique de projection eſt d'une très-grande importance pour former ce deſſein que les Architectes appellent *l'épure*, nous l'expliquerons plus au long au Livre ſuivant.

Si l'on a bien compris la maniere de tracer les ſections coniques par ce moyen, il ne ſera pas difficile de concevoir qu'il eſt applicable à toutes les autres courbes qui peuvent ſe former ſur des corps réguliers & même irréguliers, comme on va l'expliquer ci-après.





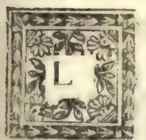
TROISIEME PARTIE DU SECOND LIVRE.

CHAPITRE VII.

Des sections qui ne peuvent être décrites que sur des surfaces courbes, & par le moyen de la projection sur des surfaces planes.

PROBLEME GÉNÉRAL.

Trouver tant de points que l'on voudra du contour des courbes faites à la Surface des spheres, cones & cylindres qui se pénetrent mutuellement.



ORSQU'IL s'agit de décrire des courbes qui sont dans une surface plane, on trouve les points de leur contour par le rapport des ordonnées aux abscisses de leurs axes ou de leurs co-ordonnées ; mais pour celles qui ne sont pas dans un plan, ce rapport ne suffit pas, parce que leurs axes ou diametres n'étant pas des lignes droites, les abscisses ne sont pas droites ; ce sont des courbes ausquelles il faut mener d'autres ordonnées à une ligne droite, qui est comme leur sous-tendante, pour en trouver la courbure par différentes distances de la corde à l'arc ; de sorte que le rapport de deux lignes connues ne peut suffire, puisque de quelque façon qu'un plan coupe la sphere, le cone, ou le cylindre, il ne produira qu'une section conique ou un parallelogramme ; & si l'on suppose un second plan perpendiculaire ou incliné à ce premier, leur commune section sera bien une droite, dans laquelle il doit se trouver un point de la section solide, mais cette ligne n'en détermine pas la position, il faut avoir recours à un

troisieme plan qui coupe les deux premiers dans certaines circonstances, pour déterminer ce point sur la ligne où l'on sçait qu'il doit être; tels sont les points du contour de ces courbes à double courbure, que j'appelle ici des sections *solides*, parce qu'elles proviennent de la section d'un solide coupé ou pénetré par un autre solide, & non pas par un plan, comme les sections coniques.

Dans le nombre des trois plans qu'il faut supposer pour trouver les points de ces courbes, il y en a toujours un donné, qui fait une section conique, dont l'axe est la sous-tendante de la courbe à double courbure, que nous pouvons appeller *imbriquée*, parce qu'elle est faite en contour de tuile creuse, ou qui est tangent à un des sommets de cette courbe, pour les distinguer des autres courbes à double courbure qui ont plus d'une infléxion.

Le second plan doit être parallele au premier, pour y trouver les ordonnées à l'axe courbe de la section solide, & les comparer à celles de la section conique qui leur correspondent.

Enfin le troisieme plan doit couper les deux précédens par les ordonnées de la section conique & de la solide *imbriquée*, pour en trouver les distances, ou par des perpendiculaires, ou par des lignes inclinées d'une inclinaison connue.

Si l'on entend bien ce principe, on verra que tous les Problêmes proposés à résoudre, n'en sont qu'une application, suivant la différence des cas.

On reconnoîtra aussi que cette méthode, toute simple qu'elle est, est très-Géométrique, & la clef de tous les traits des enfourchemens des voutes, qui font presque toute la difficulté de l'art de la coupe des pierres.

Il ne s'agit donc, 1°. que de couper les solides qui se pénetrent par des plans paralleles entr'eux, comme par tranches, qui font toujours des sections semblables dans chaque corps, mais différentes de l'un à l'autre.

Secondement, de reconoître dans chacune de ces tranches la partie commune aux deux corps : car si l'on trace sur un plan les deux sections différentes dans leur distance respective, on verra qu'elles se coupent en deux points de leur contour, qui sont communs aux deux surfaces de ces corps.

Troisiemement, de suivre, je veux dire lier par des traits les points communs aux deux surfaces, passant de l'un à l'autre sur les

les ſurfaces courbes, même pour avoir la courbe naturelle, ou ſur une ſurface plane, pour en avoir l'imitation produite par la projection, comme nous l'avons expliqué ci-devant.

Or puiſque ſuivant la Géométrie de l'infini, on peut conſidérer les ſolides comme compoſés d'une infinité de tranches paralleles infiniment minces, dans leſquelles les ordonnées & les abſciſſes des ſections planes, augmentent ou diminuent dans un rapport connu; on peut déterminer une infinité de points au contour des courbes à double courbure, qui ne ſont pas applicables ſur une ſurface plane, ou les applatir pour ainſi dire, en les réduiſant par la projection à des courbes planes, ſans y faire d'autre changement, que d'en ſupprimer la troiſieme dimention; ce qui eſt néceſſaire pour y parvenir par gradation, comme l'on fera dans tous les Problêmes ſuivans.

On peut rendre la méthode de trouver pluſieurs points des courbes à double courbure plus ou moins aiſée, ſuivant la ſituation que l'on donne aux plans qui coupent les corps en tranches paralleles; lorſque les axes des cones & des cylindres qui ſe pénetrent, ſont paralleles entr'eux, la ſituation la plus commode des tranches, eſt d'être perpendiculaires à ces axes, parce qu'alors les points communs ne ſont que les interſections de différens cercles: ſi les axes de ces corps ſe coupent à angle droit, la ſituation des tranches doit être parallelele à l'un des deux pour avoir un cercle & un parallelogramme, ou une hyperbole & un cercle, ou obliquement pour avoir deux ellipſes qui ſe coupent; tout cela deviendra plus ſenſible par les exemples des Problêmes ſuivans.

Du Cicloïmbre.

PROBLEME XXXVII.

Tracer un cicloïmbre ſur deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent à angle droit.

SOIT (*Fig.* 187) le cylindre OL a *b* pénetré par un plus petit T *t* *u* V, c'eſt-à-dire d'un plus petit diametre, dont l'axe *x* X tombe perpendiculairement ſur celui du grand C *c*: il faut tracer la courbe qui ſe fait à l'interſection des deux ſurfa- PL. 17. *Fig.* 187.

Pl. 17. Fig. 187. ces sur l'un ou l'autre de ces deux cylindres. Pour y parvenir, il faut commencer par faire la préparation suivante.

Ayant fait à part sur un plan un quart de cercle CAB, dont le rayon CA soit égal à celui du gros cylindre; sur le rayon CB prolongé, & du point B pour centre, on décrira un autre quart de cercle DEB, dont le rayon DB sera égal à celui du petit cylindre, & parallele à AC; on divisera l'arc DE en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple, en quatre, aux points 1, 2, 3, par lesquels on menera hors du quart de cercle DE, des paralleles à AC, & d'autres paralleles à CE comme 1 *i*, 2 *h*, 3 *g*, D*d*, jusqu'à la rencontre de l'arc A*d*B en *d*, *g*, *h*, *i*, par où on menera d'autres paralleles à AC indéfinies. Sur DB prolongée, on prendra *o b* pour une partie du côté du gros cylindre, & plus grande que le diametre du petit, on la divisera en deux également au point *m*, duquel on portera de part & d'autre les distances DI, DH, DG, DF en *mt*, *m* 1, *m* 2, *m* 3, & par tous ces points *m*, 3, 2, 1, *t*, on tirera des perpendiculaires à *o b*, sur chacune desquelles on portera successivement & dans l'ordre des divisions correspondantes de part & d'autre du point *m*, les divisions du rayon CB ou leurs égales, qui sont les distances de la tangente DB à l'arc A*d*B; sçavoir, D*d* en *m*F, 6*g* en 3*q*, 5*h* en 2*r*, 4*i* en 1*s*, & de même de l'autre côté de *m*, tirant vers le point *u*, & l'on aura la projection d'une moitié de la courbe solide, qui se fait par l'intersection des surfaces des deux cylindres, laquelle projection n'est pas absolument nécessaire, mais très-utile pour se conduire dans la description de la courbe sur les surfaces convexes ou concaves des cylindres, comme on le verra au IVe. Livre.

Cette préparation étant faite, si l'on veut décrire le cicloïmbre, 1°. *sur le grand cylindre.*

Ayant tracé une parallele à son axe, comme *o b*, on portera les distance *m* 3, *m* 2, *m* 1, *mt* d'un côté d'un point *m* pris à volonté, & autant de l'autre vers *u*, & par les points *m*, 3, 2, 1, *t*, &c. on tracera autant de cercles paralleles eutr'eux, & perpendiculaires au côté *o b*, sur lesquels on portera suivant l'ordre des divisions correspondantes de l'arc AB, de part & d'audre du point *m*, les arcs de cercle B*d* sur le cercle représenté ici par la ligne droite *m*F, B*g* sur l'arc 3*q*, B*h* sur 2*r*, & B*i* sur 1*s*; ce que l'on voit plus distinctement dans la Figure 188, où ces arcs sont dessinés en perspective avec des lettres sembla-

bles à celles de la Figure 187 ſur l'arc A*d*B repréſenté par l'arc a K B repréſenté par l'arc a K B, B*g* par *b* G, B *h* par *b* H, & B *i* par l'arc *b* I; ce qui donnera ſur les arcs de cercles paralleles, tracés ſur le gros cylindre, les points K, G, H, I, *t*, par leſquels on tracera à la main une courbe qui ſera le cicloïmbre propoſé ; on en fera de même pour les autres quarts de cette courbe qui ſont tous égaux entr'eux, & au quart qui en paroît dans la Figure 188. *Fig.* 187. & 188.

Il faut remarquer que la courbe *t*F*u*, qu'on a tracée dans la Figure 187, eſt celle de l'axe courbe du cicloïmbre, repréſenté dans la Figure 188, par la ligne courbe *t* Y, qui paſſe par le milieu des cordes de tous les arcs retranchés du gros cylindre.

Secondement, ſi l'on veut tracer le cicloimbre *ſur le petit cylindre*, on décrira ſur la ſurface un cercle dont la projection (*Fig.* 187) eſt la ligne droite *t m u*, & ayant diviſé ſa circonférence en parties égales à celles de l'arc DE, du quart de cercle DEB; on menera par les points de cette diviſion autant de paralleles à ſon axe, leſquelles ſeront perpendiculaires au cercle, ſi le cylindre eſt droit, comme nous le ſuppoſons, & ſur chacune de ces paralleles repréſentées (*Fig.* 188) par les lignes *k*K, *g*G, *h*H, *i*I, T *t*, on portera les longueurs D *d*, 6 *g*, 5 *h*, 4 *i*, de la Figure 187, ſuivant leur ordre, & depuis le cercle tracé *t m u*, qui eſt leur terme commun, leſquelles longueurs rapportées quatre fois de ſuite, donneront les points par où paſſe le cicloïmbre ſur le petit cylindre, par leſquels on tracera la courbe à la main; *ce qu'il falloit faire.*

DÉMONSTRATION.

La raiſon de cette opération ſe déduit facilement de notre Problême général ; car ſi l'on ſuppoſe le grand cylindre coupé par pluſieurs tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à ſon axe, ces tranches ſeront toutes renfermées entre deux cercles ; mais le même plan qui coupe chaque tranche du grand, étant auſſi ſuppoſé couper le petit cylindre parallelement à ſon axe, fera des tranches compriſes entre deux parallelogrammes inégaux, dont l'un ſera plus large que l'autre; de ſorte qu'on a une ſuite de cercles égaux coupés par des parallelogrammes

Fig. 187. & 188. inégaux, dont les rapports des côtés sont exprimés par les lignes tangentes BD, B 6, B 5, B 4, par lesquelles les autres côtés qui traversent ceux-ci à angle droit, sont exprimés par les lignes D *d*, 6 *g*, 5 *h*, 4 *i*, dont les plus éloignés du point B qui est sur l'axe du petit cylindre, sont coupés plus loin de la tangente DB par l'arc A *d*B, suivant l ordre des sinus verses des arcs B *d*, B*g*, B *h*, B *i*, comme nous l'avons dit au Théorême XVIII ; *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême est la base de la pratique des traits de la coupe des Pierres où il s'agit de trouver les arrêtes des enfourchemens des berceaux inégaux qui se croisent à angle droit, dont nous avons fait un petit détail à l'application du Théorême cité.

On peut même y comprendre ceux qui se croisent obliquement, dont la différence du trait n'est qu'une modification de cette pratique, comme on le va voir au Problême suivant.

PROBLEME XXXVIII.

Tracer une ellipsimbre formée par la section d'une sphere pénetrée par un cylindre dont l'axe ne passe pas par le centre de la sphere.

Fig. 189.

Soit (*Fig.* 189) une sphere ou une portion de sphere ARB*t*, dont le centre est C, pénetrée par un cylindre DEFG, qui entre dans la sphere de tout son contour; on la divisera, suivant le Problême général, par tranches paralleles entr'elles & perpendiculaires à l'axe du cylindre, par des lignes droites 1 *r*, 2 *s*, 3 *t*, qui représenteront les plans coupans ces deux corps, lesquels feront toujours pour sections deux cercles, dont on aura les rayons sur ces lignes, si on les considere comme les intersections d'un plan passant par l'axe du cylindre, & de ces plans qui lui sont perpendiculaires. On prendra donc le rayon du cylindre DX, & des points *f*, *e*, *d*, intersections de l'axe X*x* du cylindre, & des perpendiculaires à cet axe 1 *f*, 2 *e*, 3 *d* prises à volonté, & en aussi grand nombre que l'on voudra avoir de points pour centres, on décrira des arcs ou des demi-cercles

140, 25p, 36q, & des points *h*, *g*, *i* pour centres, pris au milieu des cordes de la ſphere R*r*, S*s*, T*t*, on décrira d'autres demi-cercles, qui couperont les précédens aux points 4, 5, 6, par leſquels on abaiſſera des perpendiculaires ſur les lignes 1*r*, 2*s*, 3*t*, qui les couperont aux points *n*, *m*, *l*, leſquels donneront la projection des points de la courbe à double courbure, que j'appelle ellipſimbre, par leſquels on tracera la ligne A, *l*, *m*, *n*, B, qui ſera ſon axe courbe. Pl. 17. Fig. 185.

Cette préparation étant faite, 1°. ſi l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur le cylindre; après avoir tracé une parallele à ſon axe, par exemple AD, on portera ſur cette ligne les intervalles des diviſions qui ont été priſes à volonté A3, A2, A1, par leſquels on tracera autant de cercles paralleles entr'eux & perpendiculaires à l'axe du cylindre, que nous ſuppoſons droit; enſuite on portera de part & d'autre de la ligne AD tracée à la ſurface du cylindre, les arcs des cercles déterminés par l'interſection de ceux de la ſphere; ſçavoir, l'arc 14 ſur le premier cercle, l'arc 25 ſur le ſecond, & 36 ſur le troiſieme, & par les points A, 6, 5, 4, B, on tracera à la main une moitié de l'ellipſimbre, & l'autre de l'autre côté également, ce que la Figure 189 ne peut exprimer, parce que les demi-cercles 14*o*; 25*p*; 36*q* doivent être relevés en l'air par l'imagination perpendiculairement au plan de la ſection par l'axe du cylindre, & qu'ils ne repréſentent encore qu'une moitié de la courbe, l'autre étant de l'autre côté de la ligne AD ſur le cylindre.

Secondement, ſi l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur la ſurface de la ſphere; au lieu de la ligne AD que nous avons priſe pour milieu des arcs, dont la Figure nous donne les moitiés, on tracera ſur la ſphere un cercle majeur * paſſant par les points A & B, ſur lequel on portera les intervalles des diviſions faites par les paralleles 1*r*, 2*s*, 3*t* qui ſont les arcs AT, AS, AR, AB, par leſquels on décrira autant de cercles paralleles entr'eux & perpendiculaires au majeur, & l'on portera de part & d'autre de ce cercle majeur les arcs des cercles mineurs déterminés par l'interſection des demi-cercles du cylindre, qui ſont dans les plans correſpondans. Ainſi l'on portera ſur le premier l'arc R4, ſur le ſecond l'arc S5, ſur le troiſieme l'arc T6, & l'on aura ſur la ſurface de la ſphere les points A, 6, 5, 4, B, par leſquels on tracera à la main une courbe qui ſera l'ellipſimbre propoſée :

* Prob. XXIX.

Fig. 189. on en fera autant de l'autre côté de l'arc ARB, ſur la ſurface de la ſphere, pour l'autre moitié de l'ellipſimbre.

On peut encore tracer cetre courbe ſur le cylindre & ſur la ſphere d'une autre maniere.

Premierement, ſur le cylindre, on peut tracer une ellipſe par les points A & B (par le Probl. XXXV) & ayant pris ſur cette ellipſe les arcs correſpondans aux parties de l'axe A*z*, AY, de la projection, on fera paſſer par les points *z* & Y des paralleles l'axe du cylindre, ſur leſquelles on portera les longueurs *z l*, Y*m* de la projection, leſquelles donneront les points *l*, *m* & *n* qui ſeront à la circonférence de l'ellipſimbre; mais cette maniere eſt plus longue. On traceroit de même ſur la ſphere un cercle majeur AB, d'où, comme terme, on porteroit les arcs correſpondans aux longueurs *lz*, *m*Y, pour avoir les points *l*, *m* & *n*; mais cette maniere, qui feroit plus longue, feroit moins correcte dans l'exécution : on ne la propoſe ici que comme une idée des différens moyens qu'on peut employer pour parvenit à la même fin.

DÉMONSTRATION.

La raiſon de la premiere conſtruction eſt toujours fondée ſur le Théorême général de la diviſion des corps en tranches paralleles, par le moyen deſquelles on a pluſieurs interſections des cercles inégaux de la ſphere & du cylindre, dans leſquelles ſont les points de la rencontre des deux ſurfaces, & par conſéquent de l'ellipſimbre, car quoique l'on ait tracé ces différens cercles ſur le plan de la Figure, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre, il faut les redreſſer par l'imagination perpendiculairement à ce plan; ce qui ne change rien à leur diſtance relative au plan tangent ſuppoſé ſur la ligne AD du cylindre, puiſque les lignes 4*n*, 5 *m*, 6 *l* lui ſont paralleles, comme elles le ſont auſſi à l'axe de la ſphere CP : & puiſque la courbe doit toujours avoir des points communs aux deux ſurfaces, il ſuit qu'elle paſſera par les interſections des courbes formées par le plan qui coupe les deux corps; *ce qu'il falloit trouver.*

On parviendra auſſi à la même deſcription, ſi au lieu de faire les tranches perpendiculaires à l'axe du cylindre, on les lui fait paralleles; alors les points de la courbe ſe trouveront à l'interſection des cercles de la ſphere & des parallelogrammes du cy-

lindre : c'est toûjours le même principe différemment appliqué.

Si le cylindre n'étoit pas droit mais scalene, il arriveroit du changement pour les Figures des sections; car supposant les tranches perpendiculaires à son axe, elles seroient circulaires dans la sphere & elliptiques dans le cylindre, & elles n'y seroient circulaires que lorsque les tranches seroient obliques à l'axe & paralleleles à la base, ou bien faisant une section souscontraire ; ce qu'il est aisé de se représenter & de concevoir sans le secours d'une Figure : cependant pour aider l'imagination, on peut s'exercer sur une boule & un cylindre en relief coupé, c'est-à-dire taillé, avec de la craye, ou autre matiere tendre.

L'usage de ce Problême est indiqué au Théorême X pour les enfourchemens des lunettes pratiquées dans une voute sphérique.

PROBLEME XXXIX.

Les diametres des deux cylindres inégaux qui se pénetrent, & l'inclinaison de leurs axes qui se rencontrent étant dcnnés, tracer l'ellipsimbre formée par la rencontre de leurs surfaces.

La construction de ce Problême est si semblable à celle du pénultieme, que la seule inspection de la Figure 190, en fera voir la différence, qui ne consiste que dans la préparation, où au lieu de deux quarts de cercles, il faut faire deux quarts d'ellipses : au lieu de les placer à angle droit sur le côté du grand cylindre, il faut donner à leurs axes l'inclinaison qu'ils doivent avoir sur ce côté.

Soit cependant pour une plus ample explication (*Fig.* 190) la moitié du grand cylindre QB pénetré par un plus petit T *m*, dont l'axe X *x* fait avec l'axe *c* C du grand, l'angle X *x c*; on prendra la ligne *h x* pour moitié du grand axe d'une ellipse, & le rayon *e* C du demi-diametre du grand cylindre pour moitié du petit axe, on décrira sur un plan à part le quart d'ellipse NDE, dont le centre sera C; ensuite ayant prolongé la moitié du grand axe CN jusqu'en M, ensorte que NM soit égale à *h m*, prise pour moitié du grand axe d'un autre quart d'ellipse, on prendra pour moitié du petit axe la ligne NH égale au demi-diametre de la base TV du petit cylindre, & l'on décrira le quart d'ellipse H 2 1 M; ensuite ayant tiré par H la ligne DL parallele à CM, on divisera le quart d'ellipse HM en autant *Fig.* 190.

Fig. 190. de parties égales qu'on voudra, par exemple, ici en trois aux points 2 & 1, par lesquelles on menera 1 G, 2 F, paralleles à CM, & ML, 1 K, 2 I, paralleles à HN. Cette préparation étant faite, on divisera la circonférence du petit cylindre T *m* en quatre, & le quart en autant de parties égales que celui de l'ellipse HM, par exemple ici en douze, puisque le quart HM est divisé en trois. 1°. Si l'on veut avoir la projection de cette division sur la ligne A *m*, on fera *h i* = HI, *h k* = HK, & *h m* = HL, ou NM : ensuite on menera par ces points *h*, *i*, *k*, des paralleles à l'axe X *x* du petit cylindre, prolongées au-delà des points *h*, *i*, *k*, sur lesquelles on portera les distances de la tangente HN au quart d'ellipse EDN; sçavoir, HD en *h d*, *p* F en *pf* & *if*, *o* G en *og* & K*g*, & par les points *t*, *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, *m*, on tracera la courbe qui représente l'axe courbé de l'ellipsimbre, ou la projection de son contour.

2°. Présentement si l'on veut tracer l'ellipsimbre sur le petit cylindre *t m*, on tracera une ellipse sur la surface, dont la circonférence coupera les paralleles R*g*, S*f*, L *d*, &c. aux points *o*, *p*, *h*, *i*, *k*, de chacun desquels, comme d'un terme, on portera les distances HD en *hd*, *p* F en *if* & *pf*, *o* G en *og* & en *kg*, & ainsi de même de l'autre côté du cylindre, & par les points trouvés sur les paralleles à l'axe du cylindre, on tracera à la main la courbe qui sera l'ellipsimbre proposée.

3°. Si l'on veut tracer cette courbe sur le grand cylindre QB, ayant tracé une ligne AB parallele à son axe C*c*, on prendra à volonté un point *h* pour celui du milieu, de la section duquel on portera de part & d'autre les distances HI, HK, HL, pour avoir sur cette ligne A*m* les points *o*, *p*, *h*, *i*, *k*, par lesquels on tracera, par le Problême XXXV, autant d'ellipses paralleles entr'elles, suivant l'inclinaison donnée A*hd*; ensuite on portera de part & d'autre de la ligne A *m* sur chacune de ces ellipses, les arcs correspondans du quart d'ellipse EDN; sçavoir, ND sur *hd*, NF sur *pf* & *if*, NG sur *og* & *kg*, & par les points *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, qui terminent les arcs des ellipses tracées sur le cylindre, on fera passer une ligne courbe de chaque côté de la ligne A *m*, qui sera l'ellipsimbre proposé.

DEMONSTRATION.

La raison de cette construction est toujours déduite du même Problême

Problême général que les précédentes. On coupe les deux corps par tranches paralleles, qui sont dans le petit cylindre des parallelogrammes, parce que les plans coupans sont paralleles à son axe, & dans le grand cylindre les sections des mêmes plans sont des ellipses. Or parce que toutes ces ellipses sont égales, elles sont représentées par le quart d'ellipse EDN, qui a été fait dans la préparation; & parce que tous les parallelogrammes sont inégaux, on a exprimé la moitié de leurs côtés par les lignes HI, HK, HL qui sont les distances des points 1, 2, H, par lesquels passent les plans qui coupent le petit cylindre; car si l'on releve, par la pensée, le quart d'ellipse H 2, 1 M à angle aigu sur le plan de l'ellipse EDN, ensorte que les demi-axes CN & NM fassent un angle égal à l'angle *x h m*, c'est-à-dire, dans la Figure, que NM soit posée sur NA; il est clair que la projection de la ligne HN se réduira à un point N, placé au milieu du petit cylindre, comme est le point *h*, la projection du point 2 se fera sur NA à une distance égale à HI qui est, par la construction, *hi* pour un côté, & *hp* pour l'autre, & tout le quart d'ellipse M 1 2 H sera dans un plan tangent au grand cylindre QB, suivant la ligne *h m*, partie de son côté A*m*, & les intervalles des divisions H, 2, 1, M à l'ellipse qui est la section du même plan dans le cylindre, seront exprimés par les lignes HD, *p* F, *o* G, qui sont perpendiculaires à la tangente HN, & paralleles à l'axe NC. Ces distances sont entr'elles comme les sinus verses, ou les fleches du double des arcs DN, FN, GN, lesquelles sont aussi entr'elles comme les sinus verses des arcs de cercle correspondans à la base du cylindre, comme nous l'avons démontré ailleurs; ce que nous avons représenté à la Figure 191, qui est la vûe de la précédente par le bout du gros cylindre, comme il sera facile de le reconnoître par les mêmes Lettres placées aux points correspondans, mais doubles, parce qu'elle fait voir les deux côtés, & par conséquent les parallelogrammes des sections du petit cylindre. Mais, par la construction, les longueurs de ces fleches, ou ce qui est la même chose, des longueurs qui leur sont égales, ont été portées de *h* en *d*, de *i* en *f*, &c. donc la courbe *t d m* est l'axe courbe de l'ellipsimbre, & marque sa profondeur dans le cylindre QB; & parce que l'on a porté les intervalles des arcs de l'ellipse DE, qui est égale à toutes les autres sections paralleles sur chacune

Fig. 190.

Fig. 191.

des sections correspondantes, on aura la rencontre des parallelogrammes du petit cylindre avec les ellipses du grand, où sont les points communs à leurs deux surfaces; donc ils sont à la circonférence de l'ellipsimbre, & cette courbe passera par tous ceux qui ont été ainsi déterminés; *ce qu'il falloit faire.*

L'usage de ce Problême a été indiqué au Théorême XIX; il sert pour les enfourchemens des berceaux, ou parties de berceaux surhaussés ou surbaissés, ou qui sont biais, c'est-à-dire, inclinés entr'eux, supposant que leurs axes se rencontrent.

PROBLEME XL.

Les diametres de deux cylindres qui se pénetrent de toute leur circonférence, sans que leurs axes se rencontrent, & l'inclinaison de leurs côtés entr'eux étant donnés, tracer l'ellipsimbre formée par la rencontre de leurs surfaces.

La Figure 192 est faite pour mettre sous les yeux la différence de ce Problême avec le précédent, qui ne consiste qu'en ce que les axes des cylindres ne se rencontrent pas, & la Figure 193 pour la construction.

On peut distinguer deux cas dans cette proposition; le premier, lorsque le petit cylindre tombe perpendiculairement sur le côté du grand, c'est-à-dire, sur des lignes paralleles à son axe; le second, lorsque les lignes paralleles à l'axe du petit cylindre tombent obliquement sur celles qui sont aussi paralleles à l'axe du grand cylindre. Si leurs côtés sont perpendiculaires entr'eux, on fera pour la préparation des quarts de cercles ou demi-cercles égaux à leurs bases, comme on a fait au Problême XXXVII pour le cicloïmbre; & si leurs côtés sont obliques, on fera pour la préparation des demie-ellipses & quarts d'ellipses, comme à la Figure 193.

Fig. 193. & 194. Soit E a *b* D un quart d'ellipse de la section oblique d'un plan coupant le cylindre DEGF, parallelement à l'axe du petit cylindre qui pénetre le grand, comme on voit à la Figure 192; soit aussi KH*b* la moitié de l'ellipse faite dans le petit cylindre par la section d'un plan tangent au grand; on divisera à volonté sa circonférence aux points 1, 2, 3, 4, & par ces divisions on menera des paralleles à l'axe H*x*, qui coupe le quart d'ellipse du grand cylindre en *m* & *x*, plus ou moins loin

du centre C, par où paſſe l'axe du grand cylindre; ſuppoſant que la poſition du petit cylindre dans le grand eſt donnée en a*b* GF, ces lignes 1 O, 2 N, *m* M, 3 *n*, 4 *o*, étant prolongées vers le quart d'ellipſe E a *b* D, le rencontreront aux points 1, 2, *m*, 3, 4; on menera auſſi par le point H la ligne H *d*, parallele au diametre K *b*, de même que 3 *e* & 4 *f*, qui rencontrent le côté du cylindre G *b* prolongé en *d* aux points *e* & *f*, cette préparation étant faite. *Fig.* 193. & 194.

Pour décrire l'ellipſimbre ſur la ſurface du grand cylindre DEGF, on commencera par tirer une ligne *d d* parallele à ſon axe par le Problême XXX, ſur laquelle ayant pris le point M pour le milieu de la ſection, on prendra de part & d'autre de ce point ſur la ligne *d d*, les diſtances *b f* de la Figure 193 de la préparation, que l'on portera en M *f*; *b e* que l'on portera en M *e*, & *b d* que l'on portera en M *d*, auſſi de part & d'autre du point M : enſuite on fera paſſer par tous ces points des ellipſes qu'on tracera ſur la ſurface du grand cylindre, ſuivant l'angle de l'inclinaiſon du côté du petit cylindre ſur le grand; par exemple, IKL (*Fig.* 192) ou des cercles, ſi le petit cylindre tombe à angle droit ſur les côtés du grand.

Sur chacun de ces cercles ou ellipſes, on portera de part & d'autre de la ligne *d d*, les arcs de cercle ou d'ellipſe déterminés par les paralleles à l'axe du petit cylindre, qui paſſent par les diviſions de la ſection elliptique; ſçavoir, *m a* de la Fig. de la préparation ſur MA, & *m b* ſur MB, l'arc *m* 1 en *f* 1 d'un côté & de l'autre du milieu M, & l'arc *m* 4 ſur *f* 4 auſſi de part & d'autre; enfin l'arc *m* 2 ſur *e* 2, & *m* 3 ſur *e* 3, & par les points *d*, 3, 4, B, 4, 3, *d*, 2, 1, A, 1, 2, on fera paſſer une courbe qui ſera l'ellipſimbre propoſée ſur la ſurface du gros cylindre.

Pour tracer cette courbe ſur le petit cylindre, on fera la même choſe qu'au Problême précédent; ce qu'il eſt inutile de répeter, la ſeule difficulté qu'il y aura, c'eſt qu'ici les deux côtés de la courbe n'étant pas égaux, le quart du petit cilindre ne ſuffit pas pour donner les points des quatre parties, comme aux Figures 187 & 190; il faut avoir toutes les diſtances d'une moitié de la courbe à la tangente K *b*: ainſi ayant décrit une ellipſe autour du petit cylindre, telle que la feroit la ſection d'un plan tangent au grand, on la diviſera en deux depuis le point d'attouchement repréſenté dans la pré-

Fig. 193. & 194. paration par le point *b*, & ayant divisé sa demie-circonférence en parties égales à celles de la demie-ellipse *b* HK; sçavoir, *b* 4, 4 3, 3 H, &c. on menera par chacune de ses divisions des paralleles à l'axe du petit cylindre, sur lesquelles on portera successivement d'un côté & de l'autre les distances de la tangente K*b* à l'arc de l'ellipse a*b*; sçavoir, *o* 4, *n* 3, M*m*, N 2, O 1, Ka, lesquelles donneront des points par lesquels on tracera l'ellipsimbre proposée.

Si l'on vouloit avoir la projection de cette courbe sur un plan, au lieu des arcs que l'on a tracés dans la Figure 194, en maniere de perspective sur le grand cylindre, il faudroit en prendre les cordes ou demi-cordes, & la construction, à cela près, seroit toujours la même.

DEMONSTRATION.

Cette construction émane du même principe que les précédentes. On suppose les deux cylindres coupés en tranches par des plans paralleles entr'eux & à l'axe du petit cylindre, dans lequel ils font pour section des parallelogrammes, dont les intervalles sont marqués par ceux des lignes 4*f*, 3 *e*, H*d* qui dépendent de la division qu'on a voulu faire du contour du petit cylindre pris sur un cercle, s'il est perpendiculaire au côté du grand, ou sur une ellipse s'il est oblique, comme dans le cas présent, parce qu'on suppose ce petit cylindre coupé par un plan tangent au grand, afin d'avoir un terme d'où l'on puisse compter de combien chaque ligne parallele à l'axe s'avance au-dessous de ce plan, pour atteindre à la surface du grand cylindre; c'est-à-dire, à la courbe que ce plan fait dans ce grand cylindre. Or cette courbe est un cercle, lorsque le petit cylindre est perpendiculaire au côté du grand, & une ellipse, lorsqu'il lui est oblique, & parce que tous les plans des tranches sont paralleles, toutes les ellipses qu'ils font, sont aussi égales entr'elles, de sorte que dans la préparation on fait servir une ellipse pour toutes, ainsi l'ellipse Ea*b* représente celle qui est faite par le plan passant par les points 2 3 *e*, par 1 4 *f* & K *b*; or dans chaque intersection des parallelogrammes du petit cylindre & des ellipses du grand, il n'y a que deux points communs; sçavoir, a*b* pour celle du milieu, 1, 4, pour l'intersection de la tranche suivante, & 2, 3, pour la troisiéme, lesquel-

les étant espacées de part & d'autre de la ligne AB, donnent les points du contour de l'ellipsimbre, *qu'il falloit trouver.*

L'usage de ce Problême a été indiqué au Théorême XX.

PROBLEME XLI.

La position d'un cylindre dans un cone qu'il pénetre étant donnée, décrire l'ellipsimbre formée par la rencontre de leurs surfaces.

Ce Problême comprend plusieurs cas qui peuvent tous se résoudre de la même maniere; car 1°. ou les axes du cylindre & du cone sont paralleles entr'eux, 2°. ou ils se coupent, 3°. ou perpendiculairement ou obliquement, 4°. où ils ne sont pas paralleles & ne se coupent pas, 5°. & alors l'axe du cylindre est perpendiculaire au plan passant par l'axe du cone, 6°. ou il lui est incliné, 7°. ou il n'entre pas totalement dans ce plan, lorsqu'il lui est perpendiculaire, 8°. ou il n'y entre pas aussi, lorsqu'il lui est incliné. *Fig. 195.*

Tous ces différens cas se peuvent résoudre par la même pratique qui a été expliquée au Problême général, en coupant le cone & le cylindre en plusieurs tranches par des plans paralleles entr'eux, dont la situation à l'égard des axes du cone & du cylindre est arbitraire : il y a cependant en cela du choix pour la commodité de l'exécution; car il convient de les situer de maniere qu'ils donnent toujours les sections les plus simples, nous les avons mis dans la Figure 195, perpendiculairement à l'axe du cone, pour avoir l'intersection de deux cercles, l'un dans le cone, l'autre dans le cylindre, lorsque les axes SC & X*x* sont paralleles entr'eux. Si l'on avoit disposé les tranches parallelement aux axes, on auroit eu pour intersection celle d'un parallelogramme & d'une hyperbole, qui est moins facile à tracer que le cercle.

Si les axes sont inclinés entr'eux comme SC & Q*q*, le plan *y*G coupant les deux corps, donnera dans le cone un cercle, & dans le cylindre une ellipse, dont *y*K sera la moitié du grand axe, & le diametre de la base du cylindre, le petit axe; ainsi il ne s'agit que de décrire cette ellipse, & la couper par un cercle qui ait pour rayon 1 *i*, & parce que toutes les ellipses qui seront faites par les sections des autres plans paralleles à *yy* sont égales, on peut ne décrire qu'une ellipse, & la couper par

les cercles inégaux qui feront les fections des plans paralleles dans le cone, en mettant leurs centres dans la diftance où ils doivent être de celui de l'ellipfe. Par ce moyen on aura une fuite d'arcs de cercles & d'ellipfes, lefquels étant tranfportés fur les furfaces du cone & du cylindre, comme nous l'avons dit aux Problêmes précédens, donneront autant de points à la circonférence de l'ellipfimbre, qu'on voudra multiplier le nombre des tranches par des fections paralleles; cela eft clair après les exemples des Problêmes précédens; cependant pour ne pas devenir obfcur en voulant être concis, nous en feront l'application à la pratique.

Fig. 195. Soient pour le premier cas où les axes font paralleles, les plans *y* G, Y *n* paralleles entr'eux & perpendiculaires aux axes SC du cone, & X*x* du cylindre; du point 1 pour centre & pour rayon 1 *i*, on décrira un quart de cercle 1 *di*, & du point H pour centre, & pour rayon le demi-diametre HG du cylindre, on décrira un autre quart de cercle qui coupera le précédent au point Z, duquel fi on abaiffe une perpendiculaire fur *y* G, on aura le point 5 pour projection du point Z, & un de ceux de l'axe courbe *b* 5 a de l'ellipfimbre; on trouvera de même un autre point *f* des cet axe par l'interfection des deux cercles *o e m* du cone, & N *z n* du cylindre; cette préparation étant faite.

Pour tracer l'ellipfimbre fur le cone, ayant tiré du fommet S une ligne à fa bafe, qu'on prendra pour le milieu de l'ellipfimbre, on placera fur cette ligne les points *b a* de fes deux extrêmités dans leur diftance du fommet S, & enfuite les points *i* & *m*, par lefquels on fera paffer deux cercles, fur lefquels on portera de part & d'autre de la ligne droite les arcs *i* Z & *m z*, qui donneront les points *z* & Z, par lefquels on fera paffer à la main la courbe qui fera l'ellipfimbre demandée; on n'a pas fait de Figure pour cette tranfpofition des arcs trouvés, parce qu'elle eft à peu près la même qu'à la Figure 182 ou 185 de la Planche 16.

Pour le fecond cas, où l'axe du cylindre tombe obliquement fur celui du cône, on agira de même qu'au précédent, excepté que fur le cylindre AVTB, où il fe fait des ellipfes par la fection oblique des plans *y* G, Y *n*, on tracera des ellipfes égales qui auront pour grand axe la ligne *y y* ou YY, & pour petit axe le demi-diametre de la bafe VT du cylindre; ainfi le

point P qui eſt à la rencontre des deux ſurfaces ſe trouvera par l'interſection du cercle du cone, dont 1 I ſera le rayon, & de l'ellipſe *y* P *y*; de même que le point O, par l'interſection du cercle du cone qui a pour rayon 2 L, & de l'ellipſe YOY. Fig. 195.

Si des points O & P, on abaiſſe les perpendiculaires O *o* & P*p* ſur les lignes *y* G, Y *n*, on aura les points *p* & *o*, qui ſeront la projection des rencontres des ſurfaces O & P, & ſur l'axe courbe de l'ellipſimbre qui ſera la courbe B *p o* A; cette préparation étant faite.

Si l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur le cone, on tirera par ſon ſommet une ligne droite, ſur laquelle ayant placé les points B & A ſommets de la courbe, on y marquera auſſi les points I & L, par où on fera paſſer des cercles, ſur leſquels on prendra de part & d'autre de la droite du milieu les arcs IP, LO, & l'on aura les points P & O, par leſquels & par le point A & B on tracera à la main l'ellipſimbre demandée, comme au cas précédent.

Pour tracer la même courbe ſur le cylindre, on commencera par tracer les lignes R a, & FN diamétralement oppoſées & paralleles à ſon axe, ſur leſquelles on portera les points *b* & *a* pour les extrêmités de la courbe, & les points *g* & N, dans leur diſtance à ces points; on fera paſſer par les points *g*, N & *a* des cercles paralleles à ſa baſe pour le premier cas, & des ellipſes pour le ſecond cas, & l'on portera ſur ces cercles les arcs *gz*, NZ pour le premier, & *y* P & YO pour le ſecond, pour les points a ou A on prendra la demi-circonférence pour avoir les points *bz*, Z a d'un côté de la parallele à l'axe, & autant de l'autre, ou B *p* OA d'un côté, & de même de l'autre de la ligne qui paſſe par le ſommet du cone & le milieu de la ſection; par ces points ainſi trouvés on tracera l'ellipſimbre demandée.

Mais ſi le cylindre étoit perpendiculaire au plan du triangle par l'axe du cone, on ne pourroit plus faire uſage de la même conſtruction, parce que les plans coupant le cone perpendiculairement à ſon axe, couperoient le cylindre parallelement à ſon axe, & y feroient pour ſection des parallelogrammes, dont les côtés ne détermineroient point la rencontre des deux ſurfaces, alors il faut avoir recours aux tangentes des ſections du cone.

Soit donc (*Fig.* 196) le cylindre DO*p d* qui eſt perpendiculaire à l'axe SC du cone, lequel eſt coupé par un plan paſſant Fig. 196.

Fig. 196. par l'axe X *m* du cylindre, & SC du cone; on coupera l'un & l'autre de ces corps par des lignes H *n*, F *m*, IN qui donneront ſur l'axe SC les points *n*, *m*, N, deſquels comme centres & pour rayons *ng*, *m*M, N *k*, on décrira des arcs de cercle *gy*, M *z*, *kx*, auſquels on tirera les tangentes *gh*, M*f*, *ki*, égales aux ordonnées de la baſe du cylindre GH, XF, KI, & par les points *h*, *f*, *i*, on menera des paralleles à l'axe du cylindre, juſqu'à la rencontre des arcs, comme *hy*, *fz*, *ix*, leſquelles ſerviront à tracer la courbe, comme nous le dirons ci-après.

Ayant tracé ſur le cylindre une ellipſe par les points donnés
Fig. 199. E & L par le Problême XXXIII, comme *e*, *h*, *f*, *i l*, (*Fig.* 199) on menera par les points *h*, *f*, *i*, donnés à la circonférence de cette ellipſe des paralleles à ſon axe G*y*, F*z*, I*x*, ſur leſquelles on portera les longueurs trouvées *hy*, *fz*, *ix*, qui donneront ſur ces paralleles les points *y*, *z* & *x*, par leſquels & par les points *e* & *l* on tracera à la main une courbe, qui ſera celle qu'on demande.

Si l'on veut tracer la même ellipſimbre ſur le cone, dont le
Fig. 197. triangle SBA de la Figure 196 eſt la ſection par l'axe, on opérera comme aux cas précédens; ainſi ſuppoſant celui de la Figure 197 (qui eſt plus petit faute de place dans la Planche) égal à celui de la Figure 196, on commencera par tirer du ſommet S à la baſe une ligne droite quelconque SB, ſur laquelle on portera les diſtances SE, S*g*, SM, S*k*, SL de la Figure 196, & ayant tracé ſur la ſurface de ce cone des cercles paſſant par les points *g*, *m*, *k*, on prendra de part & d'autre de ces points, les arcs *gy*, M*z*, *kx*, de la Figure 196, qu'on portera de part & d'autre de la ligne SB, & l'on aura des points *e*, *y*, *z*, *x*, L, *x*, *z*, *y*, *e*, par leſquels on tracera à la main la courbe propoſée, ſuppoſant, comme je viens de le dire, un rapport entre les Figures 196 & 197 qu'on n'a pû obſerver faute de place; mais comme il ne s'agit ici que d'une explication, on peut ſuppoſer égales des Figures inégales.

Lorſque le cylindre qui pénetre le cone eſt perpendiculaire à ſon triangle par l'axe, & que les axes ne ſe rencontrent pas, les tangentes aux arcs de cercle des ſections faites par les plans coupant les cones par tranches paralleles, ne ſont pas égales de part & d'autre des côtés du cylindre prolongés comme dans le cas précédent; c'eſt pourquoi il faut diſpoſer la Figure comme on le voit à la Figure 200.

Ayant

Ayant placé le centre C de la base du cylindre, par lequel passe l'axe qui tombe perpendiculairement au triangle BSA par l'axe du cone ; on décrira de ce centre un cercle *or* DRO que l'on coupera aussi bien que le cone par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du cylindre & perpendiculaires à celui du cone ; lesquels plans sont représentés par les lignes 1 4, 2 5, 3 6, qui coupent le cercle de la base du cylindre aux points *or*, *d*D, OR, par lesquels on tirera à ces lignes des perpendiculaires indéfinies *o*T, RG, *d*E, DF; ensuite ayant décrit des demi-cercles 1*h*4, 2F5, 3G6, on leur menera des tangentes L*h*, EF, TG paralleles à leurs diametres 1 4, 2 5, 3 6, lesquelles détermineront les longueurs des cotés du cylindre hors du cone, pour les paralleles à l'axe qui passent par les points *o d* O, *r* DR; ainsi le côté du cylindre qui passe par le point *d* sort du cone de la longueur *y* E, celui qui passe par le point O sort du cone de l'intervalle *x* T, & ainsi des autres; & parce que les points G & F sont très-près du point d'attouchement des tangentes, ils sortent très-peu du cone. Pl. 17. *Fig.* 200.

Présentement pour tracer cette courbe sur le cylindre, on opérera de même qu'à la Figure 199, excepté qu'en celle-là nous avons supposé les distances de l'ellipse qui coupe le cylindre égales de part & d'autre de son axe, & qu'ici elles sont inégales.

Pour tracer la même courbe sur le cone, on suivra aussi la même méthode qu'à la Figure 197, excepté que l'on ne portera pas les mesures des arcs paralleles sur les deux côtés de la ligne SB, mais tous d'un côté.

Ou bien on tracera sur le cone une hyperbole HY tangente au cercle de la base du cylindre pour servir de terme, d'où on mesurera les arcs qui coupent les côtés du cylindre; car les points de la courbe seront toûjours dans l'interfection des cercles des tranches du cone paralleles à la base, & des côtés du cylindre paralleles à son axe.

La même opération sert pour les cas où le cylindre n'entre dans le cone que d'une partie de la circonférence, comme on le voit dans la même Figure 200 au cercle D*g*6.

Secondement, si au lieu de faire les tranches paralleles par des plans perpendiculaires à l'axe du cone, on veut les faire paralleles à l'axe du cylindre, la solution du Problême sera également Géométrique, mais un peu plus difficile, parce

qu'au lieu de cercles dans le cone, on aura pour section des ellipses, des paraboles ou des hyperboles, suivant l'inclinaison de l'axe du cylindre à celui du cone; mais aussi on n'aura dans le cylindre que des parallelogrammes.

Afin qu'on puisse choisir la maniere qui convient le mieux, nous allons donner un exemple de la courbe formée par la pénétration d'un cylindre à l'axe du cone.

Fig. 201. Soit (*Fig.* 201) le triangle par l'axe du cone *b*S*a*, l'axe de ce cone SC, celui du cylindre X*c* qui le rencontre, ou qui ne le rencontre pas; supposons premierement qu'il le rencontre; la section plane de ce cylindre par un plan perpendiculaire à celui qui passe par son axe, & suivant la rencontre avec l'axe SC sera une ellipse, dont EL sera le grand axe, & le petit axe sera le diametre DF de la base du cylindre. Soit la moitié de cette ellipse E*d*L que l'on traversera par autant de lignes droites paralleles que l'on voudra avoir de doubles points de la courbe comme 4 1, 5 2, 6 3, qui couperont l'axe au point *o c* O, par lesquels on menera des paralleles à l'axe du cylindre jusqu'à la rencontre du côté S*b* du cone, comme O*g*, *c*I, *o*H; chacune de ces lignes sera une partie de l'axe de la courbe qui sera faite dans le cone par la section d'un plan parallele à l'axe du cylindre, & les points *g*, I, H en seront les sommets; dans l'exemple présent ces courbes seront des ellipses, parce que les lignes *g*O, I*c*, H*o* prolongées, rencontreront en dedans les deux côtés du cone S*b* & S*a* prolongés; mais si le cylindre avoit été incliné suivant la ligne E*e*, parallele à SA, ces courbes seroient des paraboles. Quelles que puissent être ces sections, elles seront toujours semblables entr'elles, quoique inégales; on a donc l'axe & le sommet de ces sections, & l'on a aussi deux points à leur contour que donne une double ordonnée 4 1, 5 2, 6 3, car à cause de l'uniformité du cone on peut concevoir le côté SO du cone en l'air sur le côté SC dans un plan perpendiculaire au plan SC*a*, comme on le voit représenté en perspective dans la Figure 198; mais parce qu'on ne peut pas faire cette préparation sur le solide, on décrira ces courbes sur le plan du triangle *b*S*a*, en portant les longueurs des axes O*g*, *c*I, *o*H sur l'axe SC en OG, *c*C & *o*K, & par les points 4 G 1, 5 C 2, 6 K 3, on décrira les ellipses ou les paraboles, ou hyperboles que les plans des tranches font dans le cone, & par les points R*dr* des ordonnées de la demi-ellipse E*d*L, on menera des paralleles à l'axe SC

jusqu'à la rencontre des courbes 4 G 1, 5 C 2, 6 K 3, aux points *p*, *q*, *v*.

Cette préparation étant faite, on pourra tracer l'ellipsimbre sur le cone, en traçant une ligne SB (*Fig.* 198) de son sommet S à la base pour servir de milieu à la courbe, sur laquelle ayant porté les longueurs S *e*, S *g*, SI, SH, S *l* de la Figure 201, & sur les côtés S *b*, S *a* de la Figure 198 des longueurs égales à, S 4 S 1, S 5, S 2, S 6, S 3 : on tracera sur la surface du cone les ellipses, paraboles ou hyperboles qui doivent passer par ces trois points, sur lesquelles on portera de part & d'autre de la ligne SB, les arcs K *u*, C *q*, G *p*, lesquels donneront les points par lesquels & les deux sommets *e* & L, on tracera à la main l'ellipsimbre demandée. *Fig.* 198.

Pour tracer la même courbe sur le cylindre, il faut ajouter à la préparation des tangentes à ces arcs, comme KT pour avoir la distance de ces tangentes aux arcs des courbes formées par les plans des tranches sur les côtés du cone, & alors on s'en servira pour décrire l'ellipsimbre sur le cylindre, comme on a fait à la Figure 197 ; il faut encore remarquer ici que les Figures 201, 198, n'ont pas été faites d'une grandeur rélative, quoiqu'on les suppose telles, faute de place dans la Planche.

Si l'axe du cylindre ne rencontroit pas celui du cone, comme à la Figure 200, mais que l'ellipse faite par le plan du triangle par l'axe coupant le cylindre fût à côté, il faut en prolonger les ordonnées jusqu'à l'axe & chercher les sommets des sections, & transporter la ligne du milieu à côté de celle qui passe par les sommets des sections coniques de la quantité dont elle doit être éloignée du plan passant par l'axe de l'ellipse, qui fera dans le cone une hyperbole, prenant cet intervalle sur l'arc de la section conique qui coupe cette hyperbole ; ce qui n'est pas difficile à concevoir par les exemples que nous avons donné pour trouver les points des ellipsimbres sur les arcs des sections coniques formées par les tranches paralleles à l'axe du cylindre : de sorte que la préparation peut servir à tracer les sections solides, où le cylindre n'entre pas dans le cone de toute sa circonférence.

DEMONSTRATION.

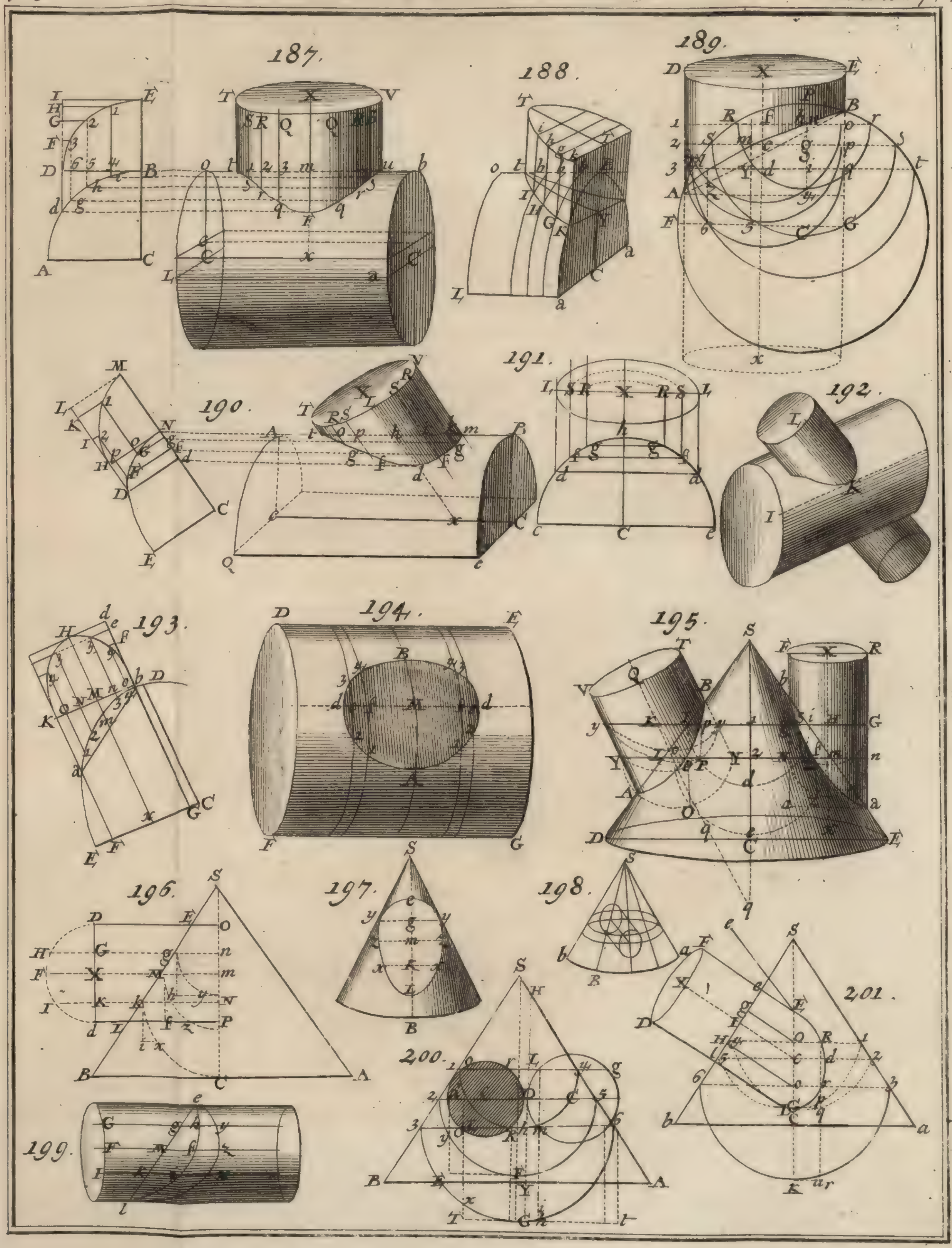
Le même principe qui a servi de base aux démonstrations des Problêmes précédens, s'applique si naturellement à celui-ci,

Fig. 196. qu'il ne demande qu'une médiocre attention.

Premierement, pour la Figure 196, il faut se représenter que les lignes *g h*, M*f*, *k i*, qui sont représentées dans le plan du triangle BSA lui doivent être perpendiculaires, de même que les ligres GH, XF, KI qui sont les ordonnées au diametre D*d* de la base du cylindre, & les correspondantes, que l'on a fait égales, doivent aussi être censées paralleles, & dans le même plan que les arcs de cercle *g y*, M*z*, *k x*; de sorte que si l'on imagine des lignes paralleles à l'axe X*m* du cylindre passant par les points *hfi* qui sont à la surface, ces lignes, qui en feront des côtés, rencontreront les arcs en certains points, comme *y*, *z x*, qui seront ceux de l'immersion du côté du cylindre dans le cone, par conséquent communs aux deux surfaces & à la circonférence de la courbe formée par leur intersection, donc les arcs *g y*, M*z*, *kx* sont la mesure de la distance des points de l'ellipsimbre à son axe droit EL sur la surface du cone.

Mais parce qu'on ne peut pas prendre les mêmes mesures dans le cylindre, lorsqu'on veut tracer la même courbe à la surface, on a recours à la supposition d'un plan tangent au cone, & perpendiculaire à celui qui passe par l'axe du cylindre, & le côté EL du cone, lequel plan tangent fait dans le cylindre une ellipse, parce qu'il le coupe obliquement suivant la ligne EL, qui est inclinée à l'axe X*m*: or cette ellipse est toute hors du cone, & les lignes *gh*, M*f*, *ki* sont des ordonnées à son axe EL, puisqu'elles lui sont supposées perpendiculaires, & qu'elles ont été faites égales à celle du cercle de la base du cylindre; donc la distance des extrêmités de ces ordonnées aux arcs de cercle du cone, prises sur des paralleles à l'axe du cylindre, donne exactement les points d'immersion des côtés passant par les points *h*, *f*, *i* de la circonférence de l'ellipse plane, tangente au cone; donc ces distances ont dû être portées, comme il a été dit à la Fig. 199, pour avoir les points de l'ellipsimbre *qu'il falloit décrire*.

Ce que nous pouvons ajouter touchant les pratiques indiquées par les Figures 200 & 201, ne sera qu'une plus ample explication de la premiere: il faut toujours se représenter que par le moyen des plans paralleles coupant la base du cylindre & le cone en même-tems, on s'est donné des points à la surface du cylindre, comme *o*, *r*, D, &c. (*Fig.* 200) & R*dr* (*Fig.* 201) par lesquels on doit faire passer des paralleles à l'axe du cylindre pour avoir des côtés marqués à la surface; & parce que


187.
188.
189.
190.
191.
192.
193.
194.
195.
196.
197.
198.
199.
200.
201.

ces côtés, dans la ſuppoſition de la Figure 196, ſont perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, ils n'y ſont exprimés ſuivant les regles de la projection que par un point ; il faut donc les coucher ſur le même plan de ce triangle, auſſi-bien que les arcs des ſections circulaires du cone, qui n'y ſont exprimées ſuivant les mêmes regles de la projection 1 4, 2 5, 3 6, & par ce moyen on trouve les interſections de ces arcs avec les côtés du cylindre, leſquelles donnent des points communs aux deux ſurfaces, c'eſt-à-dire, des points de la courbe que l'on doit tracer ; & par conſéquent on eſt obligé de ſuppoſer des plans tangens au cone, comme nous venons de le dire. Il faut tirer des tangentes à chacun des arcs des ſections du cone, leſquelles feront toutes dans le même plan qui eſt ſuppoſé couper le cylindre & faire une ellipſe.

La derniere pratique a été ſuffiſamment expliquée par la conſtruction, & par ce qui a été dit ci-devant.

L'uſage de ce Problême a été indiqué au Théorême XXVI ; il ſe préſente aſſez ſouvent dans les fortifications où les murs ſont preſque toujours en talud, & où il y a des arrondiſſemens qui ſont par conſéquent des portions de cones tronqués, dont les ſommets ſont quelquefois en bas, comme aux arrondiſſemens des contreſcarpes & des flancs concaves, & quelquefois en haut, comme aux tours en talud & arrondiſſemens des orillons ; dans l'Architecture civile il eſt plus rare.

Des ellipſimbres compoſées.

PROBLEME XLII.

Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration d'une ſphere & d'un cylindre, dont la circonférence n'entre qu'en partie dans la ſphere.

CE Problême ſe réſoudra comme tous les précédens par notre méthode générale, en traçant des perpendiculaires à l'axe du cylindre (*Fig.* 202) qui traverſent auſſi la ſphere, par leſquelles on ſuppoſe autant de plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires au plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphere, dont les ſections ſeront des cercles dans l'un & l'autre de ces corps. PL. 18. *Fig.* 202.

Fig. 202. Soit donc la ſphere AB $k\,b$ A pénetrée par le cylindre DEGF, dont l'axe eſt XX, par lequel & par le centre C de la ſphere, ces deux corps ſont coupés par un même plan : on menera par le centre C un diametre PCp parallele à cet axe, & ayant tiré à ces deux lignes autant de perpendiculaires qu'on voudra a 1, b 2, d 3, e 4, &c. des points $a\,b\,d\,e$, &c. pour centres & pour rayons $a\,h$, $b\,i$, $d\,k$, &c. on décrira autant d'arcs de cercles (les quarts ſuffiſent) & des points o, p, q, r, &c. pris ſur l'axe du cylindre pour centres, & pour rayons les demi-diametres de la baſe o 1, p 2 &c. on tracera autant d'autres arcs de cercle juſqu'à la rencontre des précédens faits dans la ſphere ſur les mêmes diametres prolongés. Les points de leurs interſections x & x ſeront communs aux deux ſurfaces ; & ſi de ces points on abaiſſe des perpendiculaires aux mêmes diametres, on aura leur projection ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphere, ſur lequel ils donneront autant de points de l'axe courbe de la ſection P$y\,y\,x\,p$.

Cette préparation étant faite, on s'en ſervira pour tracer l'ellipſimbre compoſée, comme on a fait pour les ellipſimbres ſimples, en traçant autant de cercles ſur la ſphere & ſur le cylindre, commençant à compter la meſure des arcs $h\,x$, $i\,x$, Kx, depuis un cercle majeur, dans lequel ſeront les deux poles P & p de tous ces arcs ; & ſur le cylindre par tracer un côté EG ou DF, d'où l'on meſurera à droite & à gauche les arcs 1 x, 2 x, 3 x, 4 x, ou leur ſupplément, comme il conviendra le mieux, parce qu'il eſt toujours plus commode de prendre & de porter les meſures des arcs qui ſont au-deſſous de 90 degrés, que ceux qui ſont plus grands, à cauſe de la rondeur du cylindre.

La démonſtration de ce Problême eſt trop ſemblable à celle des précédens pour s'y arrêter ; chaque arc de cercle qu'on a fait ici dans le plan du papier, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre & le centre de la ſphere, peut être relevé à angle droit ſur ce plan ſur les lignes qui en ſont les diametres ou les rayons, ſans qu'il arrive aucun changement à leur interſection x, & à leur projection y qui eſt dans le même plan, & dans celui de l'arc.

L'uſage de ce Problême a auſſi été indiqué au Théorême XI, il eſt inutile d'en répeter l'explication.

PROBLEME XLIII.

Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration de deux cylindres, dont la circonférence de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre.

Il y a deux cas dans ce Problême qui n'en changent point la conſtruction; car les cylindres ſe coupent à angles droits ou obliquement. De quelque façon qu'ils ſe croiſent, il faut toujours ſuppoſer qu'ils ſont coupés par des plans tangens à chacun des cylindres qui les coupent réciproquement, & perpendiculairement aux plans paſſans par chacun de leurs axes; de ſorte que ſi les cylindres ſe croiſent à angle droit, les ſections de ces plans tangens à un des cylindres ſeront dans l'autre des cercles; & s'ils ſe traverſent obliquement, les ſections faites par les mêmes plans ſeront des ellipſes dans l'un & l'autre cylindre; cela ſuppoſé, nous choiſiſſons à la Figure 203, le cas où ils ſont perpendiculaires pour plus grande facilité. Fig. 203.

Soit le cylindre YLNI vû par la baſe repréſenté par le cercle AE*a*B, lequel eſt pénétré par un autre cylindre *d*A*a*D, qui n'entre pas dans le premier de toute la circonférence; en ſorte qu'il reſte une partie FB de ſon diametre au dehors, laquelle répond au double de l'arc D*g* de la baſe D*g a*, étendue ici par ſuppoſition ſur le plan du parallelogramme DA paſſant par ſon axe *l l*.

Ayant tiré un diametre A*a* ſur la baſe du premier cylindre BAE*a*, lequel eſt ici confondu avec le côté du ſecond, quoiqu'il puiſſe paſſer entre C & B, ou entre C & E; on tirera ſur une des extrêmités de ce diametre la perpendiculaire *d*A, ou *a*D qui repréſentera le plan tangent au grand cylindre, & le diametre de la baſe du petit, ſur lequel on tracera le demi-cercle D*m a* qui repréſentera la moitié de cette baſe, laquelle doit cependant être à angle droit ſur le plan du parallelogramme *d*A*a*D, mais dont le changement de ſituation n'en fait aucun aux interſections des lignes qu'on en doit tirer.

On diviſera enſuite l'une des deux baſes des cylindres, en parties égales ou inégales; nous diviſerons par exemple ici l'arc du demi-cercle *a*BA, ou ſeulement le quart du cercle BA en parties égales ou inégales B*r*, *rq*, *qp*, *pn*, *n*A, & par ces

Fig. 203. points *n*, *p*, *q*, *r*, on tirera des paralleles à l'axe *ll* du cylindre DA prolongées jusqu'à l'arc de la base *dm*A, ou D*ma*, qu'elles rencontreront aux points *g* K *mo*.

Cette préparation étant faite, si l'on veut tracer l'ellipsimbre sur le grand cylindre YN, on commencera par faire à sa surface un cercle parallele à sa base, n'importe où, si les cylindres se coupent à angle droit, ou une ellipse, suivant l'obliquité de la direction des côtés du second cylindre qui le pénetre. On transportera sur ce cercle les divisions B*r*, B*q*, B*p*, B*n*, en *b*R, *b*Q, *bP*, *b*N de part & d'autre du point *b*, qui a été pris à volonté à la surface du cylindre, si la section est un cercle, ou un point correspondant au point B, s'il est une ellipse; & par les points *b*, R, Q, P, N, *a* on menera autant de paralleles à l'axe du grand cylindre; puis ayant tracé un cercle pour le milieu de la section, si on ne l'a pas fait du premier coup, on portera sur ces paralleles à l'axe toutes les ordonnées de la base du petit cylindre de part & d'autre du cercle pris pour le milieu, comme ici a*a* suivant l'ordre de leur position à l'égard du point B, milieu de la division; ainsi on portera l'ordonnée *cf* provenant du point B en *cf* sur le gros cylindre de part & d'autre du point *c*, *gh* quatre fois en *gh*, sur les deux paralleles R*h*, R*h*; on continuera de même en portant *i*K deux fois sur chaque parallele QK de part & d'autre des points *i* & *i*, & ainsi de suite; & l'on aura les points *o*, *m*, K, *h*, *f*, *h*, K, &c. par lesquels on tracera à la main l'ellipsimbre demandée.

Si l'on veut tracer la même courbe sur le cylindre DA, on tracera un cercle à la surface par un point pris à volonté, ou une ellipse, si les deux cylindres se coupent obliquement, on divisera la circonférence de ce cercle en parties égales à celles de la base *dm* A au haut de la Figure, en portant de suite les arcs *df*, *fh*, *h*K, K*m*, *mo*, & recommençant à l'autre demi-cercle; & par tous ces points de divisions ayant tracé autant de paralleles à l'axe du cylindre, on portera de part & d'autre du cercle pris pour le milieu des longueurs des demi-cordes 1*r*, 2*q*, 3*p*, 4*n*, qui donneront des points *r*, *q*, *p*, *n*, par lesquels on tracera la courbe qui est l'ellipsimbre demandée, laquelle sera égale à la précédente, quoique sur un cylindre différent.

DEMONS-

DEMONSTRATION.

Pour démontrer ce Problême, il ſuffit de repréſenter les différens effets des ſections des plans qui coupent les deux cylindres par tranches, ſuivant notre principe général; car ſi l'on imagine les deux cylindres coupés par des plans paralleles entr'eux & à un des deux axes, il eſt évident qu'ils feront des parallelogrammes dans celui où les tranches ſont paralleles à ſon axe, & des cercles dans l'autre, ſi les cylindres ſe pénetrent à angle droit, ou des ellipſes égales s'ils ſe coupent obliquement; mais comme l'on peut ſuppoſer les ſections des plans ſucceſſivement paralleles aux deux axes, on aura des parallelogrammes & des cercles dans chaque cylindre qui donneront par différens moyens les mêmes points de la courbe, ce que nous avons fait dans cette conſtruction pour abreger; car nous pouvions également diviſer le ſecond cylindre DA en cercles paralleles à *d* A, & prendre ſur chacun, à commencer du côté *d* D, les arcs correſpondans à chacun de ces cercles, raſſemblés ſur la baſe *d m* A, c'eſt-à-dire, qu'au cercle du milieu paſſant par F & B, on auroit porté deux fois l'arc *df*, enſuite aux deux collatéraux deux fois l'arc *dh*, & ainſi de ſuite; mais comme l'uſage des lignes droites eſt plus commode & plus exact dans l'exécution, que celui des courbes tracées ſur des ſurfaces courbes, on a choiſi les unes préférablement aux autres, puiſque l'une & l'autre maniere doit également donner les points du contour de l'ellipſimbre *qu'il falloit trouver*. Pl. 18. Fig. 203.

USAGE.

Nous avons fait remarquer au Théorême XXI que l'uſage de cette courbe étoit aſſez fréquent dans les ceintres des voutes, parce que la plupart ſont cylindriques, & que ſouvent une voute n'eſt percée que par une portion de cylindre, comme il arrive aux abajours & aux deſcentes de cave.

Des ellipſoïdimbres.

PROBLEME XLIV.

Tracer une ellipſoïdimbre formée par la pénétration de la ſphere & du cone, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere.

LA ſolution de ce Problême étant toujours la même, c'eſt-à-dire, fondée ſur le même principe, il ne s'agit que de tracer des lignes paralleles entr'elles ſur le plan qui paſſe par l'axe du cone & le centre de la ſphere, & qui ſoient perpendiculaires à cet axe, leſquelles ſeront les diametres des cercles que les plans paſſans par ces lignes perpendiculairement au triangle par l'axe du cone, feroient dans le cone & dans la ſphere; les interſections des cercles du cone avec ceux de la ſphere, qui ſont ſur le même plan, donneront les points de la courbe ſur les ſurfaces des deux corps auſquelles ils ſeront communs, & les perpendiculaires abaiſſées des points d'interſection des arcs ſur leurs diametres communs donneront leur projection & les points de l'axe courbe d'ellipſoïdimbre. La Figure
Fig. 204. 204 fait voir que c'eſt ainſi qu'on a tracé l'axe courbe A*d*B par une pratique tout-à-fait ſemblable aux précédentes, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y ajouter une plus longue explication, qui ne pourroit être utile qu'à ceux qui liroient ce Problême ſans avoir lû auparavant quelques-uns des précédens; il ſuffit de dire en leur faveur que le point *y* eſt trouvé par l'interſection des arcs de cercle *d*E*x* & *gfx*, ayant abaiſſé du point *x* la perpendiculaire *xy* ſur le diametre commun E*f* des arcs faits, l'un du centre *d* pris ſur le diametre de la ſphere ID, & l'autre du centre *g* pris ſur l'axe du cone S*h*.

Quand nous diſons que les plans qui forment les tranches des deux corps doivent être perpendiculaires à l'axe du cone, on conçoit bien que ce n'eſt que pour plus de commodité dans l'exécution, comme nous en avons déja prévenu le Lecteur ci-devant, parce qu'alors toutes les ſections dans le cone étant des cercles, ſont les Figures les plus ſimples & les plus faciles à décrire; car rien n'empêche qu'on ne faſſe les tranches paralleles à l'axe; mais alors leurs plans formeroient des hyper-

boles dans le cone; de forte que les points de l'ellipfoïdimbre feroient à l'interfection de différentes hyperboles avec différens cercles, j'entends de différentes grandeurs; car les hyperboles feroient toujours femblables, étant formées par des plans paralleles entr'eux. Rien n'empêcheroit de même qu'on ne fit les tranches inclinées à l'axe du cone, mais alors les points de la courbe pourroient être à l'interfection des cercles de la fphere & des trois autres fections coniques, ellipfes, paraboles ou hyperboles, fuivant l'inclinaifon des plans coupans à l'égard de l'axe du cone; car le centre de la fphere étant donné dans le triangle par l'axe du cone, on parviendroit toujours au même but, mais par des voyes plus embarraffantes; ce qu'il faut éviter.

L'ufage de ce Problême eft indiqué au Theorême XIV pour les enfourchemens des lunettes ébrafées, ou voutes en canoniere, qui rachetent une voute fphérique, ou d'une trompe conique qui rachete un cul-de-four.

PROBLEME XLV.

Décrire une ellipfoïdimbre formée par la pénétration du cone dans le Cylindre, à la rencontre de leurs furfaces.

Soit (*Fig.* 205) le cercle *k* BA *i*, qui repréfente la bafe du cylindre, & le triangle SD *d*, celui qui eft la fection du cone par fon axe SC, lequel paffe ou ne paffe pas par le centre X de la bafe du cylindre: les interfections de ce cercle avec le triangle donnent les points communs aux deux furfaces du cone & du cylindre; fçavoir, deux points dans fon immerfion AB, & deux autres dans fon émerfion *i* K, lefquels font par conféquent à l'ellipfoïdimbre. *Fig.* 205.

On divifera l'arc BA en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, par lefquelles on tirera des perpendiculaires à l'axe SC du cone, comme *g n* 1, *eo* 2 ou *e m* 3, & des points *g* & *e* pour centres & pour rayon la partie qui eft comprife dans le cone *g* 1, *e* 2 ou *e* 3, on décrira des arcs de cercle 1 R, 2 *u*, 3 *x*, & par les points *n o m* des divifions, on menera des paralleles à l'axe SC jufqu'à la rencontre de ces arcs, qu'elles couperont aux points R, *u*, *x*, lefquels feront au contour de la courbe, fi l'on fuppofe ces arcs relevés en l'air perpendiculairement au triangle par l'axe fur leurs diametres.

Fig. 205. Pour faire usage de cette préparation dans la description de l'ellipsoïdimbre sur le cylindre, on tracera un cercle à sa surface, pour servir de milieu à la courbe, par exemple GH surlequel ayant transporté les divisions de l'arc BA, à commencer d'un point Q pris pour le point C de la préparation, on portera C*o* & C*p*, en Q*o* & Q*p*, C*n* en Q*n*, &C*m* en Q*m*, & par les points *n*, *o*, *p*, *m* on menera des paralleles à l'axe du cylindre, sur lesquelles, à commencer du cercle GH, on portera de part & d'autre de ce cercle les ordonnées des arcs 1 R, 2 *u*, 3 *x*, qui sont *n*R en *rn*, *ou* en *ou*, *mx* en *mx*, & par les points *r u x*, &c. trouvés à la surface du cylindre, on tracera à la main une courbe qui sera l'ellipsoïdimbre proposée.

Secondement, si on veut tracer la même courbe sur le cone, on tirera du sommet S deux côtés à sa surface diamétralement opposés, comme SD, S*d*; on prendra sur chacun d'eux, les distances SB, SA, & S*k*, S*i*, si l'on veut tracer la petite section, & sur le côté SD ayant porté les intervalles B 1, B 2, on tracera par les points 1 & 2 des cercles paralleles à la base, sur lesquels on portera de part & d'autre de ce côté, les arcs 1 R, 2 *u*, & dans l'autre côté, aussi de part & d'autre, l'arc 3 *x*, & par les points R, *u*, *x*, on tracera sur le cone à la main, ou avec une regle ou baguette ronde & pliante, la courbe qui sera l'ellipsoïdimbre demandée.

Si l'axe du cone étoit incliné au côté du cylindre, il est clair qu'au lieu de cercles, il faudroit tracer des ellipses.

La Figure fait voir aussi d'un coup d'œil, comment on doit faire la projection de cette courbe, en tirant par les points donnés *n*, *o*, *m* des paralleles à l'axe du cone, lesquelles étant traversées par une perpendiculaire GH sur le même plan, si l'on porte de part & d'autre de cette ligne sur chaque parallele l'ordonnée correspondante du cercle fait par chaque tranche, on aura les points T, *r*, *u*, *x*, *t*, &c. par lesquels menant une courbe, on aura la projection de l'ellipsoïdimbre demandée.

La démonstration de ce Problême est facile à appercevoir, si l'on se représente les arcs 1 R, 2 *u*, 3 *x* élevés perpendiculairement sur leurs diametres, & sur le plan du triangle par l'axe du cone; car alors les ordonnées *n*R, ou *m x* représentent les côtés du cylindre qui passent par les points R, *u*, *x*, de la surface du cone, où sont leurs intersections; & par consé-

quent les points communs aux deux ſurfaces qui ſont au contour de l'ellipſoïdimbre; *ce qu'il falloit trouver.*

Nous avons indiqué au Théorême XXVI l'uſage de cette courbe; nos *embraſures* dans les tours, ou dans les *flancs concaves* ſans talud, ou des portes ébraſées dans les murs arrondis par leurs plans ſans talud, ſont des portions de cones qui pénetrent des cylindres.

PROBLEME XLVI.

Décrire une ellipſoïdimbre formée par l'interſection des ſurfaces de deux cones, dont les axes ſe coupent.

Cette courbe ſe décrira par notre méthode générale, en coupant les deux cones par des plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe de l'un des deux; la courbe ſera à l'interſection des cercles & des ellipſes, dont on a les centres & les diametres ou rayons, & les axes des ellipſes que l'on trouvera dans le plan qui paſſera par les deux axes; la Figure 207, & ce que nous avons dit tant de fois en pareilles conſtructions ſuffiſent pour mettre cette pratique ſous les yeux. *Fig. 207.*

L'uſage de ce Problême eſt principalement pour les embraſures ou portes ébraſées en tour creuſe ou ronde & en talud, ſuppoſant qu'elles ſoient droites, c'eſt-à-dire, que leur axe ou ligne de direction, ſoit perpendiculaire à la tangente du mur arrondi, ou à la corde qui eſt le diametre de la porte ou embraſure; ſi la direction eſt rampante, ce ſont deux cones dont les axes ſe coupent obliquement.

Des ellipſoïdimbres compoſées.

PROBLEME XLVII.

Tracer une ellipſoïdimbre compoſée ſur les ſurfaces du cone & de la ſphere qui ſe pénetrent.

LA ſolution de ce Problême n'a rien de particulier, que la maniere de trouver les axes droits des deux parties des courbes qui ſe croiſent pour n'en faire qu'une des deux; ce qui détermine leurs points d'infléxion dans le plan paſſant par l'in-

terſection de ces deux axes, perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du cone.

Fig. 206. Soit la Figure 206, la ſection d'un cone par ſon axe, & d'une ſphere par ſon centre; ſi l'on tire du ſommet S une tangente STD au cercle de la ſphere PTH, les lignes tirées des points E & H, où la ſphere coupe le cone au point d'attouchechement T, ſeront celles que l'on cherche, & le point *y*, projection du point *x*, interſection des arcs T *x* de la ſphere faite du centre F, & G *x* du cone du centre *m*, ſera celui de l'infléxion formée par la rencontre de deux portions d'ellipſoïdimbre de la partie ſupérieure & de l'inférieure du cone; les autres points ſe trouveront à l'ordinaire par l'interſection des arcs de la ſphere, dont les centres ſont ſur ſon diametre P*p* parallele à l'axe du cone, & des arcs des ſections du cone, dont les centres ſont ſur ſon axe S*m*.

Application des pratiques précédentes aux courbes quelconques formées par les interſections des cylindres, & les cones.

Puiſque l'on connoît que les ſections des ſpheres, ſphéroïdes, cones & cylindres faites par des plans, ſont toûjours du nombres de celles qu'on appelle coniques qui ne ſortent jamais du ſecond degré, & que lorſqu'ils ſont paralleles, elles ſont toûjours ſemblables : quelle que puiſſe être la ſection de ces corps qui ſe pénetrent, ſoit à l'égard de leurs axes ou de leurs côtés, on trouvera toujours ſur chaque tranche l'interſection de deux de ces courbes, qui donnera deux points de la courbe plane ou à double courbure, qui ſe forme par la rencontre des deux ſurfaces; ce qui ſuffit pour ſuppléer dans la pratique à ce qui peut manquer à notre Théorie, concernant les paraboloïdimbres, hyperboloïdimbres ou autres poſſibles, comme on *Fig. 207. & 208.* voit aux Figures 207 & 208.

De la deſcription des hélices & limaces.

QUoique les hélices ne ſoient pas du nombre de ces courbes qui ſont produites par la ſection des corps, auſquelles nous nous ſommes bornés : elles ſont ſi uſuelles en Architecture, qu'on a beſoin très-ſouvent de les tracer.

Le mot d'*hélice* vient du Grec *helisô*, c'est-à-dire, *circumvolvo*, je tourne autour; quelques Mathématiciens ont appliqué ce nom à la ſpirale, qui eſt une courbe plane, c'eſt-à-dire, décrite ſur un plan; mais la plupart l'ont réſervé pour celles qui s'élevent au-deſſus d'un plan en tournant autour d'un corps, come le lierre, les liſerons & les *convolvulus* autour d'un arbre. Pour moi, qui tache d'éviter les périphraſes, j'en reſſerre la ſignification à celles qui tournent autour d'un corps cylindrique ſans s'approcher de leur axe, pour les diſtinguer de celles qui en approchent, que j'appelle *limaces*, en quoi je la diſtingue encore d'une autre courbe qui eſt dans un plan, que l'on appelle le *limaçon de M. Paſcal*, laquelle eſt une eſpece de ſpirale.

Je diviſe encore les hélices en régulieres & irrégulieres; les régulieres ſont celles qui montent autour d'un corps cylindrique d'un mouvement uniforme, comme ſont les vis, dont l'intervalle de chaque révolution, qu'on appelle le *pas de la vis*, eſt toujours égal; les irrégulieres ſont celles dont les pas de chaque révolution augmentent ou diminuent ſuivant une certaine proportion que l'on s'eſt fixée.

PROBLEME XLVIII.

Tracer une hélice ſur un corps cylindrique.

Pour décrire cette courbe, on tracera un cercle autour du cylindre, s'il eſt droit ſur une baſe circulaire, ou une ellipſe s'il eſt ſcalene, mais droit ſur une baſe elliptique, & l'on en diviſera la circonférence en autant de parties égales qu'on voudra, comme (Figure 209) en ſept pour la moitié qui paroît, c'eſt-à-dire, 14 pour le circuit entier; & par ces diviſions on menera autant de paralleles à l'axe du cylindre; enſuite on réglera l'intervalle des révolutions à volonté, & l'on en diviſera un comme OA ou à ſon égal BD, en autant de parties égales qu'on a diviſé la circonférence de la baſe du cylindre (dans l'exemple préſent en 14 parties) & l'on en portera ſur chaque parallele à l'axe une de plus qu'à la précédente. Ainſi commençant à rien au point O, on portera une de ces diviſions ſur la parallele *ag* au point 1, ſur la ſeconde *bh* deux, au point 2, ſur la troiſieme *ci* trois au point 3, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on

Fig. 209.

Fig. 209. soit parvenu à la moitié au point 7; alors on retournera vers le point A en faisant la même augmentation, & continuant ainsi jusqu'au sommet du cylindre.

Si l'hélice est irréguliere, que les divisions de D à B soient dans le rapport des tangentes ou des sécantes, ou d'autres progressions; la construction sera toujours la même, & la même proportion regnera entre les pas de la vis, qu'on a fait régner dans l'intervalle d'un seul.

COROLLAIRE.

D'où il suit que si deux hélices de bases différentes, c'est-à-dire, de différens diametres, font un même nombre de révolutions autour d'un axe commun, les intervalles des pas auront plus grande raison à leur base, plus elles seront petites, & au contraire plus petite raison à l'égard des plus grandes; c'est-à-dire, que les pas de la vis, quoiqu'également distans, seront plus inclinés, & les autres plus couchés.

USAGE.

Ce Problême sert à plusieurs Ouvrages. Premierement à tracer les grandes vis, les colonnes torses, les naissances des voutes tournantes & rampantes, comme la vis Saint-Giles, & les joints de doële des mêmes vis, les limons tournans, que les appareilleurs appellent *la courbe rampante*, le dessous des marches tournantes des vis, les appuis des fenêtres & balustres dans les tours rondes ou creuses, &c. comme nous l'expliquerons au IV[e]. Livre.

Des limaces.

Les limaces sont, comme nous l'avons dit, des hélices qui s'approchent continuellement de leur axe. Or elles peuvent en approcher en telle raison qu'on voudra faire régner entre les lignes droites tirées des points de la courbe perpendiculairement à leur axe; ainsi on peut décrire cette courbe sur tous les corps coniques, sphériques, ou conoïdes & sphéroïdes, ellipsoïdes, paraboloïdes, ou hyperboloïdes, ou tout autre corps formé par la révolution de quelque courbe sur son axe; nous

nous donnons ici pour exemple le cone & la ſphere (*Fig.* 210 & 211.) *Fig.* 210. & 211.

On peut encore faire régner une certaine progreſſion entre les intervalles de chaque révolution de cette courbe, ou les faire égaux ſuivant le deſſein qu'on ſe propoſe.

PROBLEME XLIX.

Tracer une limace ſur un cone ou ſur une ſphere, ou ſphéroïde.

On diviſera la baſe du cone (*Fig.* 210) ou la baſe circulaire ou elliptique d'une hémiſphere ou hémiſphéroïde en autant de parties égales que l'on voudra, par leſquels on tirera autant de lignes droites au ſommet du cone, ou autant de cercles ou ellipſes au pole P de la ſphere ou du ſphéroïde. Enſuite on diviſera le côté du cone en un même nombre de parties, ſi l'on ne veut qu'une révolution, ou ſi l'on en veut pluſieurs en un plus grand nombre, comme du double, triple ou quadruple, & l'on fera ces parties égales ſi l'on veut, ou diminuant ſuivant un certain rapport; par exemple pour le cone, on peut les faire diminuer ſuivant le rapport des paralleles à la baſe d'un triangle iſoſcele formé par deux des côtés du cone & par la premiere diviſion priſe à volonté, & pour l'hémiſphere, par les arcs paralleles à la baſe d'un triangle ſphérique, comme *cd*P (*Fig.* 211) dont la baſe *cd* ſera priſe à volonté pour le premier intervalle; ce qui donnera une échelle de diviſions inégales, qu'on portera ſur chaque ligne du cone tendant au ſommet, comme ſur *a*S (*Fig.* 210) une diviſion, ſur *b*S deux, ſur *c*S trois, & ainſi de ſuite. *Fig.* 210. & 211.

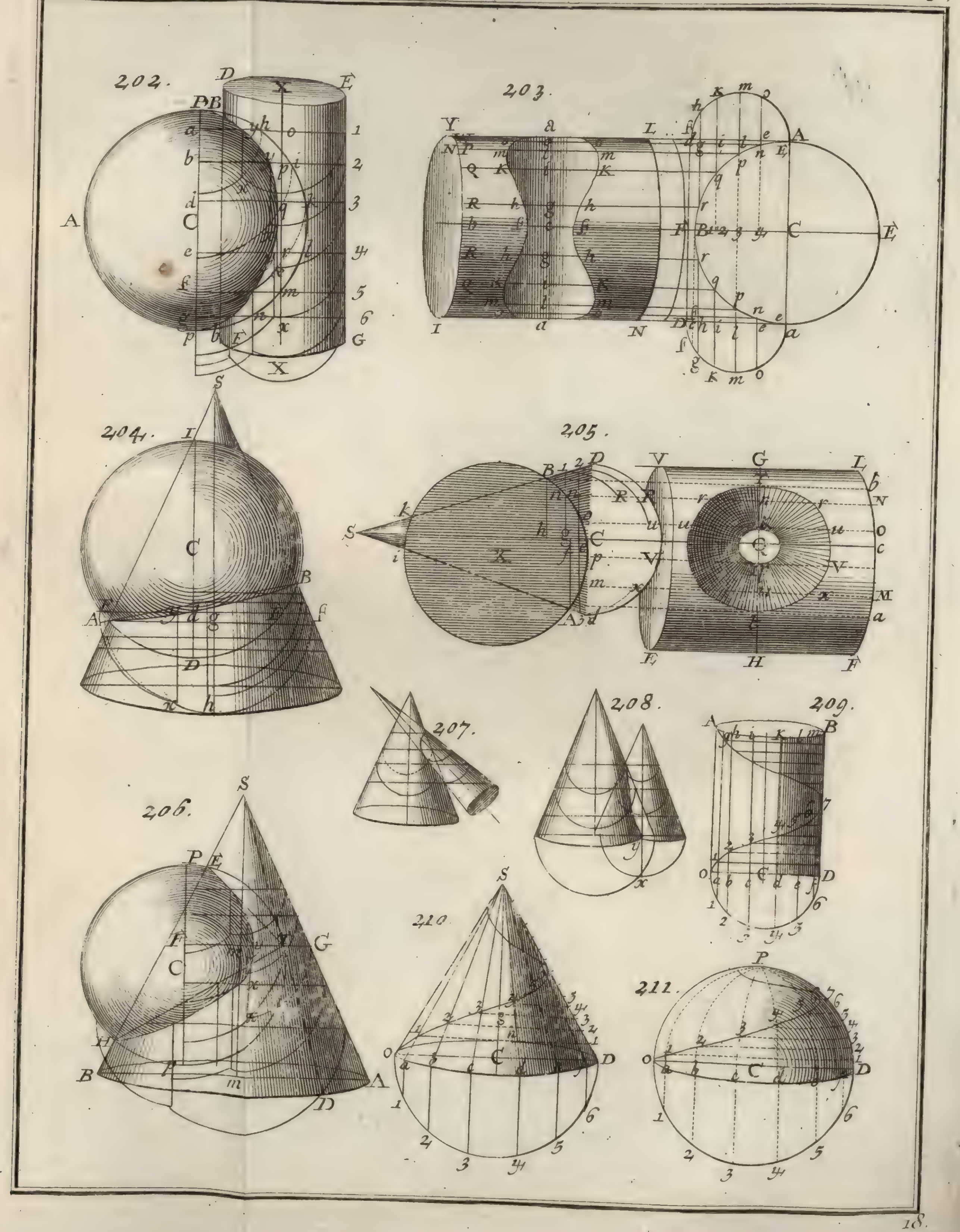
Pour la ſphere, on portera ſur les cercles tendant au pole, les meſures ſuivies de même avec leur augmentation d'une partie ſur chacune.

USAGE.

Il n'eſt pas ſans exemple que l'on ait fait des édifices en limaces. On a gravé une eſtampe que j'ai du projet d'une Chapelle pour le milieu du Louvre, dont le ſommet ſe terminoit en limace; on croit que la Tour de Babel étoit de même, comme on le voit dans le Traité qu'en a fait le P. *Kirker*;

le Cavalier *Borromini* a fait ainſi le chapiteau qui couronne toute la voute de l'Egliſe de Saint Leon de la Sapience, à Rome ; mais ſans avoir recours à l'application de ce Problême dans les Edifices en grand, on la peut trouver aſſez ſouvent dans le petit, pour de certains ornemens de volutes ſaillantes ou rentrantes. La nature nous donne de merveilleux exemples des variétés de cette courbe dans une infinité de coquillages de Mer & de terre ; j'en ai vû (voyez mon voyage de la Mer du Sud en 1716) au Chili de coniques gravés de canelures à côtes entre chaque *pas* ou intervalles de l'hélice qui diminuoient de longueur, de largeur & de profondeur dans une merveilleuſe proportion juſqu'à la pointe, où elles devenoient imperceptibles à la vûe ; ce que le plus habile Artiſan aidé des ſecours de la Géométrie auroit bien de la peine à imiter.




202.
203.
204.
205.
206.
207.
208.
209.
210.
211.



TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

LIVRE TROISIEME.

De la description des divisions des solides.



DANS les deux Livres précédens nous n'avons eu pour objet que la Figure des lignes & des surfaces formées par les sections des corps, & l'art de les décrire. Présentement nous embrassons l'espace compris entre une, deux ou plusieurs sections; c'est-à-dire, les parties solides qui résultent de la division des corps coupés par des surfaces planes ou courbes, & nous nous proposons de chercher les moyens de les représenter sur un plan autant exactement qu'il est possible, afin de trouver les longueurs de leurs côtés, & leurs angles plans & solides, tant rectilignes que mixtes.

Pour m'expliquer en termes de l'art, il s'agit ici de cette espece de *dessein* que les Architectes appellent le *trait* & l'*épure*, dans lequel consiste toute la difficulté de la coupe des pierres.

Je vais tâcher d'éclaircir cette matiere, & d'en donner les

principes en la réduisant à un petit nombre de regles appuyées de leurs raisons, & dont l'application sera d'autant plus facile, que le Lecteur est déja pleinement instruit de la maniere de décrire toutes les especes de courbes qui peuvent y être mêlées.

On sçait qu'il est impossible de représenter exactement un solide sur une surface plane : non-seulement celui qui en a de courbes, mais encore celui qui n'est compris que par des planes, puisqu'elle ne peut jamais en représenter qu'une, & un solide en a au moins quatre, ordinairement dans l'usage de l'Architecture six, & quelquefois davantage. On a donc été obligé de considérer les solides dans les différentes rélations & situations de leurs parties, par le moyen desquelles on parvient à les représenter à différentes reprises.

Tantôt pour connoître la distance horisontale de leurs angles, on les a supposé comme applatis sur un plan horisontal; tantôt pour connoître leur hauteur, on les a conçû comme applatis sur un plan vertical; quelquefois pour connoître d'un coup d'œil toutes leurs surfaces & en voir le rapport, on les a rangé de suite sur une surface plane. Enfin pour sçavoir quels sont les angles que ces surfaces font entr'elles, on en a mesuré les angles mixtes, curvilignes & rectilignes par le moyen des cordes des côtés courbes, ou avec des instrumens; jusqu'ici on n'a rien imaginé de mieux.

On peut donc réduire tout l'art de tracer une *épure* à quatre sortes de descriptions : la premiere a pour objet les mesures horisontales; on l'appelle en termes d'Architecture le *plan*, en langage de Mathématique l'*Ichnographie*, ou la *projection horisontale*. Nous sommes obligés d'adopter ce dernier pour éviter les équivoques dans les raisonnemens Géométriques, où le mot de *plan* signifie en général une surface plane quelconque; secondement, pour éviter les manieres de parler qui renferment une espece de contradiction, comme le dire *le plan d'un point, ou d'une ligne* pour signifier sa projection: troisiemement, pour éviter la cacophonie, lorsqu'il faudra dire *le plan d'un plan*, au lieu de sa projection.

La seconde espece de description des solides a pour objet les mesures verticales; on l'appelle dans le langage des sciences *Ortographie*, & en termes d'Architecture elle a différens noms. Celle qui représente les faces des édifices, ou de leurs parties,

s'appelle *élévation* : celle qui en fait voir les dedans, ſuivant une ſection faite par leur largeur, s'appelle *profil*, & celle qui repréſente auſſi les dedans ſuivant leurs longueurs, s'appelle *coupe* & profil.

La troiſiéme eſpece de deſcription des ſolides, qui fait partie du deſſein de l'épure, a pour objet l'étendue des ſurfaces; on l'appelle en termes de l'Art le *développement*, parce qu'elle raſſemble & étend ſur une ſurface plane, celles dont le ſolide eſt comme enveloppé; celle-ci n'a pas de nom particulier uſité dans les Livres; mais puiſque les précédentes en ont qui ſont dérivés du Grec, rien n'empêche qu'on l'appelle avec feu M. de LAGNY, de l'Académie des Sciences, *l'épipedrographie*. *Mémoires de l'Acad. 1727.*

La quatrieme eſpece de deſcription néceſſaire à l'épure a pour objet les ouvertures des angles rectilignes, curvilignes & mixtes, formés par les termes des ſurfaces planes & courbes, & par l'inclinaiſon qu'elles ont entr'elles. Celle-ci n'a pas de nom propre, on l'appelle la maniere de trouver les *buveaux*, quelques-uns beuveaux ou bevaux, mais plutôt ſuivant l'étimologie du Latin *bivium*, les *biveaux*; on peut avec le même M. de LAGNY l'appeller la *Goniographie*: ces quatre eſpeces de deſſeins ſont eſſentiels à l'épure, & les ſeules néceſſaires; car quoiqu'il y ait une cinquieme maniere de repréſenter les ſolides par la *Scénographie*, c'eſt-à-dire, la perſpective, on n'en peut tirer aucun ſecours pour la coupe des pierres, parce qu'elle change les meſures des ſolides repréſentés, en diminuant les parties qui s'éloignent du devant du tableau.

De l'arrangement des deſſeins dans l'épure.

La confuſion que l'on trouve dans les deſſeins des Livres qui traitent de la coupe des Pierres, vient ſouvent de la multiplicité des eſpeces de repréſentations que l'on raſſemble dans la même épure; car ſouvent on y joint le plan au profil, quelquefois encore à l'élévation, & l'on mêle les uns avec les autres ſans diviſions; ce qui demande une grande attention pour démêler ce qui appartient à chacune; en effet ſouvent la même ligne fait partie du plan & de l'élévation, & ſert encore au profil.

Souvent les objets verticaux ſont renverſés, comme ſi au lieu de monter ils tomboient du haut en bas; quelquefois ils

ſont placés de côté, quoiqu'ils doivent être verticaux ; ſouvent on fait des lignes & des arcs de cercle inutiles à la conſtruction, qui ne ſervent qu'à indiquer les alignemens, les égalités des lignes tranſpoſées, ou l'ouverture de leurs angles : il arrive auſſi, ſuivant les circonſtances, que pour analiſer une projection, on ſe ſert pour plus de commodité & abréger l'opération d'un angle droit qu'on a trouvé fait, quoique pour un ſujet différent. Ce double emploi de lignes trouble l'attention des Lecteurs, ou exige une fatiguante contention d'eſprit pour démêler ces différentes conſidérations.

La néceſſité de raſſembler pluſieurs objets dans une petite Planche rend cet embarras preſque inévitable ; d'autant plus qu'il a ſon utilité pour indiquer plus ſenſiblement leurs rapports.

Malgré les ſoins qu'on a pris pour éviter la confuſion, il eſt bon d'avertir le Lecteur qu'il ne doit compter de connéxité néceſſaire entre les lignes des deſſeins, que celle qui eſt annoncée ou indiquée par le diſcours qu'on y a joint, dans lequel on aura ſoin de dire que cette ligne qui étoit de l'élévation ou du *plan* doit être conſidérée, par une autre ſuppoſition, comme étant du profil ; mais lorſqu'on aura omis cet avertiſſement, & qu'il ſera queſtion de profil, il faut abandonner l'idée qu'on attachoit à une ligne, comme faiſant partie du plan, & prendre celle qui convient au profil dont on a parlé.

Quoiqu'il ſoit plus naturel de mettre chaque eſpece de deſſein à part ; il eſt cependant vrai que cette ſimplicité d'objet indique moins ſenſiblement les rapports des lignes, & que l'on trouve en cela moins de commodité qu'à raſſembler, & même quelquefois à mêler les *plan*, *profil* & *élévation* : on tiendra cependant pour arbitraire l'arrangement de leurs ſituations, les uns auprès des autres, ou dans les autres, au-deſſus, au-deſſous, ou à côté ; pourvû que les parties en ſoient diſtinctement décrites.

CHAPITRE I.

De la projection en général.

NOus avons déja expliqué dans la ſeconde partie du II. Livre, ce que nous entendons par le mot de projection ; il ſuffit de répeter ici que c'eſt la deſcription d'un corps faite par

des lignes perpendiculaires à un plan, tirées de chacun des angles & diviſions réelles ou imaginaires de ce corps ; telle eſt la trace de la goutiere d'un comble qui décrit la Figure de ſon contour ſur la terre. Pl. 19.

On conçoit aiſément, ſuivant cette définition, que le même corps poſé de différentes manieres donne différentes Figures de projection ; ainſi un dez poſé à plat ſur une de ſes ſurfaces, (*Fig.* 212) aura pour projection le quarré ſur lequel il eſt appuyé, parce que les perpendiculaires tirées des quatre angles ſolides qui ſont hors du plan de deſcription, ſont les mêmes que celles qui ſont à la jonction des quarrés perpendiculaires entr'eux ; mais ſi le dez eſt ſuppoſé n'être appuyé que ſur un de ſes angles, les perpendiculaires tirées des ſix ſommets des autres angles formeront ſur ce plan le contour d'un exagone qui ſera régulier, ſi le huitieme angle ſe trouve dans la même perpendiculaire au plan que le premier, comme on voit (*Fig.* 223).

D'où il ſuit : 1°. Que pour faire la projection d'un corps, il ne ſuffit pas d'en concevoir parfaitement la Figure ; mais il faut connoître ou déterminer la poſition de ſes angles ; parce que la variation de cette poſition change les meſures des diſtances horiſontales ou verticales, que l'on cherche dans ce genre de deſſein ; car les perpendiculaires tirées des angles ſolides s'approchent ou s'éloignent, ſuivant l'inclinaiſon des ſurfaces des ſolides, & ſe confondent quelquefois ; de ſorte que deux points différens ne ſont repréſentés que par un ſeul ſur le plan de deſcription.

2°. Qu'une ſeule projection verticale ou horiſontale ne ſuffit pas pour exprimer ſur un plan la Figure, ou la ſituation d'un ſolide à l'égard de ce plan, mais qu'elles ſont néceſſaires toutes les deux ; parce que les mêmes corps en différentes poſitions peuvent avoir la même projection. Ainſi une piramide quadrilatere droite, ou un cone droit, par exemple (*Fig.* 215 & 218) appuyée ſur ſon ſommet, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire au plan de deſcription, a pour projection un quarré, & le cone un cercle, comme s'il étoit appuyé ſur ſa baſe, (*Fig.* 214 & 217).

3°. Parce que les corps différens peuvent avoir la même projection ; ainſi un cone, un cylindre, une vis & une ſphere donnent également un cercle pour projection (*Fig.* 216 217,

Pl. 19. 218, 219 & 220); de même qu'un cube, un parallelepipede & une piramide quadrangulaire donnent aussi un quarré pour projection (*Fig.* 212, 213, 214 & 215); un anneau & une hélice ont également chacun une couronne de cercle ou d'ellipse pour projection (*Fig.* 221 & 222); ou si nous prenons des exemples dans l'Architecture, nous trouverons que le *plan* d'une voute sur le noyau & celui d'une vis Saint-Giles de même diametre ne différent en rien; celui d'une voute en plein ceintre droit surmontée & surbaissée, ou inclinée en descente, donnent aussi le même parallelogramme dans leur projection, ainsi que les voutes cylindriques & les sphériques donnent le même *profil.*

4°. Parce que des corps ronds ont des projections rectilignes égales ou semblables à celles des corps terminés par des surfaces planes, ainsi (*Fig.* 224) un cone couché a pour projection un triangle rectiligne, de même qu'une piramide (*Fig.* 225) & un cylindre ou une vis donne un parallelogramme, aussi-bien qu'un prisme rectiligne (*Fig.* 226, 227 & 228) & même un mixte (*Fig.* 229).

5°. Parce que la projection change souvent la nature des choses, la projection d'une ligne perpendiculaire au plan de description n'est qu'un point; celle d'un plan en pareille situation n'est qu'une ligne; celle d'une ligne courbe qui seroit dans ce plan devient une ligne droite, ou si elle est inclinée à ce plan, elle peut changer d'espece, comme nous l'avons dit au Livre précédent; de cercle, elle peut devenir ellipse, ou d'ellipse elle peut devenir un cercle.

6°. Enfin, parce que de la projection des solides, il en résulte quelquefois des Figures si différentes de celles de leurs surfaces, qu'on ne peut les prévoir qu'avec une grande attention, comme nous l'avons fait remarquer de celle du cube posé sur un de ses angles, lorsque le diametre qui passe par les opposés, est perpendiculaire au plan de description, sa projection est un exagone régulier; pour qu'on n'en doute pas, je vais en donner la démonstration.

Fig. 223. Soit (*Fig.* 223) le cube AE posé sur son angle B; en sorte que sa diagonale SB soit perpendiculaire au plan PL : ayant divisé les trois surfaces quarrées qui comprennent l'angle solide S par des diagonales, comme le quarré ASDG par la diagonale AD, à cause de l'égalité des quarrés, ces diagonales seront

égales

égales entr'elles, & formeront un triangle équilatéral parallele *Fig. 223.* au plan de description, parce que ce triangle est la base d'une piramide triangulaire droite, dont l'axe, qui est partie du diametre, est perpendiculaire au plan de description (par la supposition), donc la projection de ce triangle sera aussi un triangle égal à la base de cette piramide. La même chose arrivera à l'égard des trois autres surfaces du cube, qui comprennent l'angle solide opposé B, dont les divisions des quarrés par des diagonales retrancheront une piramide égale à la précédente, mais renversée & tournée différemment, en sorte que les angles de l'une seront au-devant des faces de l'autre, & à distances égales; puisque, par la supposition, les côtés & leurs inclinaisons sont égaux. Ces deux triangles équilatéraux donneront donc la position de six des angles du cube, & les deux autres qui sont aux extrêmités du diametre, réunis par la projection dans un même point, tomberont au milieu des deux triangles équilatéraux, & seront le centre de l'exagone; donc la projection du cube ainsi posé, est un exagone régulier.

Pour faire connoître les angles élevés & ceux de la projection, on a marqué les uns & les autres des mêmes lettres différenciées par des majuscules.

Il suit de ces remarques, que pour sçavoir si un solide est contenu dans un autre, par exemple, un tétraedre dans un cube, ou un autre solide dans un parallelepide, tels que sont ordinairement les quartiers de pierres de taille; il faut faire autant de projections de ce solide, que le parallelepipede a de surfaces qui ne sont pas répetées dans leurs opposées, c'est-à-dire trois, parce qu'il en a six, & appliquer chacune de ses projections à la face qui lui convient, pour sçavoir si elle n'excéde point.

Dans l'Architecture, ces projections ne se font que sur des plans horisontaux & verticaux, parce qu'on ne s'y conduit que par l'*aplomb* & le *niveau*. Ainsi des trois, il y en a toujours une horisontale, qui est appellée le *plan*, & deux verticales, dont l'une est *le profil*, pour ce qui est vû de côté, & la troisiéme est l'*élévation*, pour ce qui est vû de face. Mais parce qu'un solide peut-être compris par des surfaces inégales de tous côtés, le cas peut arriver qu'on ait besoin de six projections; sçavoir de deux horisontales, & de quatre verticales, c'est-à-dire, une

pour chaque face du parallelepipede dans lequel on doit former le solide.

CHAPITRE II.

De l'Ichnographie, ou Projection horisontale,

En termes de l'Art,

DU PLAN.

DAns le dessein que nous avons de conduire le Lecteur par des principes généraux à la connoissance des propriétés particulieres des sections des corps, pour trouver les modeles des parties qui composent différentes especes de voutes, il auroit suffi de ne faire mention que de celles des spheres, cones & cylindres, comme nous avons fait jusqu'à présent; mais à cause que ce IIIe. Livre est une préparation à la pratique de la coupe des pierres, il nous a semblé a propos d'entrer dans le détail de l'Architecture, & d'en parler le langage, dont nous avons joint ici une explication, à laquelle on pourra avoir recours pour en entendre les termes usités; mais comme elle n'est pas assez ample pour donner une parfaite intelligence des rélations des ceintres, nous commencerons par y suppléer.

Des différences respectives des ceintres.

On sçait que les différentes sections des corps ronds, tels que sont les voutes, produisent différentes lignes à leur surface courbes ou droites, lesquelles ont chacune un nom pour les désigner; les sections transversales & *continues*, sont souvent appellées *ceintres*, les parties de ces sections interrompues par la liaison des voussoirs, s'appellent *joints de doële*. Les sections longitudinales s'appellent *joints de lit*: celles-ci sont droites dans les cones & cylindres, & courbes dans les spheres & les anneaux & hélices; les parties de ces sections qui sont dans l'épaisseur de la voute, s'appellent *joints de tête*.

Les intervales ou divisions des joints de lit doivent être con-

tinués avec une certaine régularité, tantôt en lignes droites paralleles, quelquefois en se rapprochant avec une certaine uniformité, comme concourant à un point fort éloigné; souvent en lignes courbes paralleles, ou concourant à un même point, comme aux voutes sphériques.

Lorsque les joints de lit sont paralleles entr'eux, comme aux voutes cylindriques, il est clair que les ceintres circulaires & elliptiques qui les traversent, doivent être divisés en un même nombre de parties proportionnelles; de sorte que si deux ceintres ne sont pas paralleles entr'eux, dans les voutes en berceau, l'un étant circulaire, l'autre sera nécessairement elliptique, ou tous les deux seront elliptiques, & les divisions de l'un déterminent nécessairement celles de l'autre pour la quantité & la grandeur des *voussoirs*, qui sont les pierres qui la composent. Cette dépendance respective oblige l'Architecte à se déterminer sur la courbe qu'il veut former à une face de la voute plutôt qu'à l'autre, ou à celle qui résulte de la section d'un plan perpendiculaire à son axe. Celui de ces ceintres, auquel il fait le plus d'attention, & qu'il choisit pour faire la division la plus réguliere de ses voussoirs, s'appelle le *ceintre primitif*; l'autre dont la courbure & les divisions dépendent de la suite des joints de lit, & de la différence de position à l'égard de celui-ci, s'appelle *ceintre secondaire*.

Le ceintre primitif est quelquefois réel comme en ABD (*Fig.* 230) où l'on suppose une face biaise, qui doit paroître & subsister; ou simplement imaginaire & supposé comme I *m a*, (*Fig.* 231) où l'on suppose un plan tangent à une tour, dans laquelle on veut faire une porte, dont le ceintre réel, qui ne peut être décrit sur une surface plane, ne peut servir à régler les divisions des voussoirs, de sorte qu'on est obligé, ou de les développer pour l'étendre sur une surface plane, & alors il devient primitif, ou de supposer un ceintre dans un plan tangent à la tour qui est un primitif supposé, parce qu'il ne doit pas subsister, ne servant qu'à déterminer les divisions du réel, qui est le *secondaire*. *Fig.* 230.

Mais si l'on développe le ceintre réel R *m* D sur un plan, pour en faire le ceintre primif, comme lorsqu'on veut que les têtes des voussoirs soient égales, le même ceintre, considéré comme appliqué à la surface courbe de la tour, est un secondaire, soit que la surface soit convexe, comme à la Figure 231,

foit qu'elle foit concave, comme à la Figure 232, où le ceintre ASD eft fuppofé comme primitif, pour régler les divifions du réel AMD dans le deffein de l'épure feulement. Il faut remarquer que foit que ce ceintre primitif foit pris fur la corde de l'arc concave d'une tour, ou fur un plan tangent à la tour parallele à cette corde, il n'en réfulte aucun changement au ceintre réel I *m a* (*Fig.* 231) ou AMD (*Fig.* 232), & que ce ceintre primitif fuppofé, eft le même que celui de l'arc droit; de forte qu'on peut dire alors que l'arc droit eft le ceintre primitif; mais fi la divifion fe fait fur un développement, il devient le fecondaire, en ce que fes divifions en dépendent & deviennent inégales, lorfque celles du développé font égales.

Fig. 231. *Fig.* 232.

Si le ceintre primitif fuppofé n'étoit pas dans un plan parallele à la corde RD qui eft perpendiculaire à la direction de la porte, comme L *b* qui lui eft incliné, alors il y auroit trois ceintres à confidérer, dont les divifions feroient toutes inégales; fçavoir, 1°. celles du ceintre primitif imaginaire; 2°. du ceintre réel à la furface de la tour; 3°. & du ceintre de l'arc droit dans l'épaiffeur de la tour, & chacun de ces ceintres feroit d'une coubure différente; fçavoir, circulaire ou elliptique & ellipfimbre: il faut expliquer ce que nous entendons par l'arc droit.

De l'arc droit.

Le ceintre qui eft la fection d'un plan coupant l'axe d'une voute en berceau à angle droit, s'appelle l'*arc droit*; tel eft l'arc RED (*Fig.* 230) ou ROI (*Fig.* 235 *&* 237) ou ABD (*Fig.* 239). Ce genre de ceintres peut être *primitif* ou *fecondaire*, fuivant l'attention principale que l'on a aux faces, ou à l'intérieur d'une voute. Dans les Figures 230 & 235, il femble être naturellement le fecondaire, fi l'on a principalement en vûe la régularité du ceintre de face apparente ABD. Dans la Figure 239 il eft primitif, fi ABD eft la face apparente, parce qu'elle eft perpendiculaire à la direction du berceau.

D'où il fuit, 1°. que l'arc-droit n'eft à plomb que dans les voutes horifontales, & qu'il eft en talud & furplomb dans les inclinées, comme ROI, (*Fig.* 235).

Secondement, qu'il n'eft jamais parallele aux arcs de faces biaifes à la direction des berceaux, foit qu'ils foient de niveau ou en defcente, comme on voit aux Figures 230 & 235, où l'arc RED, ROI n'eft pas parallele à ABD.

Troisiemement, que l'arc droit de toutes les voutes biaises & en descente, n'est pas d'une courbure ni d'une largeur ou hauteur égale à celle de l'arc de face. Ainsi (*Fig.* 230) supposant l'arc de face circulaire, l'arc droit RED sera surmonté elliptique, dont le petit axe RD sera plus court que le diametre AD; & au contraire (à la Figure 235) si ABD est circulaire ROI sera elliptique surbaissé, dont le demi axe O *c* sera plus petit que le rayon BC. Pl. 19.

Quatriemement, qu'il ne peut y avoir d'arc droit, proprement dit, dans une voute conique, comme dans les trompes, (*Fig.* 236) parce que la surface de sa doële ne peut être à angle droit sur aucun plan, que suivant une ligne tirée de sa base au sommet du cone, dont les côtés sont convergens.

Cependant le P. DERAND appelle *arcs droits* les *biveaux*, c'est-à-dire, les angles de la doële & des lits.

Quelques-uns ont aussi appellé arc droit le ceintre primitif perpendiculaire à l'axe du cone, parce qu'on s'en sert comme de l'arc-droit pour la division des voussoirs.

Il semble par ce que je viens de dire, qu'il n'y a point d'arc droit dans les voutes courbes par leur projection horisontale; mais si l'on fait attention que l'angle que fait un rayon avec un arc au point d'attouchement de sa tangente est réputé droit, ou infiniment peu différent du droit, on reconnoîtra facilement quels sont les arcs droits des voutes sphériques, sphéroïdes & annullaires.

1°. Que tout cercle majeur d'une sphere ABD (*Fig.* 233) est un arc droit. *Fig.* 233.

2°. Que dans les sphéroïdes il y en a deux; sçavoir, *a* S *b* qui est perpendiculaire à l'axe qui passe par les poles du premier, perpendiculairement au plan de la base ou projection du sphéroïde, comme P, *b*, *p*, *a* (*Fig.* 234) & le second sera PS*p*. *Fig.* 234.

3°. Que l'arc-droit d'une voute *annullaire* est celui dont le diametre tend au centre de l'anneau, s'il est circulaire, comme RI (*Fig.* 238), lequel est perpendiculaire à la tangente TN, & au plan de la projection ADFE, soit que la voute soit horisontale, comme la *voute sur le noyau*, ou qu'elle soit inclinée à l'horison, comme la vis-Saint-Giles. *Fig.* 238.

Si l'anneau est elliptique, comme la voute sur un noyau ovale, son arc droit sera la section verticale, perpendiculaire à la tangente au point de division de l'ellipse, qui est la projection

d'un joint de lit ; il en ſera de même pour la vis-Saint-Giles ſur un plan ovale ; alors la direction du diametre de l'arc droit ne tend plus au centre du noyau.

USAGE.

On connoîtra dans la ſuite que l'arcdroit eſt indiſpenſablement néceſſaire pour trouver les biveaux & faire les panneaux ; c'eſt lui ſeul qui détermine les angles mixtes des doëles & des joints, & qui ſert à faire les développemens des ſurfaces courbes des cylindres, parce qu'étant perpendiculaire à toutes les paralleles à l'axe, dont le nombre infini forme la ſurface des berceaux, il donne ſeul les meſures des largeurs de ces ſurfaces, & par conſéquent les intervalles des joints de lit, qui ſont patalleles à l'axe du cylindre : il en eſt de même à l'égard des cylindres pliés ſur leurs axes, d'une courbe circulaire ou elliptique, comme dans les voutes ſur le noyau.

REGLES DU DESSEIN DE L'ÉPURE.

I.

Du plan, ou de la projection horiſontale.

DAns toutes les voutes où l'arc droit & l'arc de face ſont inégaux, il faut commencer par *ſe déterminer ſur le choix d'un des deux pour en faire le ceintre primitif.*

La ſimétrie, la beauté, ou la ſolidité étant les motifs de ce choix, il ne ſera pas difficile de ſçavoir lequel il convient de préferer. Lorſqu'une face eſt apparente, il en faut faire le ceintre primitif, afin que les têtes des vouſſoirs ſoient égales, & que leurs joints ſoient dirigés ſuivant les perpendiculaires à leurs tangentes aux points de diviſion, ſi le ceintre eſt circulaire, elliptique ou de quelqu'autre courbe ; mais ſi les faces ſont cachées, comme lorſqu'une voute eſt terminée par deux murs, il eſt plus commode de prendre l'arc-droit pour le primitif ; car il faut remarquer que ſi l'un eſt circulaire & l'autre elliptique, celui qui ſera pris pour primitif réglera les joints de l'autre en fauſſe coupe, à moins que l'on ne faſſe les lits gauches, parce

que les joints de tête du circulaire tendent à l'axe du berceau, & les joints de tête du ceintre elliptique ne tendent pas au centre de l'ellipse par où passe l'axe du cylindre; de sorte que les lits changeroient d'inclinaison insensiblement, ce qui donneroit un lit gauche, & que l'on doit éviter dans la pratique, à cause de la difficulté de l'exécution.

Remarque sur le choix du ceintre primitif aux voutes extradossées.

Un Architecte est assez le maître de choisir pour ceintre primitif l'art de face, ou l'arc droit, lorsqu'une voute n'est pas extradossée; mais lorsqu'elle l'est, il ne convient pas toujours qu'il choisisse l'arc de face; car s'il s'agit d'un berceau ou d'une voute conique biaise, dont l'arc de face soit circulaire, il est évident (par le Théorême II. du Ier. Livre que) l'épaisseur deviendra plus grande à la clef qu'aux impostes; de sorte que les voussoirs y deviendront plus pesans qu'aux impostes, ce qui est contre la bonne construction, & ce que cependant aucun Auteur de la coupe des pierres n'a remarqué; il convient donc alors de choisir l'arc droit pour centre primitif, le faisant circulaire, ou si l'on veut un peu surmonté. *Fig. 203.*

SECONDE REGLE.

Diviser le ceintre primitif en autant de parties égales qu'on veut avoir de rangs de pierres ou voussoirs, & régulierement en nombre impair.

Cette opération considérée géométriquement, est presque toujours impossible, parce qu'elle dépend de la trisection de l'angle qu'on n'a pas encore trouvée; mais cette précision est inutile dans les Arts, il suffit de chercher ces divisions en tâtonnant, d'autant plus qu'elles sont arbitraires, puisqu'on peut faire sans difformité des voutes de pierres d'une largeur inégale, pourvû que chaque rang soit exactement parallele, & que la différence des largeurs soit peu sensible.

Nous ajoutons que les divisions doivent être en *nombre impair*, afin qu'il ne se trouve point de joint au milieu du ceintre; mais une pierre également appuyée sur les deux côtés de la

voute qu'elle doit fermer dans l'exécution, on l'appelle pour cette raifon *la clef*, nom qui n'eft pas affecté à une feule pierre, mais au rang de vouffoirs qui eft le plus élevé : ce n'eft pas qu'un joint fur le milieu d'un ceintre tirât beaucoup à conféquence pour la folidité ; mais il choqueroit la vûe & la bonne ordonnance.

Il en faut cependant excepter les pans des voutes fphériques établies fur un quarré ; on doit leur tracer un joint au milieu dans l'épure feulement, mais non pas dans l'exécution, parce que ce joint n'eft que l'angle d'un vouffoir qui fait enfourchechement, dont les branches fe réuniffent à cette ligne du fommet ; c'eft pourquoi on divife le nombre des vouffoirs de chaque côté en parties égales.

Par la même raifon de fimétrie, il ne convient pas de divifer le côté d'un ceintre, depuis la clef jufqu'à l'impofte, en plus grand nombre de vouffoirs que l'autre, à moins que les impoftes ne foient pas de niveau entr'elles, comme dans les arcs rampans, ou que la quantité des vouffoirs foit affez grande de chaque côté, pour qu'on ne s'apperçoive pas d'un rang de plus ou de moins ; c'eft pourquoi les arcs rampans peuvent être divifés en nombre pair.

La raifon pour laquelle il faut commencer par la divifion du ceintre primitif, eft qu'il faut avoir la projection horifontale des joints de lit de chaque rang de vouffoir, qu'on ne peut tailler qu'après en avoir déterminé les largeurs par le nombre qu'en doit contenir le contour du ceintre, & que lorfque les voutes font biaifes, ces largeurs de tête deviennent inégales, foit dans les arcs de face, foit dans les arcs-droits qui ne font pas paralleles entr'eux ; de forte qu'il faut prévoir ce que la largeur d'une tête biaife doit donner à l'arc droit, ou ce que celle de l'arc droit donnera d'augmentation à l'arc de face biaife.

TROISIEME REGLE.

Divifer les arcs extérieur & intérieur du ceintre primitif, qui comprennent l'épaiffeur de la voute, en parties proportionelles par des perpendiculaires à ces arcs aux points de leurs divifions, pour régler l'inclinaifon des joints de tête.

Nous avons donné au II Livre, Problêmes 26, 27 & 28, la

la maniere de tirer ces lignes, qu'on appelle les *joints de tête*, comme 1 1, 2 2, 3 3, 4 4 (*Fig.* 237, 238, 239 & 240) non-seulement pour les ceintres circulaires, mais aussi pour toutes sortes de courbes des sections coniques, & nous avons fait voir que la pratique des ouvriers n'est pas exacte pour d'autre courbe que pour le cercle. PL. 19.

Sur quoi il y a trois choses à remarquer. La premiere, que l'on doit tirer les joints de tête perpendiculairement aux tangentes des courbes des ceintres, aux points de leur division, dans les arcs de face seulement, où l'on a la liberté de les incliner comme l'on veut; mais non pas aux ceintres elliptiques des arcs-droits lorsqu'ils sont secondaires, parce que les lits des voussoirs ne seroient pas continués dans un même plan, comme nous l'avons dit ci-devant.

La deuxieme, que lorsque le ceintre primitif est circulaire; les joints du secondaire elliptique, doivent être tirés au centre de l'ellipse, plutôt que perpendiculairement à la tangente sur la division, parce que les plans des lits doivent tous s'entrecouper dans l'axe du berceau cylindrique, comme on l'enseignera au IVe. Livre de différentes manieres.

La troisieme, qu'aux arcs de face elliptiques, il faut se contenter de faire les joints de tête perpendiculaires aux arrêtes de doële, parce qu'on ne peut les faire en même-tems perpendiculaires à celle de l'extrados d'une ellipse concentrique semblable, que par le moyen d'une courbe qui ne convient ni au joint de tête ni au lit, qu'il faut affecter de faire toujours plan. La raison est que les arcs des ellipses asymptotiques, c'est-à-dire, concentriques & semblables, ne sont pas paralleles comme ceux de deux cercles, par conséquent la perpendiculaire à la tangente de l'une ne peut se réunir avec celle de l'arc proportionnel de l'autre.

La premiere raison sur laquelle est fondée cette division proportionelle de l'arc extérieur & de l'intérieur, qui comprennent l'épaisseur de la voute, concerne la solidité, parce que les têtes des voussoirs deviennent par cette construction en forme de coin plus large du côté extérieur que de l'intérieur; la circonférence de l'un étant plus grande que celle de l'autre, les parties aliquotes en sont aussi plus grandes, de sorte que la pierre ne peut passer par l'ouverture inférieure de l'intervalle de deux voussoirs, qui est plus étroit à la doële qu'à l'extrados;

ainſi étant preſſée par ſa peſanteur contre les vouſſoirs collatéraux, qui ſe ſervent mutuellement d'appui les uns aux autres, elle eſt ſoutenue en l'air par la réſiſtance des derniers appuis, qui ſont les piédroits, leſquels doivent avoir aſſez de force pour contrebalancer l'effort que ces vouſſoirs ou eſpeces de coins font pour les écarter.

Nous avons encore deux autres raiſons de cette conſtruction ; la premiere concerne la ſimétrie, afin de conſerver toujours une inclinaiſon uniforme des joints de tête ſur la courbe du ceintre ; car quand même les parties de l'arc extérieur & de l'intérieur ne ſeroient pas proportionnelles, la voute n'en ſubſiſteroit pas moins, pourvû que celles de l'intérieur ſoient toujours plus petites que celles de l'extérieur ; il n'en réſulteroit d'inconvénient que de la difformité, & une inégale impulſion des vouſſoirs contre leurs collatéraux.

La ſeconde raiſon eſt pour une plus grande ſolidité, parce que les plans qui paſſent par les joints de tête, qu'on appelle les lits, étant perpendiculaires à la tangente de l'arc au point de ſa diviſion, font avec la doële de part & d'autre le plus grand angle qu'ils puiſſent faire, qui eſt le droit, ou infiniment peu différent du droit ; car ſi on le faiſoit obtus d'un côté, il rendroit l'autre aigu.

Or il importe que les réſiſtances des *arrêtes*, c'eſt-à-dire des angles des pierres, ſoient égales pour porter également la charge, car il eſt clair que la plus forte feroit caſſer la plus foible, comme l'expérience le fait voir aux platebandes, où l'on eſt forcé d'en agir autrement ; ce que nous ferons remarquer au Livre ſuivant, en donnant les moyens d'y remédier.

QUATRIEME REGLE.

Abaiſſer des perpendiculaires de chacun des points de diviſion de l'arc extérieur & de l'intérieur ſur le diametre commun prolongé où il le faut, pour en avoir la projection ſur une ligne droite.

Fig. 237, 238 & 239. Soient (*Fig.* 237, 238 & 239) les arcs ABD extérieur, & *a b d* intérieur, diviſés en parties proportionnelles A 1, 1 2, 3 4, & *a* 1, &c. par les lignes 1 1, 2 2, 3 3, 4 4, on abaiſſera ſur le diametre commun *a d*, & ſur ſon prolongement AD des perpendiculaires de chaque point de diviſion 1, 2, 3, 4, leſquels

les pour l'arc extérieur (*Fig.* 239) feroient 1 E, 2 F, 3 G, 4 H, & pour l'intérieur 1 *e*, 2 *f*, 3 *g*, 4 *h*, pour avoir les projections des divifions de l'arc extérieur aux point E, F, G, H, & de l'intérieur aux points *e*, *f*, *g*, *h*. Pl. 19. *Fig.* 239.

Les perpendiculaires dont il eft ici queftion, font ordinairement en œuvre des verticales, c'eft-à-dire, en termes de l'art des *à-plombs*; & lorfque le diametre du ceintre n'eft pas horifontal, comme il arrive aux arcs rampans, au lieu du diametre on fubftituera une ligne horifontale, jufqu'à laquelle on prolongera ces perpendiculaires au-deffous du diametre incliné.

La raifon de cette opération eft qu'elle fournit une maniere commode de trouver l'inclinaifon de chaque corde des arcs du ceintre divifé en vouffoirs, en ce que chacune de ces cordes devient l'hypotenufe d'un triangle rectangle, dont la projection donne la longueur de la jambe horifontale *a e* pour le premier de l'intérieur a*e* 1 (*Fig.* 239) & *ef*, ou fon égale 1 *K* pour le fecond triangle 1 K 2; de forte qu'il ne refte plus qu'à trouver la hauteur de l'autre jambe du triangle rectangle *e* 1 ou K 2, pour avoir les deux extrêmités de l'arc, ou de fa corde, *a* & 1, ou 1 & 2 pour avoir fa pofition à l'égard de l'horifon; ce que la différence des perpendiculaires fur le diametre donne facilement, en retranchant de la hauteur 2 *f* la premiere hauteur *e* 1.

Il eft vifible que ces différences de hauteurs ou ces hauteurs à l'impofte *a* font les finus droits de l'inclinaifon des cordes des divifions des ceintres, & que les lignes horifontales trouvées par la projection *a e*, *ef* font leur finus de complément.

Or, avant que de creufer les arcs dans la pierre, on commence toujours par en trouver les cordes, pour plufieurs raifons, qu'on verra dans la fuite. Cette pratique eft la fondamentale de toutes les projections, on la trouvera répetée à chaque trait de la coupe des Pierres au IVe. Livre; *c'eft pourquoi il eft bon d'y faire attention.*

Il faut remarquer que quoique les lignes qui font la projection des arcs foient verticales dans l'exécution, il n'importe dans le deffein de l'épure en quelle fituation on les trace, pourvû qu'elles foient toujours perpendiculaires à une ligne fuppofée horifontale.

Cet avertiffement n'eft pas inutile pour les Commençans qui trouvent étrange que dans l'épure on place les ceintres quel-

Fig. 239. quefois dans une ſituation renverſée, ou pour la commodité de l'arrangement de la Figure, à laquelle on joint le plus ſouvent les parties contigues, ou pour éviter la confuſion des lignes qui ſe croiſent, ou pour s'accommoder à la place du papier ou du mur ſur lequel on fait le trait.

L'imagination doit redreſſer les plans couchés ſur d'autres plans, avec leſquels ils doivent faire des angles droits, aigus ou obtus; or en quelque ſituation qu'on les ſuppoſe, les perpendiculaires à leur commune interſection donneront toujours les mêmes points de projection des arcs; ainſi (*Fig.* 239) ſi l'on ſuppoſe les arcs BD, MD & *bd*, *pd* égaux entr'eux, & également diviſés aux points 3, 4, *o* & *n*, il eſt évident que les perpendiculaires tirées à leur interſection commune CD, donneront les mêmes points de projection *g* & *h* pour les points *o* & *n*, comme pour les points 3 & 4; ainſi dans les traits, on trouvera des ceintres placés indifféremment en tout ſens, ſuivant la commodité de la figure & du papier.

CINQUIEME REGLE.

Mener par les points de projection des diviſions des ceintres, des lignes droites ou courbes, comme il convient à la direction des joints de lit de chaque eſpece de voute, qui en expriment la projection.

Fig. 237. & 238. Soit (*Fig.* 237 & 238) la ligne *a d*, le diametre d'un ceintre ſur lequel on a trouvé par la projection les points *e*, *f*, *g*, *h*, qui expriment les diviſions des joints 1, 2, 3, 4, ſi la voute eſt cylindrique comme à la Figure 237; pour trouver la direction des joints de lit, & la tracer, il ne s'agit que de mener des paralleles à l'axe, ou aux côtés du berceau par les points *e*, *f*, *g*, *h*, comme *e k*, *f l*, *g m*, *h n*, & ſi le berceau n'eſt pas droit, mais tournant, comme une voute ſur le noyau circulaire (*Fig.* 238) au lieu de lignes droites, on tirera des arcs de cercles concentriques à ſes côtés, ou des arcs d'ellipſes, ſi cette voute tourne en ellipſe, & l'on aura la direction des joints de lit, comme *ekp*, *f*L *q*, *gmr*, *hns*.

Fig. 233. Si la voute eſt ſphérique, comme à la Figure 233, du point C pour centre, il faut décrire autant de cercles concentriques par les points de projection des joints; on aura de même la direction de ces joints, qui eſt encore parallele aux piédroits de la voute.

Enfin si la voute est conique, comme à la Figure 240, ayant trouvé la projection des divisions du ceintre primitif AMB, aux points F, D, N, O, on tirera par ces points & par le sommet intérieur du cône S les lignes SF, SD, SN, SO, qui seront les directions des joints de lit. Fig. 240.

On voit par là que dès qu'on a la projection des divisions du ceintre primitif, on a aussi la direction des joints de lit exprimée sur le plan horisontal.

Il faut seulement excepter de cette remarque les voutes sphériques ou sphéroïdes, dont les joints de lit sont dirigés à des poles horisontaux, parce que leurs projections sont des ellipses qui se croisent aux poles, comme les sommets de deux cônes égaux tournés en sens contraire sur un axe commun, qu'on pourroit inscrire dans le sphéroïde.

La raison de cette opération est que les voussoirs doivent être couchés suivant leur plus grande longueur dans une situation horisontale, ou qui en approche autant qu'il est possible, pour leur donner une meilleure assiette; or lorsqu'ils sont rangés suivant la direction d'un berceau horisontal, où ils sont toujours horisontaux dans un sens, ils s'appuyent totalement sur leurs lits; mais dans les voutes inclinées, ils appuyent sur leurs têtes, quelquefois autant que sur leurs lits.

Secondement, on prolonge la direction des joints de lits dans la longueur, ou dans le circuit de la voute, afin de leur donner la grace d'une simétrie de lignes droites ou courbes paralleles aux impostes, lesquelles font une espece d'ornement dans les voutes sphériques; & si on s'écarte de cette disposition en inclinant les joints, c'est encore pour en faire un ornement plus singulier par un arrangement d'arcs.

On pourroit observer une pareille simétrie à l'égard des joints montans, qu'on appelle joints de doële, qui les traversent, comme je l'ai vû exécuté au Pont d'Avignon sur le Rhône, dans la partie qui subsistoit sur le petit bras de la Riviere; mais il en résulte deux inconvéniens, l'un pour la construction, en ce que l'on n'a pas la liberté d'y employer des pierres de longueurs inégales, l'autre pour la solidité, parce que les parties ne sont pas liées ensemble; de sorte que, dans l'exemple que je viens de citer, le quart, la moitié & même les deux tiers du Pont pouvoient tomber sans entraîner le reste, ce que l'Architecte avoit peut être fait à dessein.

Il peut encore arriver qu'une partie de voute s'affaiſſe davantage en ôtant les ceintres que les voiſines, dont l'appareil a pu être mieux exécuté, & que cela faſſe ainſi des inégalités dans la doële ; enfin l'uſage eſt de prolonger par une ſuite réguliere les joints de lit, & non pas ceux de doële, qui ne doivent faire aucune ſuite que lorſqu'on veut affecter de la déliaiſon.

Les lignes de la projection des joints de lit, quoique ſimples dans l'épure, ſont la repréſentation de trois lignes de la voute ; ſçavoir, de l'intervalle vuide qui reſte entre deux vouſſoirs, que l'on remplit quelquefois de mortier, & des deux angles ou arrêtes de ces deux vouſſoirs, qui ſe touchent à la ſurface de la doële ; c'eſt pourquoi ou les appelle en termes de l'art *le plan des arrêtes des joints de lit* : diction impropre qu'on ne peut adopter, puiſqu'on ne peut dire le plan d'une ligne, mais bien la *projection* d'une ligne.

L'on verra au Livre ſuivant de quel uſage ſont les projections des joints de lit ; nons dirons ſeulement à l'égard des voutes cylindriques, qu'elles ſervent à couper proportionnellement les diametres des différens ceintres, ſur leſquels élevant des perpendiculaires égales à celles qui tombent des diviſions du ceintre primitif, on trouve les hauteurs & les diviſions des

Fig. 239. joints de chaque ceintre ; ainſi (*Fig.* 239) à cauſe des paralleles *ap*, *ee*, *ff*, &c. les diametres *ad* & *pq* ſont diviſés proportionellement, de même que *pq* & *rs* ; de ſorte que le diametre *ad*, projection de l'arc primitif *a*, *b*, *d*, eſt diviſé proportionellement, au diametre *rs* ; & parce que les hauteurs du berceau ſont ſuppoſées égales par tout, en faiſant *yt*, *zu* égales à *e* 1, *f* 2, on aura les diviſions du troiſieme ceintre ; ce qui ſera expliqué plus au long dans la ſuite.

Si après avoir fait la projection des joints de lit de la doële ou intrados, on en fait autant pour ceux de l'extrados ; on trouvera les points des diviſions des ceintres extérieurs, leſquels étant joints par une ligne aux intérieurs, donneront l'inclinaiſon des plans des lits. Mais pour ne pas multiplier les lignes, on ne tire ces projections que dans le beſoin ; nous les omettons preſque toujours dans cet Ouvrage, pour éviter la confuſion dans les traits de l'épure, où elles cauſent un embarras qui n'eſt pas un petit obſtacle à l'intelligence des traits de la coupe des pierres.

Pour faire la projection des joints de lit des voutes coniques,

dont les ſommets ſont loin, ou ſeulement hors de l'étendue de la ſurface ſur laquelle on la veut tracer, il ne ſuffit pas d'avoir la projection des joints d'un ceintre primitif, il en faut un ſecond, parce que ces lignes n'étant pas paralleles entr'elles, doivent tendre à un point qui eſt le ſommet du cone; & ſi le ſecond ceintre n'étoit pas parallele ou ſemblable au primitif, on pourroit être embaraſſé pour alligner ces joints, dont il n'y a qu'un ſeul point donné par la projection ſur le diametre du ceintre primitif; voici un moyen aiſé de le faire.

PROBLEME I.

Par un point donné auprès de deux lignes convergentes, en mener une troiſieme qui tende au même ſommet de l'angle qu'elles feroient ſi elles étoient prolongées.

Soient (*Fig.* 241 & 242) les lignes AB & CE inclinées entr'elles, & le point D entre les deux ou au-dehors; on tirera à volonté par ce point la ligne DAC (*Fig.* 242) ou ADC (*Fig.* 241) qui coupe les deux lignes données en A & en C; on lui menera enſuite une parallele BE, à telle diſtance qu'on voudra, & les diagonales AE, BC par les points où cette parallele coupe les lignes données. Du point D par H, ſection des diagonales, on tirera DG, & tranſportant la grandeur GE, de B en X, on tirera DX qui ſera la ligne cherchée. *Fig.* 241 & 242.

DEMONSTRATION.

A cauſe des triangles ſemblables ADH, EGH, on a AD : EG : : AH : EH, & les triangles ſemblables ACH, EBH donnent AH : EH : : AC : BE; donc auſſi AD : EG ou BX : : AC : BE; *ce qu'il falloit faire.*

SIXIEME REGLE.

Les lits des voutes cylindriques & coniques doivent être, autant qu'il eſt poſſible, des ſurfaces planes.

La raiſon eſt, que la ſurface plane étant la plus ſimple, elle eſt par conſéquent la plus facile à exécuter, & la plus propre à

s'adapter sur une semblable; en sorte que l'intervalle des joints devienne le moindre qu'il est possible dans l'exécution. On éprouve en effet que lorsque les surfaces sont courbes aux lits & aux joints, elles sont rarement assez bien exécutées dans leur concavité ou leur convéxité pour que l'une s'ajuste bien dans l'autre; on est toujours obligé d'y retoucher, & de les présenter souvent plusieurs fois avant que l'une & l'autre surface s'ajustent bien ensemble. C'est par cette raison, que plutôt que de faire des lits gauches, on aime mieux les faire en fausse coupe, comme dans les descentes biaises, & dans ce trait qu'on appelle *la corne de vache*, où l'on tire les joints du centre du petit ceintre, lequel étant excentrique au grand, ne peut avoir pour joint la même ligne, puisque le rayon du petit ne peut pas être perpendiculaire aux arcs du grand, dont les rayons partent d'un autre point.

On pourroit cependant excepter certaines voutes irrégulieres, comme des berceaux elliptiques par un bout, & circulaires par l'autre, dont les faces sont apparentes, parce qu'outre la difformité qui en résulteroit sur chaque face, où les joints de tête seroient en fausse coupe, les lits plans pourroient couper les doëles à angles trop aigus, qui seroient sujets à faire casser les arrêtes des voussoirs en les taillant, en les posant, ou à la seule charge.

SEPTIEME REGLE.

Les lits des voutes sphériques ou sphéroïdes sont des surfaces courbes.

Fig. 233. La raison est, qu'ils sont formés par la révolution des joints de tête *e* 1, *f* 2, *g* 3, autour de leur axe BC auquel ils sont inclinés; d'où il suit qu'ils sont alternativement concaves & convexes pour s'adapter les uns dans les autres, comme des cornets.

REMARQUE.

Les lits des voutes cylindriques, sphériques, & coniques régulieres sont des surfaces qui ont toujours deux côtés paralleles, soit qu'elles soient planes, ou qu'elles soient courbes.

La raison est, que les voutes sont ordinairement d'une même épaisseur; or comme les lits s'étendent du dedans au dehors, ils

ils ſont terminés d'un côté par la doële, & de l'autre par l'extrados, qui ſont paralleles, au moins horiſontalement.

Et quoique la voute ne ſoit pas extradoſſée d'une égale épaiſſeur, ſi elle eſt cylindrique & qu'elle s'épaiſſiſſe vers les reins, (ſuivant la courbe que M. PARENT a trouvé pour balancer la pouſſée par l'augmentation d'épaiſſeur des vouſſoirs, dont on parlera au IVe. Livre) il ſeroit encore vrai que les lits auroient deux côtés paralleles entr'eux, parce que cette épaiſſeur coupée ſuivant la direction de la voute, ſeroit toujours la même à chaque lit, la différence ne tombant que ſur les ſurfaces des joints de doële ou de tête, & non pas ſur les lits, où la puiſſance qui réſiſte au poids doit toujours être égale, à égale diſtance du point d'appui.

HUITIEME REGLE.

Pour connoître ſi l'on peut prendre des meſures ſur une projection, il faut examiner ſi l'objet qui eſt projetté, étoit parallele au plan de deſcription.

Nous avons donné la raiſon de cette regle, lorſque nous avons démontré que la projection faite par des lignes perpendiculaires à un plan, racourciſſoit toujours l'objet projetté, qui n'étoit pas parallele à ce plan, parce que ſa longueur étoit l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont la projection n'eſt que le côté. C'eſt par cette raiſon, que pour avoir les meſures des vouſſoirs des deſcentes biaiſes, il en faut faire deux projections, l'une horiſontale qui donne des meſures trop courtes, & l'autre ſuivant la rampe ſur un plan qui lui ſoit ſuppoſé parallele. Ainſi l'on verra dans le IVe. Livre, que quoique la maniere de tracer une voute en deſcente biaiſe rachetant un berceau par équariſſement, ſoit la même que celle de tracer une porte biaiſe en ſurplomb, il faut meſurer le biais de la porte ſur le plan de niveau, & celui de la deſcente ſur le plan incliné, appellé *plan ſuivant la rampe*, parce que le plan de niveau eſt trop court; ce qui fait voir la néceſſité de faire un profil des rampes, ou ce qui eſt la même choſe, leur projection ſur un plan vertical, pour faire enſuite une nouvelle projection ſur un plan incliné, par le moyen duquel on puiſſe trouver les meſures des vouſſoirs, dont les joints de lit ſont paralleles à la rampe.

CHAPITRE III.

De l'Ortographie, ou de la projection sur un plan vertical.

I°.

DU PROFIL.

ON ne peut trouver par le moyen de la projection horisontale ou *plan* ichnographique, que des mesures horisontales, comme nous venons de le dire; mais parce qu'on a aussi besoin des mesures verticales, & quelquefois des projections sur un plan incliné, qu'il faut rapporter à un plan vertical, cette maniere de dessein, qu'on appelle *profil*, n'est pas moins nécessaire que la précédente, qu'on appelle *le plan.*

La projection verticale change de nom, suivant la situation dans laquelle on représente les objets; s'ils sont représentés par le côté, suivant leur profondeur on l'appelle *profil*; s'ils sont représentés dans leur intérieur, suivant une longueur parallele à leur surface qu'on suppose ôtée, on l'appelle *coupe*; & s'il sont vûs en face, on l'appelle *élévation.*

Cette différence qui ne consiste que dans la dénomination, n'en fait aucune dans la maniere de faire les représentations. C'est toûjours une projection sur un plan vertical, & à bien prendre la chose, c'est encore la même que pour faire la projection horisontale; car il n'y a qu'à supposer une position de plan vertical, au lieu d'un plan horisontal, & mener sur ce plan des lignes horisontales au lieu de verticales, par les angles ou divisions de l'objet. S'il ne s'agissoit ici d'introduire le Lecteur dans les principes d'un art, dont il faut lui donner des idées distinctes, nous aurions confondu le plan, le profil & l'élévation sous le même nom de *projection*; car les regles qui en constituent la différence ne sont purement qu'accidentelles.

PREMIERE REGLE.

Pour les voutes cylindriques.

Un ceintre ſuppoſé en ſituation verticale étant donné, il faut mener par tous les points de ſa diviſion en vouſſoirs des lignes horiſontales, juſqu'à la rencontre d'une ligne verticale ou ſuppoſée telle, pour en faire le profil.

Cette regle ne differe de la quatrieme du Chapitre précédent, qu'en ce que ces lignes ne ſont pas menées ſur le diametre horiſontal, mais ſur une ligne qui lui eſt perpendiculaire, comme AE (*Fig.* 243) ſur le rayon CA, ſur laquelle on a mené les paralleles à l'horiſon BE, 4*f*, 3*g*, 2*h*, 1*i*, pour avoir les hauteurs des points 4, 3, 2, 1, raſſemblées ſur cette ligne AE. PL. 20. *Fig.* 243.

On pouvoit au lieu des horiſontales BE, 4*f*, 3*g*, &c. abaiſſer des perpendiculaires 4*p*, 3*q*, 2*r*, 1*s*, comme l'on a fait ci-devant pour la projection horiſontale, & tranſporter avec le compas la longueur de chacune de ces lignes ſur AE, à commencer du point A; ſçavoir, *p* 4 en A*f*, *q* 3 en A*g*, &c. & l'on auroit eu les mêmes points E, *f*, *g*, *h*; mais il convient pour la pratique de les chercher par des perpendiculaires ſur AE, parce qu'elles en font connoître les origines, & le point de diviſion qu'on a voulu repréſenter. Cette méthode empêche la confuſion, d'autant plus que chaque point de la ligne AE en repréſente toujours deux, lorſque les ceintres ſont également diviſés dans chacune de leurs moitiés, comme ils le ſont ordinairement, ou doivent l'être pour plus de régularité; ce qui fait que dans nos Figures de profil, 243 & 244, nous ne mettons qu'un quart de cercle, qui eſt une moitié de ceintre, au lieu du demi-cercle qui fait un ceintre tout entier. On peut remarquer qu'il eſt indifférent de placer la verticale du profil hors du cercle, comme AE, à la Figure 243, ou dans le cercle, comme *h*R, à la Figure 245.

La raiſon pour laquelle on raſſemble ainſi toutes les hauteurs des diviſions d'un ceintre ſur une ſeule ligne, eſt premierement pour faire voir l'effet d'une voute vûe de côté, où les directions des joints de lit ſe reſſerrent à meſure qu'ils approchent du ſommet, quoiqu'en effet ils ſoient diſtribués autour du ceintre à diſtances égales.

PL. 20. Secondement, pour changer la direction de ces joints, lorſque les berceaux ſont inclinés, comme à la Fig. 245, ou ſe rencontrent ſous quelque angle que ce ſoit, comme on voit à la Figure 244, ce qui détermine les hauteurs inégales des berceaux de même largeur, qui ſont inclinés entr'eux.

Troiſiemement, pour trouver les hauteurs des diviſions des ceintres des faces inclinées à l'horiſon; car en les ſuppoſant ſur un plan vertical, comme CBA (*Fig.* 244) & les raſſemblant ſur une ligne auſſi verticale CB; il ne s'agit plus que d'incliner cette ligne, comme en C *b*, dans la ſituation où elle doit être à l'égard de l'horiſon, c'eſt-à-dire, ſuivant ſon talud, & par des arcs de cercle B *b*, *fn*, *gm*, &c. on aura toutes les hauteurs de ces diviſions *b* V, *nu*, *mt* l*x*, *ky*, leſqu'elles ſont différentes des premiers BC, 4*p*, 3 *q*, 2*r*, 1 *s*, qui étoient plus grandes.

SECONDE REGLE.

Mener des paralleles à la direction des voutes en berceaux, par les points de leur projection ſur une ligne verticale, pour y marquer les joints de lit, & lorſque ces paralleles rencontrent une ligne de jonction de deux berceaux, reproduire ces mêmes lignes parallelement à la direction du ſecond berceau, & ainſi d'un troiſieme.

Fig. 244. & 245. Cette regle ſe comprendra facilement par l'exemple de la Fig. 245, où l'on a repréſenté une deſcente *hnp* R, & à la Figure 244, une autre HD, qui aboutit à deux berceaux horiſontaux EDC *b* dans le bas, & HG, c^3, b^3 dans le haut.

Ayant trouvé par la regle précédente les diviſions de la ligne C *b*, égales à CB, on tirera par les points trouvés *n*, *m*, *l*, *k*, les paralleles *nx*, *my*, *l*Y, *kz*, juſqu'à la rencontre de la ligne ED, qui repréſente le plan de l'ellipſe commune aux deux cylindres EDC *b* & HD, & par les points *x*, *y*, Y, *z*, on tirera autant de paralleles à la ligne EH ou DG, qui donneront les intervalles des joints de lit du ſecond berceau, plus reſſerrés juſqu'à la ſeconde ligne HG, d'où on les reproduira parallelement à H b^3, direction du troiſieme berceau, où ils le ſeront encore plus. On continueroit de même pour les directions des lits d'un quatrieme, s'il y en avoit.

La raiſon de cette opération eſt que les joints de lit doivent être continués en ligne droite, parallelement à la direction des

piédroits des voutes & à leurs impostes : c'est pourquoi ils sont représentés par des lignes paralleles dans le *profil*, comme nous l'avons dit du *plan* ; la seule différence est que les paralleles de la projection horisontale se resserrent vers les impostes, & que dans le profil elles se resserrent vers la clef, & les intervalles de ces paralleles, mesurés perpendiculairement, sont les sinus droits de l'inclinaison des cordes des arcs de chaque voussoir, comme les intervalles des paralleles de la projection horisontatale, sont les sinus de leurs complémens. Ainsi ayant trouvé les uns & les autres par ces deux sortes de projection, on a les deux jambes du triangle rectangle, dont l'hypotenuse est la corde de l'arc du ceintre que comprennent les divisions de chaque voussoir ; par conséquent on a la position de cette corde à l'égard de l'horison, & l'angle qu'elle doit faire avec la corde de l'arc suivant, soit qu'il soit portion de cercle ou d'ellipse.

TROISIEME REGLE.

Transporter toutes les perpendiculaires tirées des divisions du ceintre primitif au rayon vertical, sur le demi-diametre de chaque berceau, pour avoir la courbe des ceintres secondaires, tant des arcs-droits, que des inclinés.

Soit (*Fig.* 244) le quart de cercle CBA, moitié du ceintre primitif, divisé à sa circonférence aux points 1, 2, 3, 4 ; ayant tiré par ces points des perpendiculaires à son demi-diametre vertical, comme 1 *i*, 2 *h*, 3 *g*, 4 *f*, on les transportera sur tous les différens demi-diametres des berceaux. 1°. Comme l'incliné en talud C *b*. 2°. le vertical *b* V, qui est l'arc-droit. *Fig.* 244.

3°. L'incliné de rencontre ED.

4°. Le perpendiculaire à la direction c^2, b^2, qui est l'arc-droit de la descente HD.

5°. L'incliné de rencontre HG.

6°. Le vertical de sortie c^3, b^3, qui est aussi un arc-droit, en un mot par-tout où l'on voudra avoir le changement des ceintres que donnent les différentes sections des plans passans par ces demi-diametres. Ainsi pour former le ceintre de l'arc-droit du berceau rampant HD ; ayant tiré à volonté la perpendiculaire b^2, c^2, qui coupera les paralleles originaires des points 1, 2, 3, 4, aux points *d*, *d*, *d*, on portera sur chacune de

Fig. 244. ces paralleles les longueurs corefpondantes au ceintre primitif AB, des ordonnées 1 *i*, 2 *h*, 3 *g*, 4 *f*, en *d* 1, *d* 2, *d* 3, *d* 4, & l'on aura l'arc-droit furbaiffé b^2, a^2. On tranfportera auffi les mêmes ordonnées perpendiculairement fur les divifions de la ligne HG, pour avoir l'arc de rencontre H, 3, *i*, *g*; enfin fur la ligne c^3, b^3, comme le marquent les mêmes chiffres, pour avoir le dernier ceintre de face fupérieure b^3, a^3. On obfervera la même conftruction à l'égard de la ligne DE, fi l'on vouloit avoir le ceintre de rencontre des différens berceaux, avec cette feule différence, qu'au lieu des lignes obliques qui les coupent au profil, il faut leur mener des perpendiculaires fur chacune des divifions que donnent ces lignes, comme on voit en en G*g*, *u* 1, V 2, V 3; ce qu'on n'a pas fait dans cette Figure, pour éviter la confufion.

La raifon de cette opération, eft que les largeurs des berceaux étant par tout égales, leur différence ne peut être que dans les hauteurs. Quoique les berceaux foient inclinés à l'horifon, les ordonnées paralleles au plan qui paffe par les impoftes feront des horifontales, & par conféquent égales à celles qui étoient paralleles au rayon AC, lefquelles déterminent les largeurs, & coupent les demi-diametres, qui font dans des plans verticaux en parties proportionnelles, telles que doivent l'être les abfciffes des ellipfes.

Si les berceaux étoient rampans fuivant les impoftes, alors la ligne AC deviendroit inclinée au rayon vertical CB, & toutes les autres ordonnées lui feroient paralleles.

Sur quoi il eft aifé de remarquer qu'il n'eft pas indifférent de prendre pour ceintre primitif une face couchée en talud, comme C*b*, ou fa hauteur verticale *b*V, qui eft l'arc-droit du berceau horifontal; puifque fi l'un eft en plein ceintre, l'autre fera furbaiffé ou furmonté; c'eft à l'Architecte à voir ce qui convient le mieux à fon deffein.

Des profils des berceaux à double obliquité.

Tous les profils dont nous venons de parler ne fuppofent qu'une obliquité, ou de direction à l'égard du plan vertical, comme les defcentes, ou d'inclinaifon de face, comme les taluds; mais il en eft d'autres qu'on ne peut exprimer dans les profils, fans racourcir ou les faces ou les axes; de forte qu'on

ne peut plus y prendre de mesure. Telles sont les obliquités du biais simple, du biais & du talud joints ensemble, ou de la descente & du biais; parce qu'alors si le plan de description est parallele à une des directions, il ne l'est pas à l'autre.

On verra dans le IVe. Livre la maniere de faire les profils de ces différentes especes de voutes obliques, & de suppléer par le plan horisontal, & par de seconds profils aux racourcissemens qui se trouvent dans les parties du premier, qui n'y peuvent être dans leurs mesures.

Comme nous ne donnons ici que les regles générales, nous n'entrerons point dans le détail de toutes les différentes compositions d'obliquité; mais nous ferons voir comment on peut les réduire en une seule.

PROBLEME II.

Réduire toutes les différentes obliquités de biais, de talud & biais, de biais & descente, de descente talud & biais, en une seule, pour ne faire qu'un profil, qui exprime toutes ces obliquités & conserve les mesures que l'on y doit prendre.

Ce Problême, qui est le principe secret & mistérieux de la méthode de DESARGUES, sera détaillé au IVe. Livre pour toutes sortes de berceaux en particulier, où nous expliquerons ce qu'il a caché sous des noms impropres, qu'on trouve dans le Livre de BOSSE.

Premierement, il est clair que toutes les obliquités qui ne sont pas de directions différentes, peuvent se réduire à une seule; ainsi (*Fig.* 244) dans une descente HD, le talud HG, ou le surplomb ED étant perpendiculaires au plan vertical passant par l'axe du cylindre DG, peuvent être exprimés dans le même profil différemment situé, sans aucun changement. Car si je prends DG pour une horisontale, quoiqu'elle soit inclinée, il n'en résultera d'autre changement que celui de nom; sçavoir, que HG, que j'avois appellé talud à l'égard de l'horison G a^3 ou CD, s'appellera surplomb à l'égard d'un horison DG, & qu'au contraire DE, qui étoit en surplomb, deviendra un talud. Ainsi j'ai déja réduit deux obliquités de descente & talud en une seule de surplomb, & celle de descente & surplomb en une de talud.

Fig. 244. & 245.

Pl. 20. Fig. 245. Secondement, (*Fig*. 245) je puis changer une obliquité simple en une autre obliquité connue sous un nom différent. Si, par exemple, je considere le demi-berceau R, *h*, *n*, *p*, comme incliné à l'horison OR, je puis le considérer aussi comme horisontal sur R *p*, mais biais à l'égard d'une ligne de face R *h* considérée comme étant dans le plan de supposition horisontal *h* R *p*; au lieu que dans la premiere supposition, elle étoit verticale dans le même plan considéré en situation verticale, sans qu'il en arrive d'autre changement que celui du *niveau* en *à plomb*. La seule différence qui en résulte, est la transposition de la clef au lieu où étoit l'imposte, & la division des voussoirs qu'on commencera à une extrêmité d'un rayon, au lieu de la commencer à l'autre, si l'arc de face est circulaire; mais s'il étoit surbaissé ou surhaussé, il en résulteroit une transposition d'axe du grand au lieu du petit, & du petit au lieu du grand; ce qui arrivera à l'arc droit, si l'arc de face est circulaire.

Au reste il est clair que cet arc droit n'est pas susceptible d'aucun autre changement, quand même on augmenteroit ou diminueroit le talud, le biais, la descente, ou le surplomb.

Si cependant les obliquités des faces sont doubles de différentes directions, comme de biais & talud tout ensemble, ou descente & de biais; alors on ne peut pas les réunir en une par la seule transposition du niveau en à plomb, il faut chercher la position du diametre de plus grande obliquité, qui est celui de la section d'un plan passant par l'axe perpendiculairement à la face du berceau.

Figure au-dessus de 247. Soit AB (dans la Fig. au-dessus du chiffre 247) le diametre horisontal d'un berceau, dont la direction horisontale de son piédroit est AG, & celle de son axe qui lui est parallele est CX, faisant avec AB l'angle aigu XCA. Soit aussi l'inclinaison de sa face en talud, suivant un angle donné SCT, ou son complément TCB; du point C pour centre & CA pour rayon, ayant décrit un cercle ASBK, qui coupera CT en T, on tirera de ce point T une parallele à ACB, & du point A une perpendiculaire A *x* à l'axe donné CE, qui coupera T *t* en *t*. Si par ce point *t* & le centre C, on tire une ligne DI, on aura l'obliquité simple *t* C, composée des deux PC du biais, & *t* P du talud, laquelle sera la projection d'un plan passant par l'axe perpendiculairement à la face, & par conséquent celle d'une partie de l'axe sur le diametre de la plus grande obliquité. Pour détacher ces

ces deux lignes confondues par cette projection, on menera par le point *t* une perpendiculaire indéfinie *t* F, qui rencontrera la ligne de talud TC prolongée en F : je dis que l'angle *t* CF est celui de l'axe avec le diametre de la section de la face coupée par un plan passant par l'axe & perpendiculairement à cette face.

Fig. au-dessus du chiffre 247.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée A *x* perpendiculaire à EC qui rencontrera T*t* au point *t* ; si l'on suppose deux cylindres horisontaux de bases égales & de différentes directions de biais & de talud, que nous exprimerons par celles de leurs axes EC oblique sur AB, & SG qui lui est perpendiculaire. Si l'on fait mouvoir ces deux cylindres en sens contraire, chacun autour de son axe, il est clair que le point T décrira un arc de cercle en l'air, dont la projection est la ligne T *t*, & que le point A tournant autour de l'axe XC décrira un autre arc, dont la projection est A *x*, qui rencontrera le précédent en un point en l'air, qui sera exprimé au plan horisontal par le point *t*, commun aux deux diametres, & la ligne *t* C sera la projection du rayon CT dans un plan vertical, commun aux deux bases des cylindres ; lequel rayon est aussi commun à la base d'un troisieme cylindre, qui auroit pour axe DC, & pour inclinaison de sa face l'angle DCF. Car si l'on fait mouvoir le diametre TCF autour de cet axe, il est clair que le point F décrira en l'air un arc, dont F *t* est la projection ; par conséquent au lieu de considérer les deux cylindres précédens, je puis ne considérer que le troisieme, dont l'obliquité FCD sur son axe CD rassemble celle des deux autres, supposant toujours des bases égales.

Il est visible que si l'on prolonge la perpendiculaire jusqu'à la circonférence du cercle en H, & qu'on tire HC, on aura un angle DCH égal à DCF, & par conséquent que le diametre de plus grande obliquité pourra être représenté en dessus en HK, ou en dessous en FT, & l'axe par HC ou DC, puisque l'angle de leur rencontre est toujours le même en C.

Cela supposé, si l'on prend DI pour diametre de la base, il sera évident qu'il sera celui de la plus grande obliquité, puisque le plan *t* HC passe par l'axe HC & par la perpendiculaire H *t* qui est horisontale sur une ligne DI, qui est dans un plan incliné coupé par un vertical. Or cette ligne H *t* qui est le sinus droit

Fig. au-dessus du chiffre 247. de l'angle HCD, eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point H de l'axe au diametre DI; par conſéquent l'angle HCD eſt le plus petit de tous ceux que l'axe peut faire avec un des diametres de la baſe; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

De la connoiſſance de cet angle, il ſuit qu'on peut faire le profil d'un berceau à double obliquité, ſuivant les mêmes regles que pour ceux qui n'en ont qu'une, ou deux de même direction, réduites à une; la différence qu'il y aura, c'eſt qu'au lieu de prendre la baſe horiſontale de la face donnée pour celle de la projection des diviſions de ſon ceintre en vouſſoirs, on prendra le diametre trouvé DI, ſur lequel on abaiſſera des perpendiculaires des points de ces diviſions; ce qui oblige à la deſcription d'un peu plus de la moitié de la baſe, ajoutant au-deſſous de AB l'arc BI = AD; ainſi pour faire la projection des impoſtes A & B, on menera de ces points ſur le diametre DI les perpendiculaires A *a*, B *b* qui donneront des points *a* & *b*, leſquels ne ſeront plus aux extrêmités du diametre de la baſe, comme ils étoient auparavant. Cependant il eſt viſible que ſi par ces points *a* & *b*, on mene des paralleles *a* X, *b m*, à l'axe HC, on retombera dans le cas de la pratique ordinaire de la Figure 245, ſuppoſant l'angle AR*p* égal à l'angle DCH de celle ci; ſoit qu'on réduiſe les deux obliquités au ſimple biais, ou à la ſimple deſcente droite.

COROLLAIRE II.

Puiſque cette conſtruction change l'angle XCA du premier Biais en HC*a*, celle du piédroit AG ſera tranſportée en *a* X parallement à l'axe, & les lignes *a r* & *b* R perpendiculaires à l'axe, exprimeront le demi-diametre de l'arc droit, paſſant par les joints de lit des impoſtes. Il en ſera de même pour tous les autres joints de lit; ce qui fait voir comment on peut revenir à la même pratique de profil qui a été expliquée à la Figure 244, où l'on a fait l'arc droit a^2, b^2, par le moyen du demi diametre c^2, b^2, perpendiculaire à l'axe DG, diviſé en ſes abſciſſes, c'eſt-à-dire, qui ſont des diſtances équivalentes à des hauteurs des retombées; ce que nous expliquerons plus au long

dans le cinquieme Chapitre du quatrieme Livre.

Fig. au-dessus du chiffre 247.

COROLLAIRE III.

Si au lieu de considérer le diametre AB, comme horisontal dans un plan incliné, on le considere comme étant dans un plan vertical, le diametre DI sera incliné à l'horison; & si l'on veut aussi supposer DI horisontal, AB sera incliné à l'horison, & *m* L, perpendiculaire à DI sera une verticale, laquelle sera perpendiculaire à l'axe horisontal HC, quoique tous les autres diametres possibles lui soient inclinés; d'où il suit que quelque biaise que soit une voute, il y aura toujours une tête de lit où il ne se trouvera point du tout de biais, & qui sera parfaitement à l'équerre.

COROLLAIRE IV.

Il suit aussi que tous les angles des têtes des lits des voussoirs compris entre *m* & D seront obtus, & entre *m* & I ils seront aigus, plus ou moins selon qu'ils approcheront des extrêmités D ou I; ce qui doit s'entendre aussi des côtés opposés au-dessous du diametre DI, parce que les côtés des cylindres étant paralleles à leur axe, l'angle de chacun de ces côtés avec un diametre donné, est égal à celui que fait l'axe avec ce même diametre.

COROLLAIRE V.

Puisque les angles que l'axe fait avec chacun des diametres du cercle de la base du cylindre ou face du berceau, sont tous inégaux, il suit qu'on peut faire une infinité de profils différens d'un même cylindre scalene, dans lesquels il paroîtra plus ou moins incliné; en sorte que s'il est fait par le diametre perpendiculaire à celui de plus grande obliquité, le profil de ce cylindre, ou, ce qui est le même, d'un berceau biais, sera le même que celui d'un droit.

COROLLAIRE VI.

Si l'on tire aussi une perpendiculaire *nu* à l'axe HK, elle représentera un des diametres de l'arc droit, lequel étant supposé

Fig. au-dessus du chiffre 247. circulaire, la courbe de la face sera une ellipse, dont le grand axe sera dans la plus grande obliquité DI, le petit axe en *m*L, qui lui est perpendiculaire ; ce qui donne une facilité pour en tracer le ceintre.

COROLLAIRE VII.

Au reste, de quelque courbe que soit le ceintre de face, ou celui de l'arc-droit, la maniere de trouver le diametre de la plus grande obliquité sera toujours la même ; car le demi-diametre CT sera égal à FC, quoique l'on substitue une ellipse au lieu du cercle THF, & les perpendiculaires T*t* & A*x* aux directions SC, EC se rencontreront toujours au même point *t*, si sans égard à l'arc de face, on prend sur AC une longueur égale à CF ou CT, ce qui est indépendant du ceintre de face. En effet il est clair que quand même on ne prendroit que la moitié de ces lignes, les perpendiculaires *t*T & A*t*, qu'on peut considérer comme les côtés d'un parallelogramme, ne feroient que se rapprocher parallelement, & par conséquent se couperoient toujours dans la même diagonale *t*C ; ce qui suffit pour donner l'angle DCF de l'axe avec le diametre de plus grande obliquité qu'on cherche.

COROLLAIRE VIII.

Puisque l'inclinaison du diametre DI, de plus grande obliquité, avec la ligne horisontale donnée pour base de la face AB, & l'angle de cette ligne DI, avec celle qui représente l'axe HC, sont les seules choses essentielles à la réduction de l'obliquité ; il est clair que leur transposition au-dessus ou au-dessous de la ligne AB, ne change rien à la construction, & qu'ainsi il importe peu que l'axe soit en HC ou en FC, pourvû que l'une & l'autre de ces lignes fassent le même angle avec la ligne DI, & qu'ainsi il importe peu de faire le profil du talud au-dessus ou au-dessous de la ligne AB ; mais en ce cas il faut changer le côté de la perpendiculaire à l'axe de A en B.

Secondement, il faut observer que le talud & le surplomb, la descente & la montée, à ouvertures d'angles égales avec l'horisontale AB, donneront toujours le même angle de l'axe HC avec le diametre DI, mais en différens sens ; de sorte que les

directions opposées donneront des angles de différente nature, l'un aigu & l'autre obtus; mais qui seront toujours les supplémens à deux droits l'un de l'autre.

Troisiémement, que les profils des angles d'inclinaison perpendiculaires à une même direction, comme la descente & le talud, la montée & le talud, doivent être rangés d'un même côté au-dessous de l'horisontale AB, lorsque l'un doit être soustrait de l'autre, & des deux côtés, lorsqu'ils doivent être ajoutés; sçavoir, le talud au-dessous, & la descente au-dessus, comme nous le ferons voir au IV[e]. Livre, parce que si l'on retranche de l'angle de la montée celui du talud, l'angle de la face avec l'axe, qui étoit déja aigu, le devient encore plus. Et si l'on retranche le talud de l'angle de la descente, qui est équivalent à un surplomb à l'égard de l'axe considéré en situation horisontale, & par conséquent obtus, le surplomb diminue & approche plus du droit; ce sera la même chose si l'on ajoute l'angle du talud au complément du surplomb ou descente; cet angle qui étoit aigu, avec cette addition, approchera plus du droit, par conséquent l'obliquité de l'axe sur la face diminuera.

Des profils des voutes coniques.

Les profils des trompes & autres voutes coniques qui seroient faits suivant les mêmes regles que ceux des cylindriques ou berceaux, seroient inutiles pour la construction des traits.

La raison est, que les projections des joints de lit n'étant pas paralleles entr'elles, ne peuvent l'être aussi à un même plan vertical; par conséquent (par le I. Coroll. du Chap. V. du II Livre) ces points ne peuvent y être représentés dans leurs justes mesures; ils seront tous plus courts au profil que dans la réalité, excepté un qui peut être dans un plan vertical. Ainsi supposant le profil S*h*P (*Fig.* 247) formé sur la projection SPL, il ne s'y trouvera de mesure juste, que la longueur du milieu de la clef S*h*, dont SH est la projection horisontale. Car il est visible que l'imposte SL, ou son égale SP, est plus courte à son profil SP; puisque SP est l'hypotenuse d'un triangle rectangle, dont SH = S*a*P est un côté; les autres lignes S*n*, S*o*, qui représentent les joints de lit, seront un peu moins racourcies, à mesure qu'elles approchent du plan vertical S*h*B. *Fig.* 247.

D'où il suit, que puisque tous ces profils racourcissent inéga-

lement les joints de lit, on ne peut en trouver toutes les valeurs rassemblées dans un seul plan, comme celles des joints des berceaux, excepté aux voutes qui sont des portions de cones droits sur une base circulaire; parce qu'alors la valeur de tous les joints de lit est donnée sans le secours du profil dans le seul plan horisontal, ces lits étant tous égaux à celui d'une des impostes.

QUATRIEME REGLE.

Dans les traits des voutes coniques scalenes, il faut faire autant de profils qu'il y a de joints de lit dont les hauteurs ou les projections horisontales sont inégales, pour en trouver la juste valeur.

J'entends par le mot *scalene*, non-seulement la voute dont la projection horisontale ou verticale est un triangle scalene, mais aussi celle dont le plan horisontal est un triangle isoscele, & dont l'axe est droit sur sa base, qui n'est pas circulaire; mais elliptique ou de quelqu'autre courbe.

Fig. 247. Soit (*Fig.* 247) SAB, le plan horisontal d'une trompe que nous considérons comme biaise, quoiqu'elle soit droite, pour ne pas multiplier les Figures; sur AB, comme diametre de la base du cone, qui est la face de la trompe, ayant décrit la courbe de son ceintre, comme le demi-cercle AHB, ou une demi-ellipse, & l'ayant divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4; on abaissera des perpendiculaires de chacun sur AB, pour en avoir la projection horisontale aux points D, E, F, G, d'où par le sommet S du cone, on tirera les lignes DS, ES, FS, GS, qui seront les projections des joints de lit à la doële, dont il faut chercher la valeur par le profil.

Puisque tous les joints rencontrent le plan horisontal en S, il est visible qu'ils sont tous chacun l'hypotenuse d'un triangle rectangle dont on a les deux côtés donnés; sçavoir, la hauteur des points 1, 2, 3, 4, sur le plan horisontal, & la distance de leurs projections D, E, F, G, du sommet S, dans la projection horisontale.

Ainsi on peut faire ces profils de différentes façons qui viennent toutes à la même fin.

1°. On peut élever aux points D, E, F, G, des perpendiculaires égales aux hauteurs D 1, E 2, F 3, G 4, & tirer les

hypotenuſes demandées, comme E 2 en E*e*, D 1 en D*d*, les lignes S*e* & S*d*, ſeront les vraies longueurs des joints de lit. *Fig.* 147.

2°. Pour abréger & profiter des angles droits tout faits, on peut porter les projections ſur la baſe BA prolongée; par exemple, ES en E*x*, & DS en DY, les lignes *x* 2, & Y 1, ſeront les vraies longueurs des joints de lit, auſquels les oppoſés correſpondans aux points 3 & 4, ſeront égaux, parce que le cone eſt droit; il n'en ſeroit pas de même s'il étoit ſcalene, la trompe étant biaiſe.

Ces deux manieres ſont bonnes en elles-mêmes; mais lorſqu'il y a beaucoup de vouſſoirs, elles produiſent une multiplicité de lignes qui cauſe de la confuſion; c'eſt pourquoi je crois qu'il convient mieux de porter tous les profils hors du plan ſur une baſe commune.

3°. On prendra une ligne quelconque qui paſſe par le ſommet S hors du plan, comme, SL ſur laquelle on tranſportera par des arcs de cercle, faits du même point S pour centre, toutes les longueurs des projections SÇ, SF, SG en K, L, *n*, où l'on élevera des perpendiculaires KH', L 3*f*, *n* 4, les lignes 3*f* S, 4 S feront les profils des joints de lit, paſſant par les points 3 & 4, & H S, celui du milieu de la clef, comme il eſt évident par la conſtruction, qui eſt la même que la précédente. Cette méthode débarraſſe le *plan*, & les arcs CK, FL, G*n*, marquent les origines des profils, pour qu'on ne s'y méprenne pas. Le reſte de la Figure ſert pour les diſcours ſuivans.

Les valeurs des joints de lit étant trouvées, il ſera facile de faire les profils des ſurfaces des lits, c'eſt-à-dire, des ſections du cone par des points donnés à la circonférence de ſa baſe, & par ſon ſommet, S perpendiculairement à chaque tangente menée par ces points; parce que ſi la baſe eſt circulaire, on a trois côtés du triangle de cette ſection; ſçavoir, l'axe qui eſt commun à tous, le rayon de la baſe ou face, qui eſt toujours le même, ſi elle eſt circulaire, & le joint de lit trouvé; l'angle de ſupplément à deux droits du rayon avec le joint de lit, eſt le profil de la tête de lit.

Mais ſi la baſe eſt elliptique ou de quelque autre courbe, alors la ſection du lit prolongée ne paſſera plus par l'axe du cone, mais toujours par le ſommet S, & la rencontre du joint de tête avec le plan horiſontal ſera facile à trouver; car ſuppoſant N*e* un joint de tête perpendiculaire à la courbe ondée A *e* H,

Fig. 247. il n'y a qu'à le prolonger jusqu'à la rencontre du diametre de la face AB en E, la ligne SE sera la section qui tient lieu d'axe, E e celle du rayon de la face ; ainsi avec le joint de lit, on aura le triangle de la section intérieure du cone, dont l'angle de supplément à deux droits sera le profil de la tête du voussoir.

On voit par ce qui précede qu'on n'a pas la même facilité qu'aux berceaux où cet angle est toujours égal à celui d'un diametre de la base avec l'axe du cylindre, parce que les côtés du cone sont convergens.

Nous n'avons considéré jusqu'ici qu'une seule obliquité dans le cône ; si l'on doit avoir attention à plusieurs, comme lorsqu'une trompe est biaise & en talud, il faut réduire ces deux obliquités en une, de la même maniere que nous l'avons dit pour les berceaux, & ayant trouvé le diametre de plus grande obliquité, & son angle avec l'axe, on fera le profil d'une voute à double ou triple obliquité, comme pour la simple biaise.

PROBLEME III.

Tracer le profil d'une voute conique à double ou triple obliquité, de de biais, talud & descente.

Puisqu'on ne peut exprimer la longueur d'une ligne inclinée à un plan que par sa projection sur un plan qui lui soit parallele, il est clair qu'on ne peut faire un profil d'un cone scalene que dans un plan parallele à celui qui passant par son axe est perpendiculaire à la base, & ce profil ne peut encore servir qu'à trouver les mesures des trois lignes qui sont dans ce plan ; sçavoir, des deux côtés, le plus long & le plus court, & de l'axe du cone ; ainsi il est inutile de vouloir entreprendre un profil d'un cone scalene sur tout autre diametre que celui de la plus grande obliquité.

Nous en avons déja dit autant pour les profils des cylindres scalenes ; mais à cause que les côtés sont paralleles à l'axe, l'obliquité ne leur cause aucun changement comme aux cones, où ils s'alongent & se racourcissent continuellement de part & d'autre de la section perpendiculaire par l'axe.

Ainsi le Problême se réduit à chercher cette section.

PL. 22. Fig. 265. Soit (Planche 22, *Fig.* 265) le cercle AHBK, la base du cone : ayant tiré par le centre C un diametre quelconque DE prolongé

longé vers G, on portera de C en G la plus grande obliquité, Pl. 22. Fig. 265.
comme celle du biais, & l'autre du talud en GP, perpendiculairement à GE; la ligne PB, menée par le centre C, fera la section d'un plan perpendiculaire à la base AHBK, & passant par l'axe du cone, laquelle réduit les deux obliquités de biais & de talud en une seule de simple biais PC, plus grande qu'aucune des deux autres, étant l'hypotenuse d'un triangle rectangle, dont elles sont les côtés.

Présentement on peut trouver tous les côtés du cone sans avoir recours à aucune nouvelle projection; on élevera PX perpendiculaire sur PB, & égale à la hauteur du cone, ou distance perpendiculaire de la base au sommet. Puis ayant pris à volonté au contour de la base autant de points que l'on voudra 1, C, 3, E, 5, 6, 7, D, on prendra les intervalles de chacun de ces points au point P, & on les portera sur PB aux points 7° 6° 5° 3°, & par ces points, & le sommet X, on tirera les lignes XA, X7°, X6°, X5°, X3° XB qui seront les vraies longueurs des côtés du cone, avec lesquels chacun en particulier, la longueur de l'axe XC, & le rayon CA forment autant de triangles, on aura les profils de toutes les sections du cone, & par conséquent, en prenant les supplémens des angles du côté & du rayon, tous les profils des têtes des lits.

Si l'on compare ce profil avec celui de la projection verticale *Sde*, faite sur une base *de* parallele au diametre donné DE, on reconnoîtra qu'aucune de ses lignes n'est égale ni à la longueur ni à l'inclinaison qu'elle doit avoir sur le plan de la base; & par conséquent qu'elles sont inutiles pour y prendre aucunes mesures de profil, ce qui est assez clair sans démonstration, puisque IC = GC est plus petit que PC, & la hauteur PX = IS, il suit que l'angle ICS est plus grand que PCX, par conséquent le profil de projection n'a pas assez d'obliquité.

USAGE.

Ce Problême nous servira à faire voir qu'on peut beaucoup abréger les traits des voutes coniques biaises, en descente, en surplomb, ou en talud; lorsque nous parlerons des traits particuliers, dans le IVe. Livre, Chap. VI., puisqu'on peut réduire toutes ces obliquités différentes en apparence à une seule, comme aux berceaux: la montée peut être réduite en talud sim-

Fig. 265. ple, la descente en surplomb simple, la montée en talud à un talud plus oblique de la quantité du talud, la descente en talud, à un surplomb moins oblique de la quantité du talud, le biais en talud ou en surplomb, à un plus grand biais, comme on le voit dans cet exemple; de sorte que toutes les obliquités étant réduites en une, il ne reste plus qu'à voir quel angle le diametre donné DE fait avec celui de la plus grande obliquité AB, pour y rapporter les projections des points de division en voussoirs, qu'on a coutume de faire sur le diametre donné ordinairement horisontal, ou incliné, s'il s'agissoit d'une face rampante.

Si au lieu d'une projection verticale sur le diametre DE, on avoit voulu la faire sur le diametre C 6, au lieu du biais GC, on auroit eu pour toute obliquité de l'axe celle du talud GP, qu'il auroit fallu porter de I en *p* sur l'horisontale *dp*, & tirer *p* S qui donne une obliquité d'axe toute différente. Enfin si on avoit proposé le profil sur le diametre HK perpendiculaire à PC, toute l'obliquité se feroit évanouie, la ligne SI auroit représenté l'axe, alors le profil du cone scalene n'auroit en rien différé de celui du cone droit.

D'où il suit que d'une infinité de profils possibles, il n'y en a qu'un qui puisse donner les mesures des côtés & de l'axe d'un cone scalene.

Remarque sur les profils en général.

Les multiplicités des ligne qu'on trouve dans les traits, viennent principalement des profils; or je regarde comme une maxime que

On doit éviter autant qu'il est possible l'assembage de plusieurs profils sur un même plan, & particulierement les lignes inutiles qui n'indiquent que de loin, & par de longs renvoys, leurs origines; c'est pourquoi lorsqu'on a un grand nombre de voussoirs dans une face, il convient mieux de mettre les profils chacun à part, ou du moins une partie d'un côté, l'autre de l'autre, que de les mettre sur les bases de leur projection.

La raison de cette maxime est toute simple; lorsque les objets se présentent en trop grand nombre, ils partagent trop notre attention, & fatiguent l'esprit occupé à démêler ceux que nous devons choisir, ce qui arrive particulierement, lorsque les

lignes de doële & d'extrados sont tirées & comme mêlées ; secondement, parce qu'il est aisé de se tromper & de prendre les unes pour les autres.

J'ajoute qu'il faut retrancher les lignes inutiles qui ne servent qu'à indiquer par de longs circuits les origines des profils, parce qu'on en trouve souvent de cette espece dans les traits des Auteurs de la Coupe des Pierres, qui embrouillent extrêmement les épures.

Je puis donner pour exemple le profil d'une descente à la Figure 248, où le parallelogramme AE est la moitié du plan horisontal d'un berceau avec ses projections de joints de lit 1^pN, $2^p n$ provenant des divisions 1, 2, de la moitié du ceintre de face HA ; le parallelogramme *h e* est le profil de ce berceau, où l'on veut situer les joints de lit dans la distance qu'il convient. La maniere ordinaire, est de les y conduire par de longs circuits des lignes que l'on voit dans la Figure 1 1^a 1^d, 2 2^a 2^d, H *a h*, que l'on peut supprimer sans se priver de l'indication de l'origine des profils, comme on voit à la Figure 245 ; car ayant fait à l'ordinaire la projection horisontale des joints de lit par le moyen du ceintre AHB, divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4 ; on trouvera les profils des mêmes joints de lit, en répetant la moitié de l'arc de face en OL*h*, & menant par ses divisions 1, 2 des horisontales 1 D, 2 *d*, qui donneront sur la ligne de profil AR*h* les points *d* & D, par où on menera des paralleles à la rampe R *p*, lesquelles seront les profils demandés; ce qui supprime, comme l'on voit, beaucoup de lignes droites & d'arcs de cercles inutiles, & marque de plus près l'origine de chacune des lignes de profil, sans offusquer inutilement le Lecteur.

Fig. 248.

Fig. 245.

De l'élévation.

Il est encore une espece d'Ortographie, c'est-à-dire, de représentation des hauteurs, qu'on appelle l'*élévation*, laquelle ne différe du profil, qu'en ce qu'elle a pour objet les parties extérieures & apparentes au-dehors, au lieu que le profil est destiné pour exprimer les profondeurs aussi-bien que les hauteurs.

Dans tous les traits il est de nécessité indispensable de faire l'élévation de la face de la voute dont il s'agit, pour trouver les intervalles horisontaux des joints de lit, & leur hauteur au-dessus des impostes, du moins à leur origine sur l'arc de fa-

ce ; c'est-là le principal usage que l'on fait de l'élévation : cependant nous ferons voir que cette espece de projection verticale d'un corps ou d'une voute quelconque, conduit à son exécution, autant que celle du *plan* & du *profil.*

Il est clair que lorsqu'on veut faire usage de cette espece de dessein, il doit être assujetti aux loix de la projection verticale, comme le profil ; c'est-à-dire, qu'elle doit être faite sur un plan parallele à l'objet ou à la partie que l'on en veut représenter.

D'où il suit, 1°. qn'on ne peut faire d'élévation d'un corps cylindrique, sur laquelle on puisse prendre d'autres mesures, que suivant sa longueur, parce qu'il n'y a que les côtés paralleles à son axe qui soient en ligne droite, par conséquent qui puissent être paralleles au plan de description. Quant aux parties de son contour représenté en élévation, il est clair qu'elles sont toutes inégales ; se racourcissant d'autant plus qu'elles s'éloignent de l'axe du cylindre.

2°. Qu'on ne peut trouver que trois mesures sur l'élévation d'un corps conique ; sçavoir, les trois côtés du triangle par l'axe du cone qui est parallele au plan de description, dont deux sont des côtés du cone, & le troisieme le diametre de sa base.

3°. Qu'on ne peut prendre qu'une seule mesure sur l'élévation d'un corps sphérique, concave ou convexe ; sçavoir, le diametre du cercle parallele au plan de description.

Le peu d'utilité de ces deux dernieres especes d'élévations, nous dispense d'en donner des exemples, il suffit de celui d'un corps cylindrique, sur lequel est tracée une ligne quelconque, que nous supposerons ici une hélice, pour montrer comme on doit faire l'élevation d'un escalier à vis dans les desseins d'Architecture.

Fig. 249. Soit (*Fig.* 249) la couronne de cercle a D *b d*, le plan horisontal d'une tour dans laquelle est un escalier, il suffit d'en tracer la moitié, parce que nous la supposons également divisée de part & d'autre. Ayant divisé son contour en un certain nombre de marches, s'il s'agit d'un escalier, ou en parties égales arbitraires, s'il s'agissoit d'une hélice tracée à la surface de ce corps, on menera par le centre C une perpendiculaire CE au diametre *a b*, qu'on prolongera autant qu'on le jugera à propos ; puis sur cette ligne ayant pris à volonté un point D, on lui menera une perpendiculaire qui sera parallele à a *b*, & par tous les points des divisions du contour de la couronne de cer-

cle, on menera des paralleles à l'axe CE indéfinies. On marquera ensuite successivement chaque hauteur de marche sur cet axe CE, s'il s'agit d'un escalier, ou les parties aliquotes d'une révolution, s'il s'agit d'une vis ou d'une colonne torse, & par toutes ces divisions on menera des paralleles à la base AB, qui rencontreront les paralleles à l'axe CE, en des points 1, 2, 3, *a*, 5, 6, 7, M, &c. par lesquels on tracera à la main la courbe D*a*M*b*E, qui sera la représentation de l'hélice sur la surface extérieure du cylindre ou de la tour. *Fig.* 249.

Il est aisé de voir que celle de la surface intérieure *efg* du *plan.* se tracera de la même maniere. Il faut seulement observer que quoique les largeurs soient moindres, les hauteurs doivent être les mêmes pour l'hélice extérieure & intérieure, parce que s'ils s'agit d'escalier, c'est la même hauteur de marche; il en sera de même des autres hélices, qui font leur révolution en même-tems; c'est pourquoi les points DME deviennent communs à l'extérieure & à l'intérieure. L'élévation qui doit donner les premieres mesures du plan horisontal de l'épure, ne contenant d'autre difficulté que celle de tracer le genre de courbe qu'on se propose pour ceintre de la voute, nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit au II. Livre.

CHAPITRE IV.

Des moyens de faire les plans, profils & élévations des Figures irrégulieres.

IL y a deux sortes d'irrégularités dans les voutes; l'une consiste dans leurs contours, qui peuvent n'être ni circulaires ni elliptiques, mais de quelqu'autre courbe de fantaisie; telles sont les faces des trompes ondées, comme cette voute conique qu'on appelle trompe D'ANET, (*Fig.* 247).

L'autre consiste dans la courbure de leurs surfaces qui ne sont ni cylindriques, ni coniques ni sphériques, telles sont celles de la plupart des arrieres-voussures.

Le moyen le plus facile de connoître ces irrégularités, est de les comparer à des Figures régulieres, ou par *inscription* ou par *circonscription*. Les contours peuvent être connus par l'une &

par l'autre maniere;mais les ſurfaces irrégulieres ne peuvent l'être que par le moyen de la circonſcription, dans la pratique de la coupe des pierres, où il ne s'agit que d'ôter & non pas d'ajouter, comme dans les ouvrages de Stuc. On peut donc comparer le contour d'une Figure irréguliere à une réguliere par ſon excès ſur la réguliere inſcritte, ou par ſon défaut à la réguliere circonſcrite.

Fig. 247. Soit, par exemple, une trompe ondée (*Fig.* 247) dont la projection horiſontale eſt la Figure SAHB, on peut en retrancher le cone droit SAB, en tirant la ligne AB perpendiculairement ſur ſon axe SC, & regarder le reſte de la Figure, qui eſt haché, comme un excès de ce cone, que l'on peut trouver en tirant du ſommet S autant de lignes qu'on voudra, comme SE, SD, SC, qu'on prolongera juſqu'aux extrêmités de cet excès, & l'on aura les lignes E*e*, D*d*, CH, qu'il faudra ajouter en ligne droite aux premieres, ſoit en projection pour en avoir le plan horiſontal, ſoit en profil, comme V*h*, xc^2, yd^2.

Au lieu de comprendre un petit cone dans une plus grande Figure, on peut tirer une perpendiculaire ſur l'axe SH, & former un cone droit SPL qui la renferme toute entiere; & alors ayant tiré des lignes droites SN, SO du ſommet S du cone, on en retranchera les parties *e*N, *d*O pour avoir les points *e* & *d* du contour irrégulier de la face ondée, & autant d'autres que l'on voudra par la même maniere, en cherchant leur défaut au-dedans du cone circonſcrit SLP.

L'une & l'autre méthode peut avoir ſes applications ſuivant les différentes circonſtances; la circonſcription qui donne de plus grandes meſures, peut avoir ſon incommodité dans les grands Ouvrages, & l'inſcription pourroit être plus ſujette à de petites erreurs d'exécution, mais en elles-mêmes, elles ſont également correctes.

Ce que nous diſons ici des contours irréguliers par leurs ondulations, devient plus aiſé pour ceux qui ſont compoſés de lignes droites, parce qu'il ſuffit de tirer des lignes par leurs angles, pour en avoir la poſition & le contour régulierement; c'eſt pourquoi on peut, pour plus grande préciſion, inſcrire les contours ondés dans des poligones.

La voye de l'inſcription & de la circonſcription eſt plus commode dans les berceaux dont les faces ſont irrégulieres, parce qu'il ne s'agit que de tirer des lignes paralleles à leur direction,

& des perpendiculaires aux extrêmités des parties les plus saillantes, pour les inscrire dans des parallelogrammes.

Soit, par exemple (*Fig.* 250), la projection horisontale d'une porte sur le coin AEDPB, dont la face intérieure AMB est arrondie ; on circonscrira à cette Figure irréguliere mixte le parallelogramme BAGI, dans lequel on tirera autant de paralleles à AG, comme *g* F, *g* F que l'on voudra avoir de points au profil. *Fig.* 250.

On formera ensuite sur GI, comme diametre, le demi-cercle GHI pour ceintre de l'arc droit, que ces lignes prolongées couperont aux points 1, 2, H, 3, 4.

La projection horisontale étant ainsi préparée, on fera pour le profil un second parallelogramme a S*di* sur les côtés BA, IG prolongés ; ensuite ayant porté les hauteurs *g* 1, *g* 2, DH, en a S, a 2, a 1, on menera par ces points 1, 2, S des paralleles à la base a*i*, sur lesquelles on portera les excès du parallelogramme GABI sur le plan horisontal de la porte EAMBPD ; ainsi on portera F 1 *q* en 1 K, F 2 *q* en 2 L, CM en S *m*, & par les points *m* LK a, on tracera à la main une courbe qui sera le profil de la moitié concave de la face intérieure de la porte.

Pour tracer le profil de la moitié de la face extérieure saillante, on portera de même l'excès GE du plan horisontal en *ic* du profil, *g* 1 *p* en *e* 1 *f*, *g* 2 *p* en *e* 2 *f*, & par les points *d*, 2 *f*, *if*, *c*, *d*, 1 *f*, 2 *f*, *c* on tracera à la main une courbe qui sera la moitié de la face extérieure.

Pour abréger le transport des hauteurs, on peut tracer le quart de cercle *i*, 14, 23, *dh* égal à GH du plan horisontal, & également divisé, & par ces divisions 14, 23, mener des paralleles à la base *i* a du profil, lesquelles marquent plus sensiblement leurs origines.

La raison de cette opération de circonscription, est que les lignes droites & les perpendiculaires sont les termes les plus simples d'où l'on puisse commencer à mesurer les obliquités & les sinuosités des faces ; par ce moyen on abrege la réduction des faces courbes en lignes droites & en triangles rectilignes, dont il faudroit chercher en particulier les angles, les côtés, & leur situation respective.

Cette maniere est nécessaire pour former les profils qui sont des projections verticales ; mais pour lever ceux qui sont des sections des corps, on peut la rendre plus facile, & l'abréger comme nous l'allons dire.

PROBLEME IV.

Tracer ſur un plan un contour ſemblable & égal à celui d'un corps quelconque ſuppoſé coupé par ce plan,

En termes de l'art,

LEVER UN PROFIL.

Soit un corps quelconque, (*Fig.* 246) dont le contour ſoit
Fig. 246. de telle irrégularité que l'on voudra ; on donne ici pour exemple un roſon & des moulures ABCDE, il faut imiter exactement le contour de la ſection qui feroit faite par ce plan, s'il le coupoit comme pourroit faire une ſcie.

On placera le carton ou la planche ſur laquelle on veut tracer le profil dans la ſituation où l'on veut qu'il ſoit à l'égard du corps dont on veut imiter le contour ; par exemple, d'un plafond ſous lequel on la mettra à plomb, ou contre un mur, de niveau ; on l'arrêtera & on la tiendra ferme en cette ſituation, pour qu'elle ne varie pas, car l'obliquité changeroit l'imitation.

On appuyera cette planche contre les parties les plus ſaillantes, comme en E, enſuite ayant poſé une regle R*r* perpendiculairement ſur un des côtés de ladite planche KL, par le moyen d'une équerre FQG, on prendra avec le compas ou une meſure de bois qui ſervira de jauge le plus grand enfoncement *b*B, qu'on tranſportera ſous la partie la plus ſaillante E*e*, pour voir ſi la planche ſera aſſez large pour le contenir de E en *e*, perpendiculairement au côté KL ou HI, que nous ſuppoſons droit, & parallele ſi l'on veut ; puis on fera couler une branche de l'équerre GQ ſur le côté KL, en ſorte qu'une partie de ſon épaiſſeur déborde aſſez la planche, pour qu'on puiſſe appuyer la regle mobile R*r* contre l'autre branche de l'équerre QF, à laquelle elle doit toujours être appliquée, & couler le long, en la pouſſant dans les creux, & la retirant dans les ſaillies.

On préſentera ainſi la regle ſous chaque enfoncement, comme en B & en D, portant toujours la même ouverture de compas B*b*, ou la même jauge ou meſure de bois, de B en *b*, & de D en *d*, & l'on marquera ſur la planche les points *b* & *d*, de même ſous chaque ſaillie A*m*CE, marquant les points que la meſure

mesure donnera le long de la regle en M *c* & *e*. On continuera de même en faisant couler l'équerre & la regle pour avoir autant de points que l'on voudra, par lesquels on tracera à la main le contour *a b c* M *c d e* sur la planche, de laquelle si l'on retranche la partie supérieure avec la scie ou autrement, on aura le profil que les Ouvriers appellent, pour les moulures, un *calibre*, lequel s'ajustera parfaitement aux moulures du plafond, suivant la même ligne AE; en sorte que si l'on vouloit y faire une cloison, il en boucheroit exactement les vuides. *Fig. 246.*

On peut même par ce moyen lever les contours des enfoncemens recouverts comme en S; car tirant avec l'équerre la perpendiculaire RS, & la portant à même distance de BR en *b r*, & faisant *r s* égale à RS, on aura l'enfoncement S; ainsi des autres.

DEMONSTRATION.

Il est clair par la construction, que la regle ne change point de situation à l'égard de la ligne KL, à laquelle elle est toujours perpendiculaire, puisqu'elle est toujours une prolongation d'un côté de l'équerre, & que tous les points du corps sont également éloignés du contour tracé, donc les deux courbes sont paralleles & égales, puisque leurs abscisses sont communes, & les ordonnées sont égales par la construction.

USAGE.

Ce Problême de pratique est d'un fréquent usage en Architecture, particulierement dans les réparations des vieux édifices, où il faut racorder des ornemens saillans & renfoncés, ou des ceintres corrompus, c'est-à-dire, de courbure irréguliere, ou par faute de construction, ou par l'affaissement qui s'est fait. Faute de sçavoir user de ce moyen, les Ouvriers sont obligés de tâtoner long-tems, en présentant plusieurs fois le profil qu'ils ont levé pour voir ce qu'il faut ôter d'un côté, & ajouter de l'autre; en quoi ils consomment beaucoup de tems & de peine, qu'ils pourroient s'épargner par la pratique simple de ce Problême.

De la ſuppoſition des ſurfaces planes pour parvenir à l'imitation des courbes terminées par des ſections planes.

Et pour la coupe des Pierres, en termes de l'art, *Des doëles plates.*

La raiſon qui nous engage à ſuppoſer des lignes droites auprès des courbes pour en connoître les ſinuoſités, nous oblige auſſi à ſuppoſer des ſurfaces planes au-devant des courbes, pour en connoître la concavité ou la convéxité, particulierement lorſquelle eſt irréguliere; & ſi leur courbure eſt réguliere, & leur ſurface ſuppoſée terminée par des plans, la ſuppoſition d'une ſurface plane au-devant de la courbe ſert à faire connoître la poſition & la diſtance de ſes angles.

Ainſi avant que d'entreprendre de creuſer une portion de cylindre (par exemple) terminée par quatre ou pluſieurs plans, il faut former une ſurface plane pour y ſituer les quatre angles de cette portion de cylindre à leur diſtance reſpective; le modele de cette Figure pour les doëles des vouſſoirs s'appelle le *panneau de doële plate*; c'eſt un plan paſſant par la corde de l'arc du ceintre compris dans le vouſſoir, lequel touche néceſſairement trois des angles du vouſſoir, & ordinairement quatre; & comme les ceintres ſont diviſés en pluſieurs parties dans leur contour, ſuivant le nombre de vouſſoirs qui compoſent la voute, les doëles ſont diviſées en autant de ſurfaces planes ou de doëles plates qui réduiſent le cylindre en priſme, le cone en piramide, & la ſphere en polyedre.

La raiſon de cette ſuppoſition eſt, 1°. que dans des opérations compoſées, il convient pour la facilité & la ſûreté de l'exécution de commencer par des ſimples; ainſi avant que de creuſer une ſurface courbe, on en doit premierement ſituer les bornes dans leur juſte diſtance; ces bornes ſont les angles ſolides des vouſſoirs, deſquels il y en a au moins trois qui peuvent être appliqués à une ſurface plane, & ordinainement quatre. Il arrive de plus, que ſi ces vouſſoirs ſont faits pour une voute conique ou cylindrique, on peut placer ſur la même ſurface plane les côtés oppoſés qui ſont droits; de ſorte qu'ayant formé une ſurface plane, ce qu'on appelle en termes de l'art

dressé un parement, on y peut placer une grande partie du contour d'un voussoir, qui doit y rester lors même qu'il sera achevé ; il ne reste qu'à creuser celle qui est concave, laquelle est comprise dans ces bornes.

Secondement, cette supposition est nécessaire pour trouver l'inclinaison des surfacs planes des joints avec les courbes des doëles ou des têtes, parce que ces inclinaisons peuvent changer à chaque voussoir, comme il est visible dans les voutes de ceintres elliptiques surhaussés ou surbaissés, où l'angle de la doële avec le lit change continuellement d'ouverture ; or il est plus aisé d'appliquer des biveaux ou des récipiangles rectilignes sur des surfaces planes, que des biveaux d'angles mixtes, parce que ceux-là peuvent s'ouvrir & se resserrer par la construction de l'instrument, & s'adapter à tous les angles, au lieu qu'il faut changer de modele d'angle mixte à chaque position des joints de la courbe du ceintre elliptique.

Troisiemement, lorsque les doëles ou autres surfaces des voussoirs sont *gauches*, c'est-à-dire, dont les angles ne sont pas dans un même plan, c'est une espece de nécessité de supposer une surface plane qui passe par trois de ses angles, pour trouver la position du quatrieme ou cinquieme, s'il y en a ; car de même qu'on ne peut connoître la nature des lignes courbes, que par les propriétés des lignes droites inscrites ou circonscrites, ou ordonnées à quelque diametre, aussi on ne peut connoître les surfaces courbes qui ne sont pas régulieres, que par leurs distances à des surfaces planes, en mesurant les longueurs des lignes perpendiculaires à ce plan, ou dont l'inclinaison est connue, terminées à différens points de la surface courbe, à laquelle on la compare. Et parce qu'il n'y a que le seul triangle qui soit nécessairement dans un plan, les surfaces de plus de trois côtés peuvent avoir leurs angles en différens plans ; puisqu'elles peuvent être divisées en triangles ; ainsi une doële plate de quatre côtés, peut être divisée en deux triangles ; celle de cinq en trois, & ainsi de suite. Or les surfaces courbes irrégulieres peuvent être coupées par plusieurs plans, de maniere que leurs angles soient dans un même plan ; une tuile creuse, quoique d'une courbure conique, s'adapte si bien sur une planche que ses quatre angles la touchent. Une portion de cylindre, une portion de sphere, telles que sont celles des voussoirs des voutes régulieres, a la même propriété. Il n'en est pas de même d'une portion d'ar-

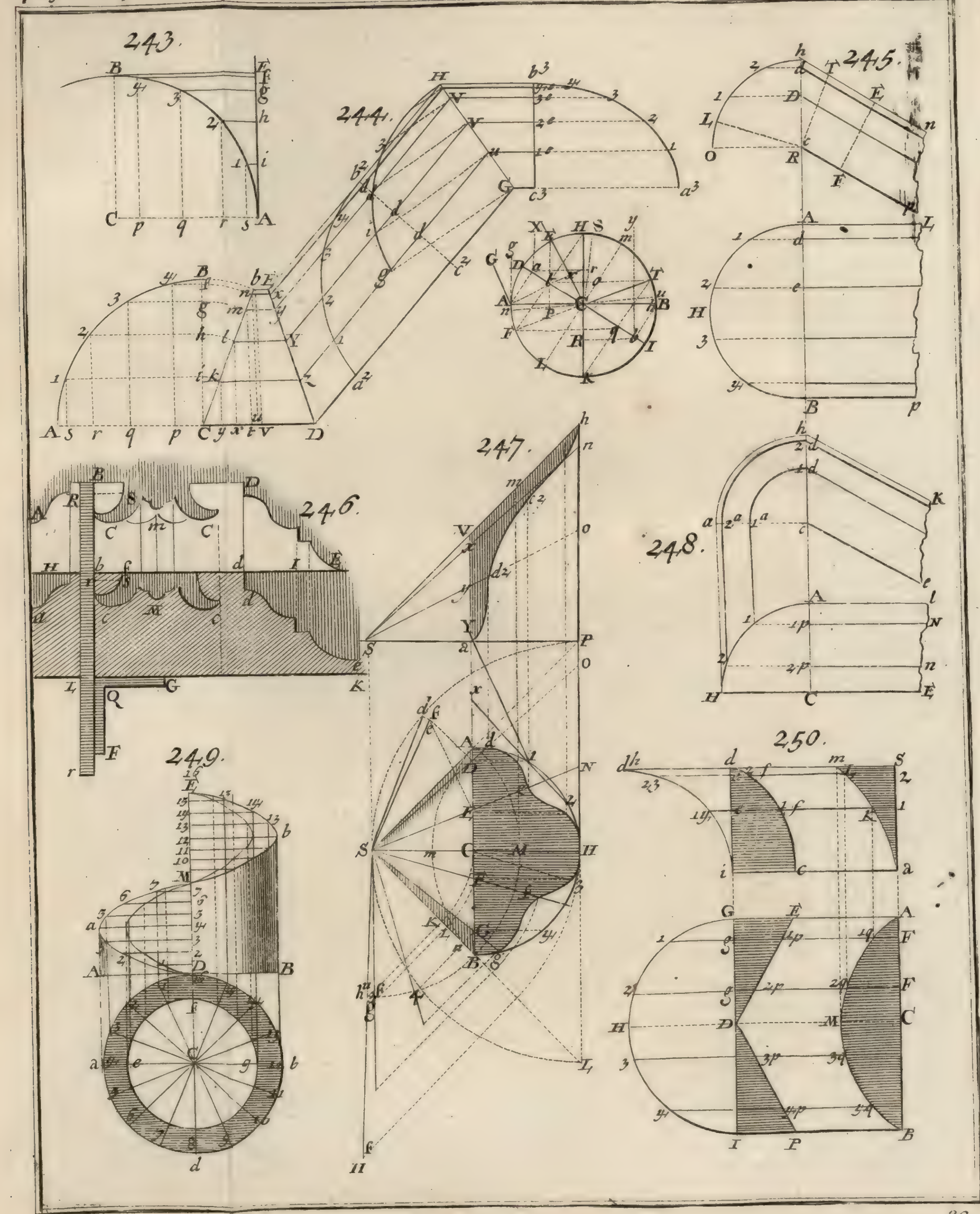
riere-voussure de Marseille ou de Saint-Antoine, &c; un voussoir posé sur une planche ne la touchera que par trois de ses angles, & le quatrieme restera en l'air. Pour connoître de combien il s'écarte de ce plan, il faut que la distance en soit mesurée par une perpendiculaire abaissée de son sommet sur cette surface plane; donc il importe de supposer un plan pour trouver la situation des parties des surfaces irrégulieres, & les faire avec la précision nécessaire.

De la supposition des surfaces cylindriques ou coniques de base quelconque, pour parvenir à la description & formation des surfaces courbes terminées par des lignes courbes à double courbure.

Le moyen des doëles plates que nous venons de proposer, est très-avantageux dans la pratique de la coupe des pierres, soit pour former avec sûreté & facilité les voussoirs des voutes de surfaces régulieres ou gauches, soit pour le ménagement des matériaux, mais il devient inutile pour la formation des surfaces courbes, cylindriques, coniques, sphériques ou gauches qui sont terminées par des lignes courbes à double courbure; c'est pourquoi il faut avoir recours aux suppositions de surfaces cylindriques, qui coupent la surface donnée suivant deux directions, dont la rencontre se fait à la courbe à double courbure qu'on cherche.

Nous entendons par le mot de surface cylindrique, non-seulement celle d'un cylindre ordinaire, qui a pour base un cercle ou une ellipse, mais une courbe quelconque connue ou inconnue, Géométrique ou Méchanique, telle que la donne la projection d'une courbe à double courbure sur un plan horisontal ou vertical.

Il est des surfaces gauches dont les arrêtes qui les terminent, ou celles de certaines sections qu'on y peut faire, se trouvent facilement par la seule inscription dans un cylindre ou un cone, à la surface duquel cette courbe conserve une progression connue. Telle est celle de la vis, soit qu'elle fasse ses révolutions parallelement, ou plutôt à égale distance de son axe, ou qu'elle se resserre en limace; ainsi supposant une vis ordinaire, dont les révolutions sont toujours équidistantes de son axe, il est


243.
244.
245.
246.
247.
248.
249.
250.

clair que le plan de la projection perpendiculaire à cet axe, est un cercle, & qu'on la peut inscrire dans un cylindre régulier droit, de la base duquel elle s'éleve également, ou suivant une progression connue.

De-là on tire la pratique de faire le profil ou élévation de cette espece de coürbe à double courbure ; comme nous l'avons expliqué ci-devant, en proposant pour exemple l'élévation d'un escalier à vis dont le contour sur le cylindre est une hélice tangente aux extrêmités des marches.

Si le contour de la vis n'étoit pas toujours équidistant de son axe, la construction du profil seroit encore la même, avec cette différence que si la base du cylindre dans lequel elle peut être inscrite, est elliptique, il faut choisir pour la ligne de base du profil un axe, ou un diametre convenable au dessein qu'on a de trouver les points de station les plus écartés ou les plus resserrés.

Si la vis se resserroit en montant, au lieu de l'inscrire dans un cylindre, il faudroit l'inscrire dans un cone ou dans une sphere ou sphéroïde, & mener toutes les lignes de division au pole, à quoi nous ne nous arrêtons pas, parce que ce cas arrive rarement en Architecture, au lieu que celui des vis cylindriques est d'un usage continuel, non-seulement pour les escaliers, mais encore pour les appuis rampans des tours rondes, circulaires ou elliptiques.

La plupart des courbes à double courbure ne fournissent pas les mêmes facilités pour être décrites, que la vis, par deux raisons; l'une, c'est que le cylindre dans lequel on peut l'inscrire, est très-souvent irrégulier, c'est-à-dire, qu'il n'a pas pour base une portion de cercle ou d'ellipse ; de sorte qu'il faut commencer par chercher le contour de cette base, par le moyen de la projection. En second lieu, parce qu'ayant cette courbe, & par conséquent la surface du cylindre qu'on peut élever au-dessus, on ne peut déterminer sur le cylindre aucun point de la courbe à double courbure, parce qu'on ne connoît pas la distance des points de la base du cylindre à ceux de la courbe qu'on cherche, comme on la connoît dans l'exemple de la vis ; de sorte qu'on est obligé de considérer cette courbe à double courbure par un autre situation perpendiculaire à la premiere, d'en chercher la projection, & d'élever sur la courbe qu'elle

donnera pour base un second cylindre perpendiculaire au premier, à la surface duquel cette courbe doit encore se trouver.

Or puisqu'elle est dans chacune des surfaces cylindriques trouvées, il est évident qu'elle sera dans leur commune intersection; ce qu'il faut remarquer comme un principe de pratique des plus importans que nous ayons à proposer, & dont on verra une application continuelle, lorsque nous parlerons des voutes composées.

Pour éclaircir cette doctrine, & la rendre sensible par un exemple, nous choisirons ici une arriere-voussure de Saint-Antoine biaise & surbaissée, qui est une surface gauche, dans laquelle nous trouverons des courbes des sections planes, & des courbes à double courbure très-propres à donner une juste idée de la maniere de faire les plans, profils & élévations de toutes sortes de surfaces les plus difficiles à représenter, d'où l'on tire la maniere de les former, tant en pierre qu'en bois.

Pl. 21. Fig. 251. Soit (*Fig.* 251) le trapeze AEDB le plan horisontal d'une voute, dont la surface est gauche, comme celle que nous donnons pour exemple. Il faut premierement supposer que l'on en connoît les sections planes & paralleles suivant une direction; car si l'on n'en connoît rien, on ne peut rien deviner, puisque le raisonnement n'est qu'une conséquence tirée de quelque connoissance antérieure, ou suivant les Philosophes *procedere a noto ad ignotum.*

Supposons donc que l'on connoît les courbes de toutes les sections paralleles à la ligne du milieu CM, ou par une convenance, ou par une détermination arbitraire, comme on les connoît en effet dans l'arriere-voussure de Saint-Antoine, puisque c'est sur leur détermination que l'on en fait le trait. Il n'importe que ces courbes soient portions de cercle ou d'ellipse ou d'autre courbe; nous n'avons pas besoin d'en connoître la nature, pourvû qu'elles soient données, cela suffit.

Ayant mené des paralleles à la ligne du milieu CM en telle quantité qu'on le jugera à propos, pour avoir un nombre suffisant de points des courbes que l'on cherche, on menera par les points p^1, p^2, C, p^3, p^4, &c. où ces paralleles coupent la ligne AB qu'on prend pour base du ceintre de face, autant de perpendiculaires à cette ligne, qui couperont le ceintre de face donné A *h* B aux points ^{1}, ^{2}, *h*, ^{3}, ^{4}, où seront les hauteurs

des profils, c'eſt à-dire, des courbes de toutes les ſections planes qui paſſent par les lignes du plan horiſontal E p^1, n p^2, MC, N p^3, &c. paralleles à CM. *Fig. 251.*

Si l'on mene par toutes ces hauteurs des horiſontales h H, 33, 22, II, & qu'on les faſſe égales à leurs correſpondantes qui ſont tirées dans le plan horiſontal MC = h H, N p^3 = 33, n p 2 = 22, &c. on aura deux points de chacune des courbes des ſections faites par des plans paralleles entr'eux, & parce qu'on les doit ſuppoſer connues ou données, comme dans l'exemple préſent, où elles ſont ordinairement des quarts d'ellipſe, ou des arcs de cercle preſque tous moindres que le quart, il ſera aiſé de décrire ces ſections. Or comme elles doivent être dans des plans perpendiculaires au plan A h B, ce qu'il eſt impoſſible de faire ſur le papier, à moins qu'on n'y applique des pieces découpées volantes, on eſt réduit à les ranger de ſuite ſur le même plan, comme on voit à la Figure, ou toutes d'un ſeul côté, ou pour éviter la confuſion des lignes, partie d'un côté, par exemple vers A, partie de l'autre vers B. *Fig. 241. & 242.*

Toutes ces courbes ainſi placées, donneront facilement la poſition de tous les points qu'on y voudra marquer, par exemple leur milieu en m. Car ſi l'on mene par ces points autant d'horiſontales m x y paralleles à AB, elles couperont en y, les verticales h C, 3 p^3, 2 p^2, 1 p^1, &c. qui ſont à l'interſection du plan vertical A h B, & des plans qui ſe coupent perpendiculairement ſuivant ces verticales. La courbe tracée à la main par tous les points y y, ſera l'élévation de celle qui paſſe par le milieu de la doële de l'arriere-vouſſure, quoiqu'elle en ſoit bien éloignée dans cette repréſentation.

Il en ſera de même pour celle qu'on voudroit faire paſſer au tiers ou au quart, en travers d'une impoſte à l'autre.

Il eſt encore viſible que cette méthode ſert à tracer des paralleles aux arrêtes de devant A h B, ou du fond EMD; car il n'y a qu'à prendre ſur les arcs des ſections planes des longueurs données égales, comme 1 d, 2 d, 3 d, H d, &c. pour le haut, & p^1 e, p^2 e, C e, p^3 e, p^4 e, pour le bas, enſuite mener par tous les points d & e des horiſontales juſqu'à l'interſection des verticales correſpondantes, qu'elles couperont aux points x, x, x, & celles menées par les points e, e, en z, z, la ligne courbe tirée par ces points x, x, x; z, z, z, ſera la proction verticale;

c'eſt-à-dire, l'élévation des lignes paralleles aux arrêtes qui ne les feront cependant pas dans cette élévation.

La méthode que nous employons pour trouver les points des courbes projettés ſur un plan vertical, ſervira pour trouver la repréſentation des mêmes points ſur le plan horiſontal; il n'y a qu'à répeter toutes ces ſections planes de ſuite ſur leurs baſes horiſontales Ep^1, np^2, MC, &c. & par les points donnés *d*, *m*, *e*, de toutes ces courbes leur tirer des perpendiculaires *dx*, *my*, *ez*, & l'on aura ſur le plan horiſontal ABDE d'autres courbes *xx* X *xx*, *yy* Y *yy*, *z z z*, qui feront en termes d'Architecture, les *plans*, c'eſt-à-dire, les projections horiſontales des courbes qu'on cherche; leſquelles repréſentent des paralleles à AB, comme *x*, *x*, *x*, ou à ED, comme *z*, *z*, *z*, ou qui paſſent par le milieu de la doële, comme *y y y*.

Fig. 252. & 253. Pour abréger l'opération, on raſſemble toutes ces courbes ſur un profil M*h*AB (*Fig*. 252) que l'on peut faire différemment ſuivant les courbes que l'on veut tracer; par exemple, ſi l'on vouloit s'en ſervir pour chercher les points d'une courbe formée par une ſection plane G*g* parallele à ED (*Fig*. 253) il faut raſſembler les origines de toutes les courbes des ſections planes, que j'appellerai primitives en un ſeul point M, parce que ſi l'on porte la longueur MK du plan horiſontal, en M*k* ſur la baſe MA du profil, & qu'on lui éleve une perpendiculaire *k*L, elle coupera toutes les courbes des ſections primitives M 1, M 2, M 3, M*h*, &c. en des points *v u u*, qui donneront les hauteurs de la courbe plane ou ſection plane de la voute ſur la baſe G*g*; ainſi il n'y a plus qu'à les porter ſucceſſivement ſuivant leur ordre en *i u*, *i u*, *i u*, pour avoir les points *u*, *u*, *u*, de cette courbe.

Si au contraire on vouloit chercher les points de la courbe, qui ſeroit une ſection plane parallele à AB, comme I*g*; il conviendroit de raſſembler l'origine ſupérieure de toutes les ſections ſur une même ligne verticale C*h*Q (*Fig*. 254) par la même raiſon que dans l'exemple précédent; enſuite on couperoit ce profil par la perpendiculaire R*r*, dont la diſtance CR ſeroit égale à celle du plan horiſontal CR, laquelle donneroit les points S*s s* pour les hauteurs de la courbe.

Mais ſi la ſection étoit oblique à l'une & à l'autre face AB & ED, comme en *g* O; cette abréviation n'a plus lieu, il faut porter

ter à part ſur la baſe du profil toutes les longueurs EO, *no*, M*o*, & par les points *o*, *o*, du profil élever des perpendiculaires qui couperont les courbes correſpondantes en des points *t*, *t*, *t*, qui ſeront les hauteurs cherchées, qu'il faut porter ſur des perpendiculaires qu'on élevera ſur *g*O aux points *o* pour avoir les points *t*, *t*, *t*. Fig. 255.

De la maniere dont nous venons de trouver les courbes planes, & les courbes à double courbure, qu'on peut imaginer dans une ſurface gauche par des ſections tranſverſales, il ſera aiſé de tirer la méthode de trouver les projections de celles qu'on peut imaginer ſuivant la longueur ou direction de la voute, comme celle d'une ligne parallele à l'impoſte AE ou BD; telle ſeroit l'arrête de la longueur d'une traverſe de batis de ménuiſerie, dont l'arriere-vouſſure ſeroit revêtue.

Car ſi on fait à volonté pluſieurs ſections planes tranſverſales, comme A*h*B, IS*g*, &c. paralleles entr'elles, & qu'ayant pris ſur les courbes de ces ſections une partie égale, comme A*d*, I*d*, &c. on abaiſſe de ces points des perpendiculaires *db*, *de* ſur les diametres AB & I*g*, elles les couperont en des points *be*, &c. par leſquels ou tracera à la main une courbe qui ſera la projection de l'arrête *d* d'une ſection courbe parallele à l'impoſte AE, quoique cette projection ne la ſoit pas.

Il ſuit encore de la même méthode, que l'on peut trouver non-ſeulement des courbes longitudinales & tranſverſales, qu'on peut imaginer ſur la ſurface gauche d'un côté à l'autre, ou d'une face à l'autre, mais encore des projections des courbes à double courbure qui rentrent en elles-mêmes, comme ſi l'on vouloit faire un panneau ou un ornement circulaire ou elliptique dans la doële d'une arriere-vouſſure; ce que l'on exécute tous les jours depuis qu'elles ſont devenues à la mode.

Sur quoi il faut remarquer qu'il eſt impoſſible de décrire un cercle, ou une ellipſe parfaite ſur une ſurface courbe irréguliere, mais ſeulement une Figure qui approchera d'autant plus du cercle ou de l'ellipſe, que la ſurface ſur laquelle on le décrit ſera moins concave ou convexe; nous excepterons ſeulement les cas des ſurfaces ſphériques, ſphéroïdes, coniques, cylindriques & annulaires, où le centre de la Figure qu'on décrit ſe trouve au pole ou dans un axe. Ainſi quoiqu'on trace avec le compas une Figure ſemblable à un cercle ſur la ſurface de l'arriere-vouſſure qui nous ſert d'exemple, ce n'eſt qu'une

Fig. 253. apparence de cercle, laquelle en réalité eſt une courbe à double courbure, dont on peut trouver autant de points que l'on voudra, par la projection, ſur le plan horiſontal ABDE, où elle donnera une courbe en ovale pointue, comme on voit QX*qz*, & ſur le plan vertical A*h*B une courbe reſſerrée vers le haut, comme Q*hqz*.

Fig. 251. Premierement ayant déterminé la poſition du centre de ce cercle ſur la ſection primitive du milieu H*m*ᶜ C en *m*ᶜ pour l'élévation, & M *m*ᶜ H pour le plan horiſontal, & les longueurs égales de ſes rayons ſur la même courbe, l'un vers *d*, l'autre vers *e*; on on aura les projections verticales de ces points en X & en *z* ſur *h*C, & leur projection horiſontale en X *z* ſur CM.

Enſuite on fera des ſections planes, qui paſſent par le point Y du plan horiſontal en différentes directions à volonté; on prendra ſur ces courbes des rayons égaux, dont on cherchera les projections, comme nous l'avons dit des autres points *d* & *e*, & l'on aura ainſi autant de points que l'on voudra en projection verticale ou horiſontale; c'eſt-à-dire, qu'on en aura, en termes de l'art, les *plans* & profils; ce qui ſuffit pour former la Figure requiſe en pierre ou en bois, comme nous le dirons au IVᵉ. Livre, Chap. VI.

Remarque ſur l'uſage.

La regle de pratique que nous venons d'établir, toute ſimple qu'elle eſt dans ſon principe, étant une ſuite naturelle de ce que nous avons dit juſqu'à préſent touchant la projection, eſt le *précis de toute la ſcience de la coupe des pierres & des bois.*

Dans la coupe des pierres il convient de faire, autant que l'on peut, des ſections planes pour la commodité de l'appareil & de l'exécution, lorſqu'on en eſt le maître, comme il arrive ſouvent.

Mais dans la coupe des bois pour les revêtemens de lambris de Menuiſerie, ou pour les incruſtations des ornemens de marbre, on ne peut éviter les courbes à double courbure, parce que les ornemens qui conviennent à ces ſortes d'ouvrages, conſiſtent en bandes paralleles, ou en bordures circulaires ou elliptiques, ou en courbes de contour arbitraire. Ainſi on peut regarder l'exemple que nous venons de donner pour

tracer les projections des courbes qu'on suppose dans une voute, & particulierement dans celles dont les doëles sont gauches, comme le fondement & le précis de toute la science des Menuisiers & des Marbriers, dans les Ouvrages les plus difficiles qui se présentent pour les traits de la coupe dont ils ont besoin. Je puis même avancer que ce Problême seul, contient tout le Livre de la coupe des bois du Sieur BLANCHARD, qui n'en est qu'une application à différens cas; car quoiqu'il ne tire pas les lignes de projection depuis leur origine jusqu'à leur base naturelle, horisontale ou verticale, mais seulement par des portions paralleles à ces bases, apparemment pour éviter la confusion des lignes, sa pratique ne differe en rien de la notre, comme nous allons le montrer sensiblement. *Fig. 251.*

Soit (*Fig.* 251) une des sections planes & primitives quelconque, par exemple, Imp^1, dont la base horisontale est la ligne droite $P^f p^1$, & la verticale IP^f. Soit dans cette courbe Imp^1 les points d, m, e, dont on veut avoir les projections, on menera pour celle du point d l'horisontale df, qui coupera la verticale $1f$ en f, la distance $1f$ est celle que les Ouvriers appellent le *gauche de la courbe* pour l'élévation; ensuite pour avoir celle du point m, on menera mo jusqu'à l'aplomb qui tombera de d, que l'horisontale mo rencontrera en o, la ligne do sera le *gauche* de la couche dm; de même tirant $e7$ jusqu'à l'aplomb $m7$, la ligne $m7$ sera le *gauche* de la courbe me: enfin et sera le gauche de la courbe ep^1, considéré seulement, comme dans les précédentes projections, en qualité d'élévation, c'est-à-dire, de projection verticale & pour l'horisontale, ce seront les lignes fd, om, $7e$, tp^1, comme on le voit clairement. Or il est évident que toutes ces lignes étant paralleles aux lignes IP^f, & $P^f p\,1$, sont égales à toutes leurs parties If, fg, $g9$, $9P^f$, pour l'élévation, & $P^f 9$, 98, $8t$, tp^1, ce qui n'a pas besoin de démonstration, puisqu'elles sont terminées par des lignes paralleles; il est donc indifférent de prendre fd pour $P^f 9$, om pour 98, $7e$ pour $8t$, sur le plan horisontal, & do pour fg, $m7$ pour $g9$, & et pour $9Pf$; ainsi l'on peut reconnoître une entiere uniformité entre la méthode du Sieur BLANCHARD & celle-ci.

C'est à celui qui fait le trait d'une coupe de bois ou de pierre à éviter la confusion des lignes, pour ne pas s'embrouiller; mais aussi on peut dire à la faveur des lignes entieres, qui don-

Fig. 251. nent les points qu'on cherche ſans tranſpoſition, qu'elles guident plus ſûrement; car dans une longue opération, on eſt ſujet à prendre une ligne pour l'autre, ou à les tranſporter où l'on ne doit pas; par exemple, une horiſontale au profil, ou une verticale au plan horiſontal; c'eſt pour cette raiſon que nous avons cru devoir répeter les ſections planes primitives au plan horiſontal & à l'élévation, pour que l'œil fut conduit dans la poſition des points de projection depuis leur origine.

Application à l'uſage.

Lorſqu'on a la baſe d'une ſurface cylindrique, ſur laquelle eſt l'arrête courbe que l'on veut former, on en applique le panneau ſur un parement, c'eſt-à-dire, une ſurface plane que l'on dreſſe ſur le bois ou la pierre que l'on veut tailler, pour en tracer exactement le contour. Enſuite on abat le bois à l'équerre ſur cette baſe, en ſuivant ſon contour, ce qui fait une portion de cylindre droit; lorſque cette ſurface cylindrique eſt formée, on éleve des perpendiculaires à la baſe par les points qu'on a marqué dans ſon contour, par exemple, z, z, yy, de la Figure 251; enſuite on porte ſur chacune de ces perpendiculaires la hauteur que l'on a trouvée dans l'élévation, comme $\overline{p^1z}$, $\overline{p^2z}$, Cz, p^3z, &c. qui donnent ſur la ſurface cylindrique des points, par leſquels on trace la courbe de l'arrête du bois ou de la pierre qu'on taille; ce que l'on entendra mieux par les traits particuliers au quatrieme Livre, Chapitre VI.

Pour s'épargner cette ſuite d'opérations de tirer des perpendiculaires à la baſe, & d'y porter les hauteurs qui leur conviennent; comme auſſi pour tracer le contour de la courbe à double courbure plus régulierement, on fait des développemens des ſurfaces cylindriques, qu'on trace ſur des corps flexibles, comme du carton, du fer-blanc, des lames de plomb, &c. & on les applique enſuite ſur les ſurfaces qu'on veut tailler, c'eſt un des grands ſecours de l'art, dont nous allons parler.

251.

252.

253.

254.

CHAPITRE V.

De l'Epipedographie ou description des surfaces des solides, déployées sur des plans,

En termes de l'Art,

DU DEVELOPPEMENT.

LES surfaces des corps qui composent les voutes, sont presque toujours en partie planes, & en partie courbes.

Les planes sont les *lits* & quelquefois les *têtes*; les courbes sont toujours les doëles, quelquefois les têtes, & quelquefois aussi les lits. L'art de faire le développement de toutes ces surfaces consiste à les réduire toutes en planes, même les courbes, quoiqu'elles ne puissent le devenir sans changer de nature, & que cet artifice soit encore inconnu à la Géométrie, qui ne peut rectifier les cercles, ni les ellipses qui sont les bases des surfaces courbes.

Nous n'avons pas besoin dans la pratique de pousser cet art à la perfection Géométrique; premierement, parce qu'avant que de creuser ou arrondir un corps, on fait, suivant la méthode des suppositions dont nous venons de parler, une surface plane, qui passe par la corde de l'arc concave de sa base, ou par la tangente d'un arc convexe, réduisant ainsi les corps ronds en polyedres. *Fig.* 244.

Secondement, parce que lorsqu'il s'agit de rectifier un arc de cercle ou d'ellipse, comme il arrive quelquefois, par exemple, aux portes en tour ronde, aux trompes sur une ligne droite, & à quelques enfourchemens, on le fait d'une maniere assez juste, quoique Méchanique, pour n'en pas sentir l'erreur dans l'opération. Il ne s'agit que de prendre avec le compas, plusieurs parties à volonté, si petites que les cordes soient sensiblement égales aux arcs dont elles sont les sous-tendantes, & ajouter ces cordes de suite sur une ligne droite pour en avoir la somme.

Cependant, comme il y a une maniere Géométrique de par-

venir à une précision plus parfaite que celle où l'opération peut atteindre, nous croyons devoir insérer ici le Problême que nous devons à M. SAURIN, de l'Académie Royale des Sciences, par lequel on peut approcher infiniment de la quadrature du cercle, dont on parle tant dans le monde, laquelle dépend de la rectification de sa circonférence.

PROBLEME V.

Trouver une suite de lignes droites qui approchent de plus en plus de la rectification d'un arc de cercle donné, tant en dessus qu'en dessous.

Pl. 22. Fig. 255. Soit (*Fig.* 255, l'arc donné AD, moindre que la demi-circonférence ADB. Ayant fait AT perpendiculaire sur le diametre AB, on tirera la corde BD qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de la ligne AT en T, ensuite on divisera l'arc AD en deux également en F, & l'arc AF encore par le milieu en G, & ainsi de suite, autant que l'on voudra approcher de l'exactitude de la rectification de l'arc AD. Après quoi on tirera la corde AF, qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre BT au point H, par lequel on menera HI perpendiculaire à AH: on tirera de même la corde AG qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne HI au point *K*, par lequel on menera aussi KL perpendiculaire à AK; on peut réïtérer cette opération, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la plus petite division de l'arc donné.

Je dis que l'arc AD est plus grand que la ligne AH, & plus petit que la ligne AI, plus grand que AK, & moindre que AL, & ainsi de suite. De sorte que dans le cas présent, l'excès & le défaut de la ligne droite sur la courbe, est déja dans la différence des lignes AK & AL, qui sont presque sensiblement égales entr'elles, & par conséquent pourroient être prises dans la pratique pour égales à l'arc sans erreur sensible; de sorte qu'il est presque inutile de pousser l'opération plus loin, quoiqu'on le puisse.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire par le point D la tangente MDN, on reconnoîtra que les lignes DM, AM, MT sont égales entr'elles; car

l'angle MDT, ou son opposé au sommet NDB, qui a pour mesure la moitié de l'arc BD (par la 32 du IIIe. Livre d'EUCLIDE) sera égal à l'angle ATB, puisque les triangles BDA, TDA sont semblables, parce qu'ils le sont au triangle TAB, avec lequel ils ont chacun un angle T & B commun, & un angle droit en D; par conséquent l'angle BTA sera égal à l'angle BAD; or BAD a aussi pour mesure la moitié de l'arc BD, donc le triangle DMT étant isoscele, le côté MD sera égal à MT, & il sera aussi égal à MA, parce que MD & MA sont des tangentes aux points D & A (par la 3e. du IIIe. Livre d'EUCL.) dont l'arc AD qui est moindre que ces deux tangentes AM, MD, sera moindre que AT, qui est égal à leur somme. Pl. 22. Fig. 255.

Si l'on tire ensuite par le point F, moitié de l'arc AD la corde BF, & qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre AT en P, on prouvera de même que l'arc AF est moindre que AP; or menant du centre C la ligne CE perpendiculaire à la corde AD, elle divisera cette corde & son arc en deux également, de sorte qu'elle passera par F qui est le milieu de l'arc AD par la construction, & il se formera deux triangles semblables AFE, AHD, & APF, AIH, qui font voir que AH est double de AF, & AI double de AP, puisque AD est double de AE, donc la ligne droite AH, qui n'est égale qu'aux deux cordes des deux moitiés de l'arc AD, sera moindre que cet arc, & la ligne AI sera plus grande que l'arc, parce qu'elle est égale à quatre tangentes de sa moitié AF, comme AI est égale aux deux tangentes du tout AM, MD. On prouvera de même que l'arc AD est plus grand que la droite AK, qui n'est égale qu'à quatre fois la corde de l'arc AG, quart de AD, & que AL est plus grande, parce qu'elle est égale à huit tangentes aux deux extrêmités de cet arc AG, prises comme AM & MD.

Du développement des corps compris par des surfaces planes.

Développer un corps, c'est étendre sur une surface plane toutes celles dont il est enveloppé, pour en voir d'un coup d'œil le rapport & l'étendue.

D'où il suit qu'il ne suffit pas de les arranger de suite en toute sorte d'ordre & de combinaison.

1°. Parce qu'on ne pourroit distinguer le rapport des côtés qui

doivent être communs à deux ſurfaces contigues, & ſe réunir dans l'enveloppement.

2°. Parce qu'étant raſſemblés ſans intervalles, lorſque la ſomme des angles des ſurfaces contigues deviendroit égale à quatre droits, ils compoſeroient une ſurface plane, qui ne pourroit plus être pliée pour envelopper le corps d'où elles ont été tirées, ſans être diviſée & ſeparée en pluſieurs morceaux.

3°. Qu'on ne pourroit connoître la plus grande longueur & largeur que l'arrangement naturel de toutes les ſurfaces doit occuper, par exemple, dans le développement du cube, (*Fig.* 263) qui eſt une croix, la plus grande longueur du développement eſt de quatre quarrés de ſuite, & ſa plus grande largeur de trois; mais ſi l'on mettoit deux rangs de trois quarrés de ſuite, ils compoſeroient une ſurface plane qui ne pourroit plus être pliée, parce que quatre angles droits ſeroient raſſemblés aux mêmes points *a*, *b*, *c*, *d*; or il eſt démontré dans les Elémens de Géométrie, (EUCL. Liv. II. Prop. 21.) que la ſomme des angles plans qui en compoſent un ſolide, eſt moindre que quatre droits.

4°. Il pourroit arriver dans l'enveloppement, que deux ſurfaces tomberoient l'une ſur l'autre, & que l'une des deux manqueroit ailleurs, comme ſi l'on rangeoit celles du cube en façon d'équerre, le dernier quarré d'une branche tomberoit ſur le pénultieme de l'autre; il faut de plus examiner de combien d'angles plans eſt compoſé l'angle ſolide du corps qu'on veut développer, pour voir ſi le développement peut être replié ſans diviſion ni tranſpoſition des ſurfaces; ainſi pour le Tetraedre, qui eſt le premier corps régulier, il ne faut pas raſſembler plus de trois angles des ſurfaces de ce corps en un point; parce que ſi l'on en joignoit quatre, comme à la Figure 259, elles formeroient, étant pliées, un angle ſolide qui ſeroit celui de l'Octaedre.

D'où il ſuit que le développement du Tetraedre ne ſouffre que deux combinaiſons, ou comme à la Figure 257, ou comme à la Figure 258, il en eſt de même du développement du cube, dont l'angle ſolide n'eſt compoſé que de trois angles plans; mais parce qu'on ne peut joindre quatre de ſes ſurfaces enſemble, comme au Tetraedre, ſans joindre auſſi quatre angles égaux à quatre droits; il ſuit que ſon développement ne ſouffre que deux combinaiſons qui forment, l'une la croix Latine, comme

me on voit à la *Fig.* 263, l'autre un T. Suivant ces principes le développement des corps réguliers sera très-facile ; car il ne s'agit que de répeter la même surface dont il est composé, dans l'ordre qui convient à la nature de leurs angles : mais le nombre de ces corps est très-petit comme l'on sçait, il n'y en a que cinq ; sçavoir.

Le Tetreadre, qui est enveloppé de quatre triangles équilatéraux.

Le cube, de six quarrés égaux.

L'Octaedre, de huit triangles équilatéraux.

Le Dodecaedre, de douze pentagones égaux.

Enfin *l'Icosaedre*, de vingt triangles équilatéraux ; nous ne donnons point les Figures de ces développemens, elles sont faciles à faire après ce que nous venons de dire, & d'ailleurs se trouvent dans tous les Livres de Géométrie.

Il est d'autres corps solides régulierement irréguliers, formés par les sections des angles solides des réguliers coupés par des plans qui les émoussent, ce que l'on peut faire à tous les corps réguliers & irréguliers, & qui produira différentes Figures par la section, & différens Poligones qui seront les restes de ces sections. Ainsi en coupant les angles du Tetraedre, on aura un solide enveloppé de quatre triangles, & d'autant d'exagones réguliers ou irréguliers, si l'on veut. Le cube coupé de même deviendra composé de six octogones réguliers ou irréguliers, & de huit triangles équilatéraux. L'octaedre deviendra composé de huit exagones réguliers ou irréguliers & de six quarrés, &c. Et si l'on coupe encore leurs angles solides, on formera de nouvelles Figures de surfaces & de nouveaux poligones des restes; ce qui n'est pas d'usage pour notre sujet, mais qui sert à nous mener à la connoissance de l'impossibilité de faire un développement d'un polyedre, qui seroit enveloppé d'une infinité de surfaces infiniment petites & différentes, tel qu'on peut se le représenter dans la sphere; car sans pousser bien loin la section qu'on pourroit appeller l'*émoussement* des angles solides des polyedres, si l'on émousse les angles de l'icosaedre également par des sections planes, qui formeroient dix pentagones réguliers & des restes quadrilateres, d'où résulte un polyedre de trente surfaces inégales; on trouvera déja une Figure qui approchera tellement de la sphérique, qu'on la jugera telle, lors-

qu'on la regardera d'un peu loin ; en effet elle eſt déja propre à rouler comme une boule.

Les ſolides qui nous intéreſſent ici pour en faire le développement, ſe réduiſent principalement aux pyramides & aux priſmes, parce qu'ils nous conduiſent à la connoiſſance de celui des cones & des cylindres, qui ſont les Figures les plus ordinaires aux voutes, que nous avons toujours pour objet dans cet Ouvrage ; d'autant plus qu'ils nous fourniſſent auſſi les moyens de développer la ſurface de la ſphere, quoiqu'imparfaitement, mais ſuffiſamment pour les beſoins de la pratique ; comme on l'enſeignera au IVe. Livre, Chap. VII.

PROBLEME VI.

Faire le développement d'une piramide quelconque, droite ou ſcalene.

On ſuppoſe premierement, que le polygone de la baſe eſt connu ; ſecondement, que l'on connoît la hauteur du ſommet de la pyramide ſur le plan de la baſe, & ſa projection ſur ce plan.

Si la piramide eſt droite, il eſt évident que la projection du ſommet eſt au centre du polygone qu'elle a pour baſe, parce qu'elle ne panche d'aucun côté, ſuivant ſa définition.

D'où il ſuit qu'il n'y a de pyramide exactement droite, que celle qui a pour baſe un polygone régulier ; car ſi ce polygone n'a pas tous les côtés égaux, quoiqu'inſcrit dans un cercle, la projection du ſommet ſera plus près d'un côté que de l'autre ; par conſéquent la face qui a pour baſe le côté qui en approche le plus, ſera plus inclinée, & celle qui en approche le moins, ſera plus couchée ; c'eſt-à-dire, en termes de l'art que l'une aura plus, l'autre moins de talud, ainſi elle paroîtra plus pancher d'un côté que de l'autre, quoique ſon ſommet ſoit à plomb ſur le centre du cercle dans lequel ſa baſe eſt inſcrite.

Que les côtés d'une telle baſe approchent plus ou moins du centre ; cela eſt démontré dans la quinzieme prop. du IIIe. Livre d'EUCLIDE, puiſque ce ſont des cordes inégales d'un cercle.

Ce ſera encore pis, ſi la baſe de la pyramide eſt un polygone irrégulier, qui ne puiſſe être inſcrit dans un cercle, parce qu'a-

lors non-ſeulement les faces, mais encore les arrêtes auront des taluds inégaux; de ſorte que la pyramide panchera de tous côtés.

Cette obſervation fournit la raiſon d'une ſingularité qu'on fait remarquer aux Voyageurs qui paſſent à Soleure en Suiſſe; une des tours de l'enceinte, qui eſt en forme de petit baſtion à cinq côtés, & couverte d'un comble en pyramide extrêmement haut, comme les éguilles des anciens clochers, paroît toujours pancher du côté où on la regarde; les gens qui ne ſont pas Géometres attribuent cette merveille à la grande induſtrie de l'Ouvrier, qui en a fait la charpente. Je fus en effet frappé de cette apparence, mais je reconnus bientôt que c'étoit une ſuite néceſſaire de l'irrégularité & de l'imparité du polygone de de la baſe, où par la nature du pentagone, un angle eſt diamétralement opppoſé à une face; ce qui préſente un grand talud d'arrête contre un moindre talud de la face, ſi le Spectateur eſt placé ſur la perpendiculaire à ce diametre; & s'il s'en écarte, l'apparence du talud d'une arrête s'allonge, & l'autre ſe racourcit. Revenons à notre ſujet: ſi la pyramide eſt droite régulière, la hauteur étant donnée, il ſera aiſé de trouver les longueurs des arrêtes, qui ſont les côtés qui comprennent ſes ſurfaces; car (*Fig.* 260) il n'y a qu'à quarrer le rayon *ed* de la baſe, & la hauteur *cs*, & tirer la racine quarrée de leur ſomme on aura le côté *ſd*, lequel étant donné, ſuffit pour tous les autres qui lui ſont égaux; alors le développement d'une pyramide droite ne conſiſte qu'à répeter & ranger de ſuite autant de triangles iſoſceles qu'il y a de côtés à la baſe, & ajouter la ſurface de cette baſe, comme on voit à la Figure 261, qui eſt le développement de la pyramide pentagone, Fig. 260. *Fig.* 260. & 261.

Si la pyramide eſt ſcalene, c'eſt-à-dire, oblique ſur ſa baſe, l'opération devient un peu plus compoſée, parce que les triangles de ſes ſurfaces étant inégaux, il en faut chercher les côtés; & pour y parvenir, ce n'eſt pas aſſez d'avoir la hauteur du ſommet ſur le plan de la baſe, il faut encore le point de ſa projection.

Soit (*Fig.* 262) la pyramide triangulaire ABCS donnée, s'il s'agiſſoit d'opérer ſur le ſolide, il faudroit abaiſſer du ſommet S la perpendiculaire SP ſur le plan de la baſe prolongée, ou par le moyen de deux équerres, ou par le Problême de la onzieme prop. du XIe. Livre d'EUCLIDE, pour avoir le point P, *Fig.* 262.

Fig. 162. qui est la projection du sommet S, dans la distance où il doit être à l'égard du côté BC de la base de la pyramide tracée sur un dessein à part. Puis ayant tiré de ce point une droite PD à volonté, on lui fera une perpendiculaire PS égale à la hauteur donnée; ensuite du point P pour centre & des distances PA, PB, PC pour rayons, on décrira des arcs A *a*, B *b*, C *c* qui couperont PD aux points *a*, *b*, *c*, par lesquels tirant les lignes *a* S, *b* S, *c* S au point S, on aura les points que l'on cherche. Par le moyen de ces côtés & ceux de la base, on décrira trois triangles de suite qui formeront le développement de la pyramide, en y ajoutant pour quatrieme celui de la base.

DEMONSTRATION.

Puisque la ligne SP, qui doit être supposée en l'air, est perpendiculaire au plan de la base ABC prolongé, elle sera perpendiculaire à toutes les lignes menées dans ce plan par le point P (par la cinquieme prop. du XI[e]. Liv. d'EUCL.) : donc les triangles APS, *a* PS, sont rectangles en P; mais par la construction AP = *a* P & PS est commun, donc l'hypotenuse AS est égale à *a* S, & par la même raison *b* S = BS & *c* S = CS; *ce qu'il falloit faire.*

Nous pouvons appliquer cette solution à toute autre pyramide polygone de quelque nombre de côtés que sa base puisse être, puisqu'il est évident qu'elle pourra être réduite en triangles.

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de *faire le développement d'un cone quelconque*, droit ou scalene; car on peut le considérer comme une pyramide, dont la base a une infinité de côtés infiniment petits; ainsi le cone droit étant enveloppé d'une infinité de triangles isosceles, il est visible que son développement sera un secteur de cercle, par la comparaison de celui de la pyramide pentagone de la Fig. 161, qui l'imite déja beaucoup, quoiqu'en si petit nombre de côtés A *b*, *bc*, *c d*, *d e*, *e f*, ce qui est connu de tout le monde.

Mais si ce cone droit étoit coupé par une base oblique à son axe, il est clair qu'il se formeroit une section différente du cercle, & par conséquent qu'il en résulteroit un contour de développement différent du secteur.

Pareil changement arriveroit ſi le cone étoit droit ſur une baſe elliptique, ou ſcalene ſur une baſe circulaire ; en ce cas ſi le cone eſt ſcalene, les longueurs de ſes côtés étant inégales, donneront pour contour de la baſe développée une courbe qui ſera toujours inégalement éloignée du ſommet S, excepté dans les points correſpondans, oppoſés non pas diametralement, mais ſuivant les perpendiculaires menées au diametre qui paſſe par le plus grand & le plus petit côté du cone ; de ſorte que cette courbe ne peut plus être un cercle, comme elle étoit dans le cone droit.

On demandera peut-être comment on peut connoître le plus long & le plus petit côté de la ſurface d'un cone ſcalene : le voici.

PROBLEME VII.

La baſe, la hauteur & la projection du ſommet d'un cone ſcalene éant données, déterminer le plus long & le plus petit côté de ſa ſurface.

Soit (*Fig.* 264) le cercle ADBR, la baſe du cone dans le plan de laquelle (prolongé s'il le faut) eſt donné ou trouvé le point P pour la projection du ſommet S; ayant mené de ce point P par le centre C de la baſe ADBR la ligne PC, on fera PS perpendiculaire ſur PCB, & égale à la hauteur donnée ; ſi du ſommet S on mene une ligne au point A, où la ligne PB coupe le cercle de la baſe, je dis que SA ſera le plus petit côté du cone. *Fig.* 264.

Et ſi du même ſommet S on mene SB, où la même ligne coupe le cercle de la baſe, je dis que la ligne SB ſera le plus long côté du cone.

DÉMONSTRATION.

Par la huitieme du IIIe. Livre d'EUCLIDE, la ligne PA eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener au cercle du point P ; donc le triangle PSA eſt le plus petit de tous les rectangles qui auront pour côté commun la hauteur PS.

Donc SA eſt l'hypotenuſe qui approche le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qui eſt la plus courte.

Par la même propoſition d'EUCLIDE, la ligne PB étant la

Fig. 264. plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point P à la circonférence concave DB 3, il eſt clair que la ligne SB eſt celle qui s'éloigne le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qu'elle eſt la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point S à la circonférence du cercle ADBR, qui eſt la baſe du cone.

Donc SA eſt le plus petit côté du cone ſcalene, & SB eſt le plus long; *ce qu'il falloit trouver.*

Cela ſuppoſé, il ſera facile de faire le développement d'une moitié du cone ſcalene à laquelle l'autre doit être égale, & abréger ainſi l'opération de moitié; en ſuivant la même pratique que nous avons donnée pour la pyramide triangulaire.

On diviſera le demi-cercle ARB en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra avoir de côtés du cone, par exemple, ici en 4, aux points 1, 2, 3, & l'on menera du point P à toutes ces diviſions des droites P 1, P 2, P 3, que l'on tranſportera par des arcs de cercle faits du point P pour centre en $P 1^b$, $P 2^b$, $P 3^b$; ſi du ſommet S on mene des lignes à ces points, il eſt clair, par le Problême précédent, que les lignes SA, $S 1^b$, $S 2^b$, $S 3^b$, SB ſont autant de côtés du cone, qui paſſent par les points donnés à la baſe A, 1, 2, 3, B; ainſi il ne s'agit plus que d'en faire uſage pour le développement.

Fig. 266. Ayant porté à part (*Fig. 266*) la ligne SB de la Fig. 264 en S^d, B^d pour premier côté d'un triangle, on prendra la corde A 1, de laquelle comme rayon, & du point B^d pour centre, on décrira un arc *3 x*; enſuite ayant pris la longueur $S 3^b$ de la Fig. 264 pour rayon, & du point S^d pour centre, on décrira un arc *3 y*, qui coupera le précédent au point 3, lequel eſt un de ceux du développement de la baſe.

De la même maniere on trouvera le point 2 en faiſant le triangle S^d, 3, 2, ſur le côté S^d 3 pour baſe, avec les deux autres donnés dans la Fig. 264; ſçavoir, $S 2^b$, & la corde 1, 2, & en continuant ainſi de ſuite, on formera le polygone S^d, B^d, 3, 2, 1, a^d, S *d*, qui ſera le développement, de la moitié de la pyramide octogone, inſcrite dans le cone; & ſi au lieu des lignes droites B^d 3, 3 2, 2 1, 1 a^d, on trace à la main une courbe B^d *e f* R *g a*, on aura le contour de la baſe du cone, laquelle ſera d'autant plus parfaite que le polygone inſcrit dans la baſe du cone aura plus de côtés; ce qui eſt évident, puiſqu'on aura un plus grand nombre de points. Il paroît, par exemple,

dans la Figure présente, qu'il auroit été nécessaire que ce polygone au lieu de huit, eut eu seize côtés pour tracer l'arc $B^d e 3$, parce que la courbure de l'arc $B^d 3$ est considérable à l'égard de la corde $B^d 3$, & qu'il auroit été à propos qu'il eut été de 24 cotés pour tracer l'arc $3 f 2$, pour avoir deux points dans cet arc, à cause du changement de la courbure, mais que l'octogone suffit pour la partie 2 1, dont l'arc differe peu de la corde: ainsi du reste, suivant le plus ou le moins d'exactitude qu'on se propose. *Fig. 266.*

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de *faire le développement de toutes les courbes des sections coniques sur la surface d'un cone quelconque*, lorsque leurs axes sont donnés dans le triangle par l'axe, & les plus grand & plus petit côtés du cone, supposant les plans des sections perpendiculaires à ce triangle par l'axe ASB.

Car (*Fig.* 264) 1°. *pour l'ellipse*, supposant un des axes donné en Eb, & la base du cone divisée, comme on l'a dit, aux points 1, 2, 3, on menera par ces points des perpendiculaires à la ligne AB, qui la couperont aux points $p C q$, par lesquels & par le sommet S on menera les lignes pS, CS, qS qui couperont Eb aux points $f g h$, d'où menant des paralleles à AB jusqu'à la rencencontre des côtés correspondans $S 1^b$, $S 2^b$, $S 3^b$ qui les couperont aux points x, y, z, je dis que les côtés Sx, Sy, Sz seront terminés en E, x, y, z, b, à la circonférence de l'ellipse, & que si chacun de ces côtés est porté à la Fig. 266, sur ceux du développement du cone, qui passent par les points B^d, 3, 2, 1, a^d, ils donneront les points b^d, x^d, y^d, z^d, E^d, par lesquels traçant à la main une ligne courbe, on aura la moitié de l'ellipse, qui a pour un de ses axes la ligne donnée Eb (*Fig.* 264). *Fig. 264.*

On en fera de même pour la description de la courbe qui est le développement d'une parabole ou d'une hyperbole, dont l'axe sera donné dans le triangle par l'axe du cone ASB.

2°. *Pour la parabole*, soit (*Fig.* 264) l'axe donné $P^6 r$, lequel dans la Figure présente est coupé par quatre lignes SB, Sq, SC, Sr, par le moyen desquelles on trouvera autant de points de sa circonférence de chaque côté, non compris celui du sommet P^6; or ces points doivent être répandus sur la surface du cone développé, comme nous venons de le dire pour l'ellipse

Fig. 264. & 266. dans l'exemple précédent sur les lignes $S^d B^d$, $S^d 3$, $S^d 2$, $S R^d$; ainsi portant la longueur $S p^6$ de la Fig. 264 en $S^d P^d$ de la Figure 266, on aura sur S^d, B^d, le sommet P^d de la parabole développée. Sx porté en S^d, $x3$ sur $S^d 3$, donnera le point 3, provenant de la division de la base 3, à cause de la perpendiculaire $3q$, sur AB ; de même on portera Sn en $S^d n$ sur $S^d 2$, qui donnera le point n provenant du point 2 de la base, à cause de 2 C perpendiculaire sur AB ; de même enfin Sr en $S R^d$ provenant du point R^d, à cause de Rr perpendiculaire sur AB ; la courbe P^d, $x3$, nR^d sera le développement de la parabole proposée.

3°. *Pour l'hyperbole*, on opérera de même que pour la parabole, mais dans la Figure présente où la demi-base du cone n'est divisée qu'en quatre parties, & l'axe de l'hyperbole est donné en Rr, on n'aura qu'un point à sa circonférence entre son sommet H & celui de som amplitude Rr à la base, parce que l'axe Hr n'est coupé que par la ligne pS provenant du point 1 à la circonférence de la base du cone. De sorte qu'on n'aura que trois points pour la moitié du développement de cette hyperbole; sçavoir, le sommet H, en portant SH de la Figure 264 en $S^d h$ de la Fig. 266. 2°. On aura le point o en portant So en $S^d o$ sur S^d, & enfin le point R à la base comme à la parabole où on les suppose communs, par hasard.

Nous n'ajouterons rien ici de la description du cercle produit par une section du cone coupé par un plan parallele à la base, parce qu'il est aisé de voir que les côtés du cone qui le coupent, & par conséquent qui en donnent les points sur la surface conique développée, doivent être proportionnels à ceux qui sont continués jusqu'à la base du cone $S^d B^d : S^d b :: S^d a^d : S^d a$, & de même sur les autres côtés $S^d 3$, $S^d 2$, $S^d 1$. Or ces proportions sont toutes trouvées à la Fig. 264, où la ligne ab coupe proportionnellement les côtés SB, Sb Sq, SC, $S2^b$, St, $S1^b$, SA, aux points b, m, n, o, a; mais si le cercle provenoit d'une section sous-contraire, il tomberoit alors dans le cas du développement de l'ellipse.

Remarque sur certains points des courbes développées sur le cone.

Puisque le côté SA du cone est le plus petit de tous ceux qu'on

qu'on peut tirer du ſommet S, comme nous l'avons démontré ci-devant, & que le côté SB eſt le plus grand ; il ſuit que tous les points de la demi-circonférence de la baſe A 2 B, ſont tous inégalement éloignés du ſommet S, ou S^d de la Figure 266, au développement de la ſurface du cone, & que les points B^d & a^d ſont comme les termes du plus grand, & du moindre éloignement de la courbe B^d, R^d, a^d. De-là vient qu'on les appelle *points de ſtation* ; car dès qu'elle eſt parvenue en a^d, elle ceſſe de s'approcher de S^d, & dès qu'elle eſt parvenue en B^d, elle ceſſe de s'en éloigner, & recommence à s'en approcher. *Fig. 264. & 266.*

Il en ſera de même pour toutes les autres ſections coniques, dont les axes E b, p^6 r, H r ſont dans le triangle par l'axe ASB.

On peut encore remarquer dans la courbe de développement de la baſe du cone, qu'elle change de contour par une infléxion ſemblable à celle d'une S ; en ſorte qu'elle paſſe du contour concave $a^d g$ R^d, à l'égard du point S^d au convexe R^d, 2, 3, B^d. Le point R^d qui eſt le terme & la jonction de ces deux contours différens, eſt appellé *point d'infléxion*, lequel partage inégalement la courbe, en ſorte que la partie concave à l'égard du ſommet eſt toujours la plus grande.

Pour trouver ce point à la baſe ARB, *Fig.* 264) il faut tirer du point P, projection du ſommet du cone S, une tangente PR, le point d'attouchement R ſera celui que l'on cherche ; ce qui fait voir que la partie A 1 R, convexe à l'égard de P, eſt toujours plus petite que R 3 B concave à l'égard de ce même point ; puiſque la tangente ne pourroit toucher la baſe au point du milieu 2, que lorſque le point P ſeroit infiniment loin ſur la direction B p prolongée.

La Fig. 267 préſente un développement entier du cone, double de la Figure 266.

Du développement des priſmes.

Les priſmes auſſi-bien que les cones peuvent être droits ou obliques ſur leurs baſes.

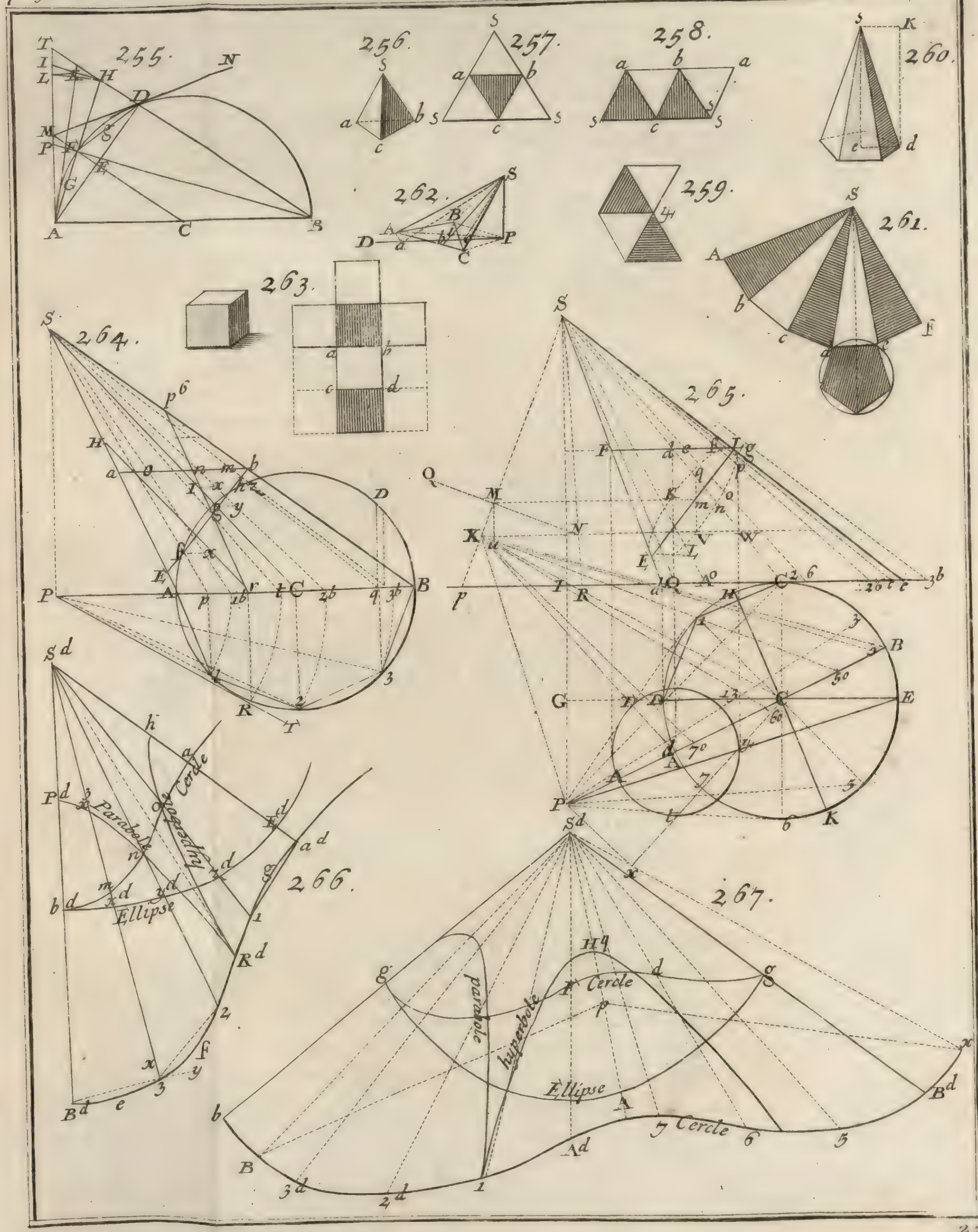
Il eſt évident que le développement des priſmes droits eſt un parallelogramme rectangle compoſé de tous ceux des ſurfaces, dont il eſt eveloppé ; puiſque les parties priſes enſemble ſont égales à leur tout, & que les baſes étant paralleles, les hauteurs ſont toujours égales.

Il n'en eſt pas de même des priſmes ſcalenes, don les côtés ne ſont pas perpendiculaires au plan de leur baſe; car quoiqu'ils ſoient compris entre deux plans paralleles, comme nous le ſupoſons, premierement, il ſuit bien de-là qu'étant paralleles entr'eux, ils ſont tous égaux, mais non pas qu'ils faſſent des angles égaux avec les côtés de leur baſe; d'où il réſulte que chaque ſurface dont le priſme eſt enveloppé, peut être un parallelogramme différent, excepté ceux qui ont pour baſe les côtés du polygone de la baſe du priſme, qui ſont paralleles & égaux entr'eux.

Pl. 23. *Fig.* 268. Soit (*Fig.* 268) le priſme AC, oblique ſur ſa baſe BÇDE, de l'obliquité marquée par la ligne PB, diſtance d'une perpendiculaire HP abaiſſée ſur le plan de la baſe prolongée. Ayant pris à volonté ſur un de ſes côtés, comme ſur HB, un point *d*, on lui menera la perpendiculaire *d*K, qui coupera le côté ſuivant GC au point K, par lequel on tirera de même une perpendiculaire KL, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'ayant parcouru le coutour, on ſoit revenu au point *d*.

Fig. 269. On fera enſuite à part (*Fig.* 269) une ligne droite dN^d, ſur laquelle on portera de ſuite les longueurs *d*K, KL, LM, MN^d égales à celles des diſtances perpendiculaires des côtés du priſme AC, & par tous les points $dKLMN^d$, on tirera des perpendiculaires à dN^d, comme *h b*, *g c*, *id*, *ae*, HB, ſur leſquelles on portera de part & d'autre de la ligne dN^d les longueurs qui expriment les diſtances de cette ligne aux angles du priſme; ainſi prenant *d*H de la Fig. 268 on la portera en *dh* de la Figure 269: KG en K*g*; LI en L *i*, &c. d'un côté; & de l'autre *d*B en *d b*, KC en K *c*, LD en L *d*, &c. & l'on aura les points *h g i a* H vers une baſe, & *b c d e* B vers l'autre; par leſquels menant des lignes droites de point en point, on aura la Figure *h g i a* HB *e d c b h* pour le développement des côtés du priſme, à laquelle joignant les deux baſes X & Q, on aura celui de ſa ſurface entiere, qui eſt ici celle d'un parallelepipede obliquangle compris par ſix ſurfaces, qui ſont autant de parallelogrammes, comme le cube l'eſt par ſix quarrés.

Il eſt clair que de quelques nombres de ſurfaces que puiſſe être ce priſme, le développement ſe fera toujours de même; fut-il d'une infinité de côtés, ce qui le rendroit alors très-ſemblable au cylindre ſcalene, qu'on peut mettre au rang des priſmes en conſidérant ſes ſurfaces comme infiniment étroites.


255.
256.
257.
258.
259.
260.
261.
262.
263.
264.
265.
266.
267.
Parabole
Ellipse
Cercle
hiperbole
parabole
hiperbole
Cercle
Ellipse
Cercle

COROLLAIRE I.

De-là on tire la maniere de *faire le développement de la ſurface du cylindre ſcalene.*

Soit (*Fig.* 270) le parallelogramme BAFD la ſection d'un cylindre ſcalene par ſon axe, & le diametre de ſa baſe dans la plus grande obliquité, comme on voit à la Figure 271 (quoique plus petite) le diametre BA paſſant par le point R de la perpendiculaire DR abaiſſée ſur le plan de cette baſe. *Fig.* 270.

Sur ce diametre BA ayant fait le demi-cercle B *h* A, on le diviſera en tel nombre de parties qu'on voudra, égales ou inégales, il n'importe, mais les égales ſont plus commodes, & l'on menera par les points de diviſion des perpendiculaires à ce diametre, comme 1 *p*, 2 *p*, 3 *p*, 4 *p*, qui le couperont aux points *p* & *p*, par leſquels on menera autant de paralleles au côté BD, comme *p* 5, *p* 6, *p* 7, *p* 8.

Enſuite par un point E pris à volonté ſur BD, on lui tirera la perpendiculaire ER qui coupe les paralleles à BD aux points *n*, *o*, *p*, *q*, qui ſont ceux des abſciſſes de l'arc droit ou ſection perpendiculaire à l'axe, qui eſt ici une ellipſe, dont ER eſt le petit axe, & BA le grand axe par le moyen deſquels on tracera cette courbe, dont le contour rectifié ſera le développement de celui du cylindre ſcalene; mais ſi l'on ſe contente du développement des cordes compriſes entre les diviſions de l'arc droit, on les trouvera en portant ſur les paralleles à l'axe, les hauteurs *p* 1, *p* 2, *p* 3, *p* 4 ſur les paralleles correſpondantes, comme *p* 1 en *n* I, *p* 2 en *o* K; *p* 3 en *p* L, *p* 4 en *q m*; les longueurs E I, I K, K L, L *m*, *m* R jointes enſemble ſur une ligne droite, comme E *e* de la Figure 272, feront le développement du contour du cylindre, qui ſera d'autant plus exact, que les parties des diviſions du demi-cercle B *h* A ſeront en plus grand nombre.

Préſentement pour avoir le développement du contour des baſes, ayant porté ſur la ligne E *e*, que j'appelle la directrice, les longueurs des cordes R *m l* KI *e*, on menera par tous ces points des perpendiculaires à la directrice, ſur leſquelles on portera les avances du profil de la Figure 270, comme RA de ce profil en RA de la Fig. 272; *qp* en *m* 1, *pp* en *l* 2, *op* en K 3, *np* en I 4, EB en *e* B, & par les points A, 1, 2, 3, 4, B, on *Fig.* 272.

Fig. 270. & 272. tracera à la main une courbe qui sera le développement du contour de la base, qu'on répetera de l'autre côté en A*b*, & de même façon au-dessous en D*f*, ou bien si les bases sont paralleles, on trouvera la seconde, en portant sur toutes les paralleles à AD la même longueur AD en 1 11, 2 12, 3 13, &c. ce qu'on appelle, en termes de l'art, jauger.

Si enfin on ajoute de part & d'autre les deux cercles des bases *b* 3 A, D 3*f*, on aura le développement de la surface totale du cylindre,

Le développement par les cordes est plus usité dans les traits de la coupe des pierres que celui du contour, parce qu'on commence par les doëles plates, dont les cordes sont les largeurs à l'arc droit.

Nous supppofons ici que le profil qui sert à faire le développement est fait sur le diametre de la plus grande obliquité de l'axe sur sa base, pour n'avoir aucun égard aux obliquités des voutes composées de plusieurs inclinaisons de biais, descente, talud & surplomb; parce que nous avons donné la maniere de les réduire toutes à une seule, lorsque nous avons donné les regles du profil.

Quand nous parlons de l'obliquité de l'axe sur sa base, il est évident que nous parlons aussi de celle des côtés du cylindre sur le même plan de la base, par un Corollaire de la huitieme du IIe. Livre d'EUCLIDE, qui dit que si une ligne est perpendiculaire à un plan, toutes ses paralleles le sont, & si elle lui est inclinée; toutes ses paralleles le sont d'un même angle d'inclinaison, mais comme les côtés sont coupés inégalement par un plan perpendiculaire à l'axe, il résulte que les mesures de leurs longueurs au-dessous ou au-dessus de ce plan, sont inégales entr'elles, mais égales à celles du profil fait sur le diametre de plus grande obliquité, comme à la Figure 270 au-dessus & au-dessous de la ligne ER.

COROLLAIRE

D'où il suit qu'au cylindre ni au cone, les différentes compositions d'obliquités ne doivent rien changer au développement de leurs surfaces, mais seulement aux termes d'où on les commence, ou ausquels on les termine; par exemple, si le développement avoit été commencé sur le côté 3 13, les courbu-

res A *b* F & A 4 B n'auroient pas été également étendues de part & d'autre ; mais ce qui auroit été retranché de la courbure convexe 3 4 B d'un côté, auroit été ajouté de l'autre ; ce qu'il eſt à propos de remarquer pour ſentir la raiſon des inégalités que l'on trouve dans les développemens des doëles, dans les traits des voutes d'obliquités compoſées, qu'on verra au IVe. Livre, Chap. V. *Fig.* 272.

COROLLAIRE II.

De la maniere de faire le développement du contour des baſes des cylindres, on tire aiſément celle de tracer ſur leurs ſurfaces développées les cercles & les ellipſes qu'on y peut décrire ; il ne s'agit que d'avoir les diametres de ces ſections (ſituées comme elles doivent être) dans le profil ou ſection du cylindre par l'axe, comme LE ou *h* G dans le parallelogramme BAFD (*Fig.* 270) leſquels diametres ſeront coupés par les paralleles à l'axe provenant des diviſions du contour de la baſe 1, 2, 3, 4, comme EL aux points *t*, *t*, *t*, *t*, & les diſtances *tn*, *to*, *tp*, *tq*, LR étant portées ſur les perpendiculaires à la directrice (*Fig.* 272) aux points correſpondans en-deſſus ou en-deſſous de cette directrice, donneront ſur les côtés des points par leſquels on tracera à la main une courbe FLI, qui ſera le développement de l'ellipſe, qui a pour diametre EL, & la courbe *hg* H celle qui a pour diametre au profil la ligne *h* G. *Fig.* 270. & 272.

COROLLAIRE III.

Il ſuit de la poſition des axes donnés dans la ſection qui eſt le parallelogramme par l'axe & par le point P, lequel eſt la projection du ſommet de l'axe ſur une de ſes baſes, que l'on connoît les points d'infléxion des courbes, qui ſont les développemens des circonférences des cercles & des ellipſes qu'on décrit à la ſurface du cylindre par des ſections obliques à l'axe ; car prenant pour exemple l'ellipſe, dont le diametre eſt EL, il eſt viſible que la diſtance RL étant la plus grande de toutes les autres *qt*, *pt*, &c. lorſque la courbe EL ſera parvenue au point L, elle commencera à ſe rapprocher de la ligne E *e*, & qu'étant parvenue en E où elle la touche, elle commencera à s'en éloigner ; il en ſera de même des points A & B, *h* & *b*, *Fig.* 270. & 271.

comme il a été dit à l'égard des développemens des sections coniques sur la surface du cone développée.

DÉMONSTRATION.

La raison pour laquelle on prend une perpendiculaire sur les côtés d'un prisme pour en copier les surfaces, c'est pour en abréger l'opération ; car on sçait que pour faire une Figure semblable & égale à une autre, il n'y a que deux manieres, ou de la réduire en triangles, ou de mesurer les distances de ses angles à une ligne donnée par des perpendiculaires, ce qui est proprement & équivalemment réduire tous les triangles en rectangles; de sorte qu'un angle droit sert pour tous. Or on peut bien mettre la premiere maniere en pratique pour les prismes ordinaires, mais non pas pour les prismes d'une infinité de côtés, tels que sont les cylindres ; car la largeur des parallelogrammes, & par conséquent des triangles qui en sont les moitiés, est réduite à rien ; il ne reste donc de leur dimension que la longueur, & l'on ne peut considérer ces surfaces comme ayant de la largeur courbe, sans reconnoître que les diagonales de ces parallelogrammes mixtes ne seroient plus des lignes droites, mais courbes proportionellement à la courbure de leurs bases, ce qui est évident.

Il est inutile de rendre raison pourquoi on prend une perpendiculaire à l'axe du cylindre pour avoir le développement de son contour ; car il est clair que toute autre section que ER augmentant le diametre par son obliquité, augmente aussi le contour, les circonférences des cercles & des ellipses étant entr'elles comme leurs diametres ; or de toutes les lignes qu'on peut mener entre deux paralleles, la perpendiculaire est la plus courte ; donc la circonférence est aussi la moindre, laquelle est la somme de l'infinité des perpendiculaires tirées aux côtés, infinis en nombre, du prisme cylindrique.

Des développemens composés de deux ou trois especes de surfaces d'un corps coupé en plusieurs parties dans son épaisseur, comme sont dans les voutes celles des doëles & des lits, & même des extrados.

Les Architectes & les Auteurs de la Coupe des pierres ont

coutume de rassembler dans un même dessein de leur épure le développement de la surface intérieure de la voute, qu'ils appellent la doële, & les sections planes, qui sont les intervalles de son épaisseur entre deux voussoirs qu'ils appellent les *lits*, pour en voir d'un coup d'œil la différence & le rapport.

Ce genre de représentation est un assemblage du développement de la doële fait sans interruption, comme il convient aux surfaces cylindriques & coniques, & de celui de l'extrados, qui est de même nature, mais interrompu au milieu, où il est divisé en deux parties séparées; & enfin couvert en partie de celui des surfaces des lits de chaque rang de voussoir, lesquelles sont couchées dans toute leur étendue sur le développement de la doële, laquelle doit être considérée en ces endroits comme double, partie en doële, & partie en lit; & même si l'on veut, encore comme triple si l'on y considere l'extrados, dont nous parlerons peu, parce qu'on en fait rarement usage.

Pour rendre cette explication plus sensible, nous donnerons pour exemple un berceau qui ait une double obliquité, l'une de direction de face sur celle de son axe horisontal, ce qu'on appelle biais, & l'autre d'inclinaison de face à un plan vertical, ce qu'on appelle talud.

Soit (*Fig.* 274) ABFE le plan horisontal de la doële d'un berceau biais, dont C*x* est la ligne du milieu, c'est-à-dire l'axe, qui est biais à l'égard de la ligne AB, base de la face qui est couchée en talud sur cette base, suivant une inclinaison connue ou donnée, par exemple *b* T à l'égard de *a b*, avec laquelle elle fait un angle obtus *a b* T. *Fig.* 274.

Sur AB comme diametre intérieur, & *a b* extérieur, on décrira deux demi-cercles *a* H *b*, A*h*B qui comprendront l'épaisseur du berceau, ausquels on menera par les sommets H & *h* deux tangentes HT, *ht* paralleles à *a b*, qui couperont le profil du talud *b* T aux points T & *t*, & pour connoître combien ces points s'écartent de *l'aplomb*, on fera la verticale V*b* perpendiculaire à *a b*, qui coupera ces tangentes aux points V & *u*, les distances VT, *u t* seront celles dont les sommets de la doële & de l'extrados s'écartent de l'aplomb aux arrêtes de la face.

Présentement pour connoître combien les *aplombs* de ces points s'éloignent de la base *a b*, diametre de la face, on la prolongera vers L, puis on menera par les points T & *t* des paralleles à V*b* qui la couperont aux points L & K; les longueurs

Fig. 274. bL & b K ſeront les diſtances que l'on cherche, & KL l'intervalle horiſontal des arrêtes de la doële & de l'extrados au milieu de la clef que l'on portera perpendiculairement ſur le milieu de AB en CK & C l pour avoir les demi-axes conjugués aux premiers $a\,b$, AB, par le moyen deſquels on décrira (par le Problême VII du Livre II) les demi-ellipſes AKB, $a\,l^c\,b$ qui ſeront les projections des arrêtes de la face à la doële & à l'extrados.

Cette projection étant faite, on diviſera l'arc A h B en tel nombre de vouſſoirs qu'on voudra, comme ici en cinq, aux points 1, 2, 3, 4, par leſquels on tirera du centre C les joints de tête 1 1e, 2 2e, 3 3e, 4 4e, & des mêmes points des perpendiculaires à la baſe $a\,b$ qu'on prolongera juſqu'aux demi-ellipſes de la projection AKB, $a\,l^c\,b$ qu'elles couperont aux points 11, 12, &c. 21, 22, &c. par leſquels on tirera du centre C les projections des joints de tête 11 12, 21 22, par leſquels on menera des paralleles à l'axe Cx, 11q, 12q, 21s, 22s, les trapezes 12q, s 22, & 11 q, s 21, ſeront les projections des lits, dont on veut chercher la vraie étendue pour l'appliquer ſur le développement de la doële.

Il s'agit préſentement de faire ce développement de la même maniere que nous l'avons dit pour la Figure 270, en commençant par former l'arc droit DR, & étendant ſon contour D 1^r, 2^r, 3^r, 4^r R ſur une directrice $d\,d$ de la Figure 280, & & portant ſur les diviſions dD^d, 1, 2, 3, 4, R d, les longueurs de la projection i 11, d 21, i 12, i 22, d'un côté, & les reſtes $i\,q$, $i\,s$, &c. de l'autre, ce qui donnera les quatre angles des trapezes qui ſont les ſurfaces de chaque lit, comme a^dA^d, d^dE, e 1^dQS, e 2^dFS, 3^dNG, &c. dont les deux premiers a^dE & B^{d}K ſont égaux en tout à ceux des impoſtes de la Figure 274, marqués des Lettres aE, BN.

Fig. 280. Si l'on joint les extrêmités extérieures de ces trapezes par une ligne courbe, on aura le développement du contour de l'arrête de la doële & de la face, telle eſt la ligne A 1^d, 2^d, 4^dB, & la ligne EQFGHI pour le développement du contour de la doële de la face poſtérieure, qu'on ne ſuppoſe pas parallele à la premiere AKB qui eſt en talud, mais à plomb ſur la ligne dN; ce qui fait que ces contours courbes du développement ſont inégaux, provenant de celui de deux ellipſes inégales.

Pour

Pour éviter la confusion de ce développement, on a coutume de distinguer les lits par une hachure laissant le développement de la doële en blanc. La même Figure donnera le développement de l'extrados si l'on joint par une ligne courbe les angles extérieurs des lits comme *aee*, b^d, OO, mais non pas entierement dans ses mesures, car il reste au milieu un intervalle *e* O qui est beaucoup plus grand que celui de la clef, parce que les lits prennent leur origine extérieure, partie d'un côté de la clef, partie de l'autre. Pour en faire un contour suivi, il faudroit les ranger tous de suite sur un même côté, comme on a fait à la Figure 280, en transportant le point a^d en Æ, *e* en e^2, &c. alors on auroit une courbe d'extrados qui croiseroit celle de la doële Æ e^1, e^2, O, O, b^d; ce qui n'est point usité dans les traits, n'étant d'aucune utilité. Pl. 23. Fig. 280.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à l'explication de cette espece de dessein, parce qu'on en trouvera plusieurs exemples dans la construction des traits, au IVe. Livre, il suffit d'en avoir donné une bonne notion pour établir les principes de l'*épure*.

Remarque sur les développemens composés.

Les Auteurs des Traités de la coupe des Pierres ont accoutumé d'accompagner presque tous les traits d'un développement des *doëles* joints à ceux des *lits* dans l'ordre que nous venons de l'exposer. Ce genre de dessein n'est pas inutile dans les traits en petit sur le papier pour voir d'un coup d'œil la Figure & la grandeur des panneaux de lit & de doële; mais comme il seroit trop incommode & de peu d'utilité de les tracer en grand dans toute l'étendue de l'épure, particulierement lorsque les voutes sont un peu grandes, on peut dire que cette pratique n'est pas nécessaire pour l'exécution. Il suffit de sçavoir faire les panneaux de chacun des lits en particulier sans les assembler, ce qui causeroit infailliblement de la confusion, lorsqu'il y a beaucoup de lits plus larges que les doëles, parce qu'ils croiseroient les uns sur les autres; c'est pourquoi nous n'avons pas imité ces Auteurs dans notre IVe. Livre, pour ne pas multiplier les lignes inutiles, & donner trop d'étendue aux Figures des Planches, où il ne s'en trouve déja que trop qui embarassent & fatiguent l'attention du Lecteur.

On trouvera peut-être une différence considérable entre le contour du développement de la Figure 280 & celui de la Figure 272 ; mais si l'on y fait attention, elle n'est qu'apparente, parce qu'à cause de la double obliquité du berceau de la Figure 274, le point de station ne se trouve pas au milieu du développement, comme à la Fig. 272, provenant du cylindre oblique 270, où l'on n'a considéré qu'une seule obliquité de *biais* ; pour s'en convaincre, il faut réduire la double obliquité du berceau 274 en une seule, ce que l'on peut faire comme il suit.

Fig. 7;. On menera par le point *x*, extrêmité de l'axe, une perpendiculaire *x* Y sur AB, sur laquelle on portera la distance du talud VT de Y en *z* ; si l'on tire du centre C la ligne C *z*, elle donnera la direction de la plus grande obliquité, qui réduit celle du biais CY, & celle du talud Y *z* en une seule C *z*, ce qui est clair.

Pour en concevoir la raison, il faut sçavoir 1°. Que l'axe d'un cylindre scalene, de même que celui du cone scalene dont nous avons parlé, n'est pas incliné également à tous les diametres du cercle de sa base; 2°. Que la section par l'axe faite par un plan perpendiculaire à celui de la base, forme le parallelogramme le plus oblique; 3°. Qu'une autre section perpendiculaire à celle-ci forme un parallelogramme rectangle, & par conséquent que les autres sections sont des parallelogrammes plus ou moins obliques, selon qu'ils s'approchent ou s'éloignent de ces deux premiers. Ainsi le parallelogramme ABFE n'étant pas dans un plan perpendiculaire au plan de la base *a l^c b*, n'est pas le plus oblique de toutes les sections par l'axe, c'est celui qui passe par C *z*, où est le plus grand biais; ce que l'on peut démontrer comme il suit. Pour éviter la confusion des lignes dans la Figure, on transportera la longueur Y *z* en YZ, comme si, à talud ou plutôt à pente égale, le berceau étoit incliné en surplomb, & ayant tiré CZ, on lui menera la perpendiculaire Z 8 ; ensuite ayant pris la longueur C *x* de l'axe pour rayon d'un arc 9 8, qui coupera Z 8 au point 8, on tirera 8 C, qui représentera la position de l'axe à l'égard d'un plan qui couperoit le cylindre par l'axe, & le diametre 7 Z, lequel représente, par notre supposition dans le changement de la Figure, celui qui passeroit par C *z*. Il faut démontrer que l'angle 8 CZ, que fait l'axe avec ce diametre, est plus aigu que celui que ce même axe, considéré en C *x*, fait avec un autre diametre AB.

Les deux triangles CY *z* & CZ 8 sont tous deux rectangles,

l'un en Y, l'autre en Z: ils ont tous deux une hypotenuſe égale (par la conſtruction C 8 = C x) & le côté C z plus grand que CY ; donc l'autre côté Z 8 ſera plus petit que x Y, par conſéquent l'angle oppoſé 8 CZ, ſera plus petit que x CY ; *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 274.

D'où il ſuit que le point de ſtation de la courbe du développement qui repréſente le cercle de la baſe *a l^c b*, ou *a* H *b* étant au point Z, comme nous l'avons dit de la Figure 272, les parties de cette courbe ne ſont pas égales de part & d'autre du milieu qui repréſente la clef, comme lorſqu'il n'y a qu'une ſeule obliquité de biais ſans talud; mais elles pourront l'être ſi on les conſidere à égale diſtance du point de ſtation correſpondant au point z, où eſt la plus grande obliquité du cylindre ſur ſa baſe.

Du développement des polyedres & de la ſphere.

Parmi les cinq corps réguliers, le dodecaedre, qui eſt compris par douze ſurfaces égales, qui ſont des pentagones, eſt le premier qui commence à approcher de la ſphere, enſuite l'icoſaedre, qui eſt compris par vingt triangles équilatéraux, eſt déja aſſez rond pour être propre à rouler comme une boule. Mais on ne ſçauroit augmenter le nombre de ſes ſurfaces, & en conſerver l'égalité entr'elles; de ſorte qu'il n'eſt point de plus gros polyedre régulier que l'on puiſſe comparer à la ſphere, mais il n'eſt pas difficile d'en faire d'irréguliers qui en approchent infiniment. En effet ſi l'on diviſe par la penſée un demi-cercle en un poligone d'une infinité de côtés, la révolution qu'il fera ſur ſon diametre formera un ſolide, qui ſera compoſé d'une infinité de cones tronqués formés par la révolution des cordes de ce demi-cercle, qui ſont inclinées à ſon diametre, comme les côtés du cone ſont inclinés à leur axe. Et ſi l'on diviſe les baſes de chacun de ces cones tronqués en polygones, on aura des pyramides tronquées inſcrites dans ces cones tronqués; de ſorte que leurs côté ſeront autant de trapezes qui viennent en ſe rétreciſſant vers les poles, comme on voit à la Figure 276, & ſe réduiſent enfin en triangles aux deux poles de la ſphere, où les pyramides ſont entieres, comme 2 P 3. Fig. 276.

L'arrangement de cette ſuite de trapezes qui forment une ſuperficie de polyedre comparable à celle de la ſphere circonſ-

crite, peut ſe faire de deux manieres, ou ſuivant les Méridiens, c'eſt-à-dire, les plans coupans la ſphere par ſes poles, comme à la Figure 277, & alors les trapezes de ſes ſurfaces deviennent tous inégaux de part & d'autre de l'équateur juſqu'au pole P, où ils finiſſent par un triangle 2 *p* 2, & parce que cette Figure approche de celle d'un fuſeau à filer, on appelle ce développement de la ſphere en *fuſeaux*.

Fig. 276. & 278. L'autre maniere d'arrangement des trapezes, dont nous faiſons un plus grand uſage, eſt ſuivant les paralleles à l'équateur en forme de zones, & alors tous les trapezes égaux ſont rangés de ſuite, comme à la Figure 278, où l'on ſuppoſe la circonférence du parallele diviſée en dix parties; en ſorte que la zone de cercle AB étant pliée, & le trapeze A étant joint au trapeze B par leur côté commun O *i*, O *i*, il ſe forme une pyramide peu différente d'un cone tronqué, dont le ſommet eſt en S (*Fig.* 276) parce que le point S eſt la rencontre de l'axe *x* S du cone, & des cordes *o* 1, 5 4 prolongées, leſquelles cordes ſont les côtés du polygone inſcrit dans les quarts de cercle C *o* P, C 5 P, dont la révolution a formé l'hémiſphere *o* P 5, de ſorte que ſi l'on prend la longueur S *o* pour rayon, & que d'un centre *x* pris à volonté, on faſſe deux arcs de cercles concentriques O 5 O, *i* 4 *i* (*Fig.* 278) éloignés de l'intervalle de la corde O 1 de la Figure 276, & que l'arc O 5 O ſoit fait égal à la circonférence du cercle qui a pour diametre *o* C 5, & l'arc *i* 4 *i* égal à la circonférence du cercle qui a pour diametre 1 4, on aura le développement de la pyramide tronquée *o* 1 4 5 en dix trapezes égaux, rangés ſur une même zone de ſphere, ou plutôt ſur une portion de couronne de cercle, comme on voit dans la Figure 278. La même choſe ſe fera pour le cone tronqué 1 2 3 4, inſcrit dans la ſphere par la révolution de la corde 1 2, autour de l'axe S^2 C, & l'on aura la portion de couronne de cercle 1^a 4 1^b, 2 3 2, laquelle étant pliée en rond, faiſant joindre les trapezes *a* & *b*, formera la zone du cone tronqué 1 4 3 2, inſcrit dans la ſphere. Enfin parce que la corde 2 P aboutit au pole P, elle décrira un cone, dont le ſommet ſera en P, & dont le développement ſera le ſecteur 2^a 3 2^b, dont la circonférence approchera beaucoup de celle du cercle entier, parce qu'elle doit être égale à celle du cercle qui a pour diametre 2 3 de la Figure 276; par où l'on voit que chacune des couronnes de cercle doit contenir le même nombre de tra-

pezes, quoique leur circonférence diminue à mesure qu'on approche du pole, parce qu'ils diminuent aussi de largeur.

Remarques sur l'usage de ce développement.

On fait usage de tous ces arrangemens de développemens des polyedres inscrits dans la sphere, soit en la réduisant simplement en cones tronqués, soit en subdivisant ces cones, & y inscrivant dans chacun une pyramide tronquée ; alors on range leurs surfaces, qui sont des trapezes, sur les paralleles à l'équateur de la sphere, comme à la Figure 278, en forme de couronne de cercle, ou sur les Méridiens, comme à la Figure 277, ce qui forme une figure de fuseaux.

On peut dire que ce principe est celui de la coupe de toutes les voutes sphériques faites par panneaux.

Mais parce que les cordes des premieres divisions en voussoirs à la naissance des voutes, comme *o* 1 donnent des lignes si peu inclinées à l'axe de la sphere, que le sommet du cone formé par leur prolongation jusqu'à la rencontre de l'axe, est situé fort loin de sa base ; il arrive que le rayon qui sert à faire le développement du cone tronqué devient extrêmement long & incommode pour tracer un arc de cercle ; j'ai pourvû à cet inconvénient par le Problême suivant.

PROBLEME VIII.

Le diametre AB de la base d'un cone droit tronqué, & l'inclinaison du côté EB sur ce diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra à la circonférence de la couronne de cercle qui en exprime le développement, sans en avoir le centre, ou ce qui est la même chose, le sommet du cone.

Soit (*Fig.* 275) AB le diametre de la base inférieure du cone tronqué, DE celui de la supérieure, qui est donné par l'inclinaison du côté BE vers l'axe SC, lequel est perpendiculaire sur le milieu du diametre donné AB ; & EB, DA les côtés qui font partie de ceux du triangle par l'axe ASB, si l'on acheve le cone en prolongeant ses côtés, CX sera une partie de l'axe CS. *Fig.* 275.

Ayant pris à volonté le point F sur le côté EB, on menera FG parallele à XC, ou perpendiculaire à CB, & l'on divisera

Fig. 275. l'angle EFG en deux également par la ligne FL, à laquelle par le point B, on menera la parallele BY, qui rencontrera XC prolongée en Y. Je dis que le point Y sera à la circonférence de la base de la couronne de cercle qui donnera le développement du cone tronqué.

De même ayant pris à volonté sur CB le point H, & mené par le Problême I du IIIe. Livre, la ligne HN, laquelle étant prolongée concourre au même point S que la ligne BE; sur cette ligne HN ayant pris un point K à volonté, & mené comme ci-devant, KI parallele à SY, on divisera de même l'angle NKI en deux également par la ligne MK, à laquelle par le point Y on menera la parallele Y*y*; le point *y* sera à la même circonférence que le point Y. On trouvera en répetant une pareille opération autant de points que l'on voudra, dont on pourra placer les correspondans entre Y & A, sans le secours du centre ou sommet S.

Ce que l'on dit de la base AB du cone tronqué pourra s'appliquer à la base supérieure DE du même cone.

DEMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés BE, AD jusqu'à ce qu'ils concourrent au point S, où sera le sommet du cone.

A cause des paralleles FG, SY les angles GFB, YSB sont égaux entr'eux; & à cause des autres paralleles LF, YB, les alternes LFG, FGB, & XYB sont aussi égaux, de même que LFE & YBE; donc les triangles SYB, SYA sont isosceles; donc SY peut être le rayon du même cercle que celui qui aura pour rayon les côtés SB & SA, donc le point Y est à la circonférence du cercle, *ce qu'il falloit démontrer.*

On démontrera de la même maniere que le triangle SY*y* est isoscele, par conséquent que le point *y* est à la circonférence du même cercle qui passera par B & par *y*, & qui aura pour rayon la ligne SB ou SY; donc on pourra trouver autant de points que l'on voudra à cette circonférence sans le secours du centre, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême sert à rendre praticables quelques traits de la

coupe des Pierres, que le P. DERAND & M. de la RUE ont donné ſans remédier aux inconvéniens de la pratique, par exemple, pour faire le développement de la baſe d'une porte en tour ronde & en talud, parce qu'une telle tour eſt un cone tronqué, dont le ſommet eſt très-loin. Car ſuppoſant qu'elle n'eût que trente pieds de diametre, & un ſixieme de talud, qui eſt un des plus grands qu'on leur donne, ſi elle eſt à trente pieds de haut, elle ne ſera retrécie à ſon ſommet que de dix pieds; ſcavoir, cinq de chaque côté; ainſi les côtés du trapeſe par l'axe ne ſe rencontreront qu'à la hauteur de 90 pieds, laquelle ne ſera pas encore égale à la longueur du rayon, qui eſt le côté du triangle par l'axe du cone entier, puiſque cette hauteur eſt verticale, & que le côté eſt incliné à l'horiſon. Or une longueur de 93 pieds ou environ, demande une grande place commode pour y tracer un arc avec une corde ou une chainette, qui ne peuvent donner un contour juſte, à cauſe de leur extenſion qui varie, ſoit en s'alongeant, lorſqu'on tire plus ou moins, ſoit à cauſe du frottement ſur une étendue de ſurface auſſi grande, ſur laquelle il y a toujours quelques inégalités; cette longueur étant d'ailleurs trop conſidérable pour faire avec une perche un compas à verge, il en faudroit joindre pluſieurs bout-à-bout, & les faire ſoutenir par pluſieurs hommes, qui ſe meuvent d'un mouvement de rayon, chacun plus ou moins vite, comme il convient à leur diſtance du centre.

L'autre cas où ce Problême ſeroit encore très-néceſſaire, eſt pour la formation des panneaux de développement des doëles, des premieres retombées des vouſſoirs des voutes ſphériques, dont les diviſions du ceintre de hauteur ſont d'un petit nombre de degrés de ſon contour; c'eſt-à-dire où il y a un grand nombre d'aſſiſes ou rangs de vouſſoirs; mais alors le moyen le plus court eſt de les tailler par ſuppoſition de doëles plates, comme nous le dirons au IVe. Livre, Chap. VII.

Après avoir trouvé trois points de la circonférence de la baſe du cone tronqué; ſuivant ce Problême, on peut prendre l'angle que font les lignes menées de l'un à l'autre, & par le Problême I. du II. Livre, s'en ſervir pour tracer, par un mouvement continu, le ſegment du cercle dans leſquels ils ſont.

Du développement des hélices.

Nous avons expliqué au II. Livre ce que nous entendons par le mot d'hélice. Il convient d'ajouter ici qu'on peut en distinguer différentes especes, rélativement aux corps sur lesquels on peut les décrire.

Suivant ce sistème, nous appellerons hélice *cylindrique droite*, celle qu'on pourra décrire sur la surface d'un cylindre droit; *cylindrique scalene*, celle qui sera décrite sur un cylindre de base elliptique, ou incliné à sa base. Hélice *conique ou sphérique*, celle qui sera décrite sur la surface d'un cone ou d'une sphere; nous comprendrons ces deux dernieres sous le nom de *limace*, parce qu'elles approchent de plus en plus de leur axe.

Nous diviserons encore les hélices cylindriques en régulieres & irrégulieres.

Par le mot de *réguliere*, nous entendons la courbe qui s'éleve au-dessus de sa base d'un mouvement oblique toujours égal, sans s'approcher ni s'éloigner de l'axe autour duquel elle fait des révolutions égales, comme une vis de pressoir.

Par le mot d'irréguliere, nous entendons celle qui fait des révolutions inégales autour de son axe.

Cette inégalité de révolutions peut encore être considérée de deux manieres; 1°. En ce que la courbe s'éloigne & s'approche de son axe, comme lorsqu'elle est à la surface d'un cylindre de base elliptique, ou de quelqu' autre courbe qui rentre en elle-même; 2°. Ou en ce que l'intervalle de la hauteur de ses révolutions augmente ou diminue.

LEMME.

Le développement d'une hélice cylindrique réguliere sur la surface du cylindre droit développé, est une ligne droite; celui des irrégulieres de la seconde espece, & des limaces, est une ligne courbe.

La premiere partie de ce Théorême est claire par la définition; car puisque nous supposons le mouvement de l'hélice autour de son axe d'une obliquité toujours égale sur la surface d'un cylindre, elle n'est pas plus inclinée en un endroit au plan de la base qu'en un autre.

Pour

Pour rendre cette vérité plus ſenſible, on doit conſidérer le cylindre comme un priſme d'une infinité de côtés, dont le développement forme un parallelogramme rectangle, ſi le cylindre eſt droit, lequel parallelogramme eſt compoſé de tous les petits rectangles infiniment étroits, qui enveloppent le priſme, parce que les parties priſes enſemble ſont égales à leur tout.

Soit, par exemple (*Fig.* 281) une demi-révolution d'hélice A*h* ſur le cylindre AE, dont la moitié de la baſe eſt le demi-cercle A 1 2 B, ayant rectifié ſon contour en une ligne droite AK ſur le diametre BA prolongé; ſi l'on diviſe cette ligne en parties égales, par exemple, ici en trois, & la hauteur de la demi-révolution B*h*, ou ſon égale AI, auſſi en trois parties égales, & qu'on mene par chacune de ſes diviſions des paralleles aux côtés AK & AI; il ſe formera neuf rectangles égaux entr'eux, & ſemblables au grand AH, qui exprime le développement de la moitié du cylindre, dont la diagonale eſt commune à celles des petits A*y*, *yx* & *x*H, leſquelles expriment chacune l'obliquité de l'hélice qui ne change point, ſuivant la définition. Or la diagonale AH eſt une ligne droite, par conſéquent la ſomme ou l'addition de toutes les parties de l'hélice infiniment petites, rangées ſur la ſurface du cylindre développé, forme une ligne droite; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 281.

La démonſtration de la ſeconde partie de ce Theorême ſuit naturellement de la premiere; car ſi les révolutions ſe font d'un mouvement inégal en direction d'inclinaiſon qui augmente ou diminue les intervalles de chaque révolution, les contours & les hauteurs n'étant plus proportionnels, les petits parallelogrammes ne ſeront plus ſemblables au grand A6, (*Fig.* 282) qu'on peut conſidérer comme un développement de cylindre, & par conſéquent ſa diagonale ne ſera plus commune à celles des petits infiniment petits, leſquelles faiſant auſſi, par la ſuppoſition, des angles inégaux avec la baſe AB, où ſes paralleles 1 *x*, 2 *y*, 3 *z* feront auſſi des angles entr'elles, & par conſéquent ſeront rangées en ligne courbe; *ce qu'il falloit ſecondement démontrer.*

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit qu'autour du même cylindre, on peut former une infinité d'hélices différentes, dont les développemens ſe-

ront toujours des lignes courbes, ſoit que le cylindre ſoit droit ou ſcalene; car les révolutions peuvent augmenter ou diminuer en hauteur, ſuivant telle progreſſion que l'on jugera à propos, ou laiſſant les hauteurs égales, on peut augmenter ou diminuer la viteſſe du mouvement parallele à la baſe; ce qui eſt repréſenté à la Fig. 282, par la différence des longueurs des parallélogrammes AK, K*l*, *l m*, *m n*, &c.

COROLLAIRE II.

Secondement, que le développement d'une hélice cylindrique ſcalene quoique réguliere, ſera encore une ligne courbe, parce que le développement de la baſe du cylindre ſcalene n'étant pas une ligne droite, comme celle du contour de la baſe du cylindre droit, mais une courbe, comme on voit à la Figure 272, il ſuit que les diviſions qui donnoient des parallelogrammes ſur le développement de ſa ſurface, en tirant des paralleles à la baſe & à la hauteur, ne donneront pas des Figures rectilignes, mais des quadrilignes mixtes, dont les paralleles à la baſe ſeront courbes, & leurs diagonales de même, mais un peu moins en ce qu'elles participent de la courbure parallele à la baſe, & de la ligne droite du côté parallele à l'axe; c'eſt pourquoi nous demandons pour le développement en ligne droite, que le cylindre ſoit droit ſur ſa baſe. Je n'ai point ajouté dans l'expoſé du Théorême, que la baſe fut circulaire ou elliptique, parce que de quelque courbe qu'elle ſoit, il eſt toujours évident que ſi l'axe du cylindre eſt perpendiculaire au plan de la baſe, le développement de la ſurface cylindrique ſera toujours un parallelogramme rectangle, qui pourra être diviſé en une infinité d'autres ſemblables, comme AH de la Figure 281, par conſéquent, dont la diagonale ſera le développement d'une hélice.

COROLLAIRE III.

De ce que nous venons de dire au Corollaire précédent, on tire naturellement la démonſtration de la troiſieme partie du Théorême, qui dit que les développemens des hélices en limaces ſont toujours des lignes courbes, ſoient qu'elles ſoient coniques, conoïdes, ſphériques ou ſphéroïdes; car toutes ces

Figures ne pouvant être développées qu'en les prenant par parties de cones tronqués inſcrits dans leur ſurface, & les développemens des courbes quelconques tracées ſur la ſurface du cone développée étant néceſſairement des lignes courbes, comme nous l'avons démontré aux Figures 266 & 267; il eſt évident que toutes les eſpeces de limaces qu'on y pourra décrire, étant développées ſur la ſurface du cone, ſeront des lignes courbes, parce qu'en diviſant le contour du cone développé en parties égales, & la hauteur de même, on aura au lieu de parallelogrammes mixtes, comme nous venons de le dire ſur le cone ſcalene, des trapezes mixtes, dont les petites parties de l'hélice ſeront les diagonales, participant de la courbure du cercle de la baſe développée ſur le cone, & de la droite qui eſt le côté du cone.

PROBLEME IX.

Faire le développement d'une hélice quelconque ſur une ſurface cylindrique ou conique développée.

Premierement, ſi l'hélice eſt cylindrique réguliere, ce développement eſt très-facile, puiſqu'il ne conſiſte qu'à trouver les extrêmités d'une ligne droite.

Soit (*Fig.* 281) une hélice A *h* GE qui fait une révolution & demie autour du cylindre droit DB, on rectifiera le contour du cercle de ſa baſe, qu'on portera une fois & demi ſur le diametre AB prolongé en A², ou, ce qui eſt la même choſe, on prendra trois fois le contour du demi-cercle A 1 2 B, de B en A², & par le ſommet du cylindre E, on tirera au point A² la ligne droite EA², qui ſera le développement demandé. *Fig.* 281.

Il eſt viſible que ſi l'on n'avoit propoſé que celui d'une demi-révolution, on auroit tiré *h a* du point *h*, tiers de la hauteur BE au point *a*, qui eſt à diſtance de B, de la longueur de l'arc A 1 2 B développé.

Si on avoit demandé une révolution entiere, la ligne F*b* y auroit ſatisfait; d'où l'on peut inferer, 1°. comment on doit faire le développement de telle partie qu'on voudra; 2°. que ſi l'on enveloppe le cylindre d'un triangle iſoſcele comme AHG, il y tracera deux hélices qui ſe croiſeront en *h*.

Secondement, ſi l'hélice eſt cylindrique irréguliere, ou coni-

que; ayant rectifié le contour de la base auquel elle répond, on divisera la hauteur de chaque révolution en parties proportionnelles à la différence qui regne de l'une à l'autre en croissant ou en diminuant, & l'on divisera le développement du contour de la base en un même nombre de parties égales qu'on a divisé la hauteur des révolutions, que nous avons supposé inégales, puis on menera par chaque division des paralleles à la base qui seront droites au cylindre droit, & courbes au cylindre scalene, lesquelles seront croisées par des lignes droites, paralleles à l'axe dans le cylindre, & tendant au sommet dans le cone; la ligne courbe menée d'une intersection à la suivante en diagonale, sera le développement de l'hélice demandée.

La même chose se fera pour avoir le développement de l'hélice en limace sur un cone; mais si la limace, comme une loxodromie sur une sphere, étoit proposée à développer, on ne le pourroit sans interruption; parce que la sphere ne pouvant être développée que des deux manieres dont nous avons parlé, ou comme à la Figure 277, en fuseaux, ou comme à la Figure 278, en portions de couronnes de cercle, qui laissent des intervalles entr'elles, encore plus grands que les fuseaux; on ne pourroit avoir le développement de l'hélice en limace, que par petites parties qui seroient les diagonales des trapezes mixtes formés dans différentes zones coniques inscrites à la surface de la sphere.

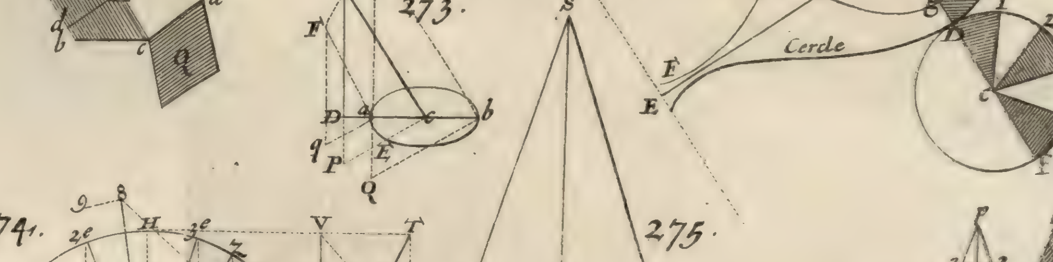
Voilà ce me semble les principales regles pour faire les *plans*, profils, élévations & développemens des corps comparables aux voutes usuelles; il nous reste à faire voir de quel usage elles sont pour leur construction, c'est ce que nous allons montrer par deux Problêmes généraux.

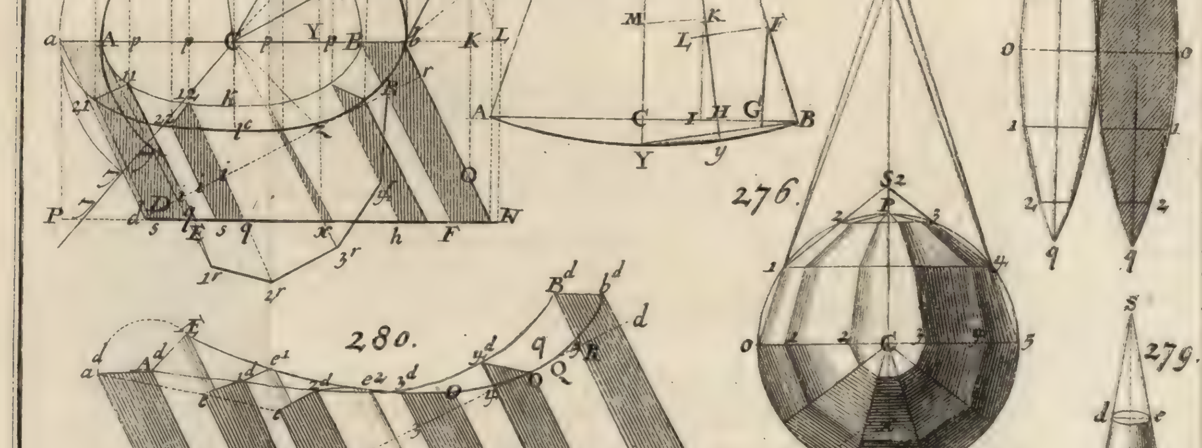
PROBLEME X.

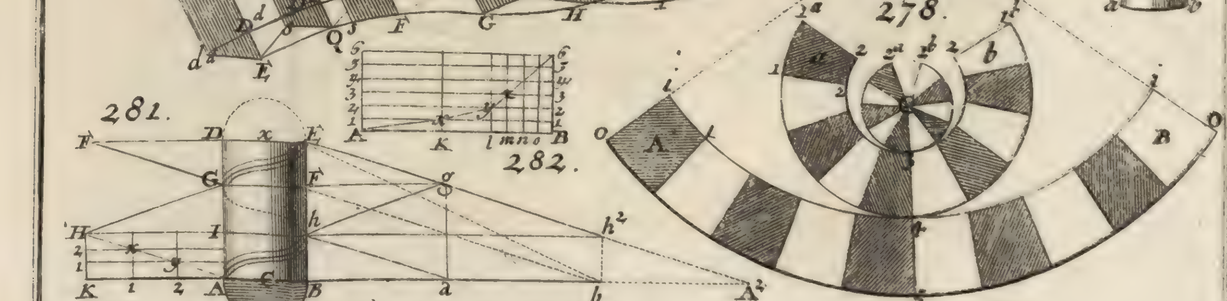
Les élévations de deux faces opposées dans des plans paralleles entr'eux, étant données en projection sur un même plan vertical, & la projection horisontale de leurs intervalles étant donnée, trouver la Figure de chaque partie de développement des surfaces d'une voute divisée en plusieurs voussoirs, tant apparente qu'intérieure.

En termes de l'art,

Une double élévation de face antérieure & postérieure, le







le plan & le profil d'une voute réguliere étant donnés, *trouver les panneaux de lits, de doële, & de tête.*

Si les faces opposées de l'entrée & de la sortie d'une voute, sont égales & perpendiculaires à une même direction, il est évident qu'elles seront confondues dans l'élévation qui sera réduite à un même ceintre circulaire, elliptique, surhaussé ou surbaissé; telles sont les deux faces d'un berceau droit, projettées sur un même plan vertical. Alors une seule élévation est équivalente à deux; sçavoir, à l'antérieure & à la postérieure, si les faces sont inégales, ou inégalement situées à l'égard du plan horisontal, comme sont celles des descentes, dont l'une est plus haute que l'autre, ou inégalement situées à l'égard du plan vertical, comme dans les voutes biaises, ou si elles participent de l'un & de l'autre, comme les descentes biaises, l'élévation commune aux deux faces sera exprimée par des contours différens qui se croiseront, ou qui ne seront paralleles que dans les voutes coniques droites, quoique les cordes de leurs arcs correspondans aux mêmes divisions puissent être paralleles. Mais soit que les contours soient paralleles ou non, s'ils sont tracés par la même projection verticale sur un même plan, ils conserveront toujours un certain rapport de distance entr'eux, qui servira à trouver tous les côtés des surfaces planes qui terminent les parties de la voute divisée en ses voussoirs.

Pour faire voir l'étendue, & pour ainsi dire la généralité de ce Problême, nous choisirons deux exemples de voutes coniques, l'une droite, l'autre oblique, lesquels étant bien entendus, serviront à la construction de toutes les voutes. Premierement à celle des cylindres qui sont plus simples, & plus faciles que les coniques; secondement aux coniques, dont ils exposent toutes les difficultés; & en troisieme lieu, aux sphériques, lesquelles doivent être réduites, ou en portions de cones tronqués ou en polyedres, qui sont plusieurs parties de pyramides tronquées, dont nous donnons ici les exemples par la réduction des cones en pyramide.

Premier exemple des voutes coniques droites.

Soient (*Fig.* 283) les deux ceintres de face pris à la doële B*l*D extérieur, GKH intérieur, que nous appellons face antérieure & postérieure, réunis par la même projection sur un PL. 24. *Fig.* 283.

Fig. 283. même plan avec leurs extrados ALE & F*k*I, décrits du même centre C. Ayant divisé ces ceintres en leurs vouſſoirs, par exemple, en cinq aux points 1, 2, 3, 4, & tiré les joints de tête par ces points du centre C, 1 5, 2 6, 3 7, 4 8, on fera la projection horiſontale de la voute & de ſes joints de lit, ſuivant les regles ordinaires, laquelle ſera le trapeze *afie*, dans lequel les deux parallelogrammes *afgb* & *dhie* ſeront les ſurfaces horiſontales des piédroits à l'impoſte dans leurs juſtes meſures. Il n'en ſera pas de même des autres lignes qui ſont la projection des joints de lit, elles ſeront plus courtes que ces joints, parce qu'elle eſt horiſontale, & que ces joints ſont inclinés à l'horiſon dans le même plan vertical.

Il faut commencer par chercher la véritable longueur des joints de lit, parce qu'ils ſont les côtés communs aux portions des ſurfaces de la doële, & aux ſurfaces des lits. Ce qui ſe fait par des profils particuliers qu'on peut faire de différentes façons, qui donnent toujours la même longueur; on peut choiſir la plus commode.

Premierement, on peut élever ſur la projection horiſontale d'un joint de lit donnée comme $1p^1$ un plan vertical de toute la hauteur du vuide qui eſt entre la projection ſur le plan horiſontal & le véritable joint; ainſi on élevera ſur la ligne $1p^1$ au point 1 une perpendiculaire 1 T, égale à la hauteur 1*t*, de l'élévation, qui eſt celle de la *retombée*, & au point p^1 la perpendiculaire p^1V égale à celle de la retombée Oe^1, la ligne VT ſera le profil & la véritable longueur du joint de lit, dont $1p^1$ eſt la projection.

Secondement, on peut faire le même profil en ſupprimant la hauteur de la retombée du point le plus bas; par exemple, 2 du joint de lit, dont la projection verticale eſt la ligne $2e^2$, & mettant ſeulement à un des bouts p^2 de la projection horiſontale $2p^2$ la hauteur e^2n au-deſſus du point 2, qu'on portera de p^2 en 2e perpendiculairement à la projection horiſontale donnée $p^2 2$.

Troiſiemement, on peut faire le même profil, en tranſportant toutes les hauteurs, par des lignes paralleles à la baſe AE de l'élévation, ſur une ligne qui lui ſoit perpendiculaire, comme *f*L, *f*C, que toutes les paralleles menées par les points 2 & 1 de l'élévation de la face poſtérieure, & e^1, e^2 de la face antérieure, couperont en des points f^2, f^1, *u* qui donneront

les hauteurs supérieures & inférieures des joints de lit, dont il sera facile de trouver les inclinaisons, en portant sur ces paralleles les projections horisontales données; par exemple, $1p^1$ en $u\,4\,1$, & $2p^2$ en $f^1\,3^2$, les lignes inclinées menées par les points 4^1, f^1, $3\,2$, f^2, seront les profils & les vraies longueurs des joints de lit. *Fig. 283.*

Il faut remarquer que si la voute est portion d'un cone droit tronqué, dont les faces antérieure & postérieure sont paralleles entr'elles, comme dans cet exemple, il est inutile de faire des profils pour trouver les longueurs des joints; parce qu'en ce cas ces joints sont tous égaux à ceux des impostes, comme ici à bg ou hd; ainsi dans cette derniere construction de profil, par le moyen des paralleles à la base AE, il suffira de prendre la longueur gb d'un point à l'imposte avec un compas, & des points f^1 & f^2 pour centres, faisant des arcs de cercle qui couperont les paralleles $1\,u$ & $2\,f^1$ prolongées aux points $4\,1$, $3\,2$, on aura les mêmes longueurs que par la maniere précédente; mais si la voute est biaise, c'est-à-dire, portion d'un cone scalene, on ne peut les trouver que (comme on vient de le dire) en portant les longueurs de la projection horisontale sur les paralleles correspondantes.

Les longueurs des lignes inclinées aux plans des élévations des faces antérieure & postérieure étant trouvées, la résolution du Problême ne consiste *qu'à faire des triangles rectangles, dont une jambe est donnée par l'élévation, & dont l'hypotenuse trouvée doit être adaptée à l'autre jambe inconnue*, par une section d'arc de cercle qui en est le *lieu*, & qui en détermine la position; ce qu'on concevra mieux par des exemples.

Pour former un panneau de doele plate, par exemple du second voussoir, laquelle est marquée dans l'élévation par le trapeze $1\,e\,1\,e\,2\,2$, ayant tiré la corde $1\,2$, on la prolongera de part & d'autre vers y & vers z, & des points de division de la face antérieure $e\,1$ & $e\,2$, on abaissera sur cette corde les perpendiculaires e^1y & e^2z, ensuite on transportera à part où l'on voudra la ligne $y\,z$, par exemple ici à la Fig. 284, & ayant élevé aux points y & z deux perpendiculaires indéfinies $y\,21$, $z\,22$, on prendra la longueur d'un des joints de lit, comme bg ou dh, ou au profil 41, $f1$, ou 32, $f2$; car toutes ces lignes sont égales, parce que le cone est droit; mais s'il ne l'étoit

Fig. 283. & 284. pas, on prendroit la longueur de la ligne 4 1, *f* 1, & du point 1 pour centre, on fera l'arc 8 21, qui couperoit la ligne *y* 21 au point 21, & ensuite la longueur de la ligne 32, *f* 2, & du point 2 de la Fig. 284 pour centre, on fera l'arc de cercle 9 22, qui coupera la perpendiculaire *z* 22 au point 22; enfin par les points trouvés, on tirera les lignes 21 1, 21 22, 22 2, & l'on aura le panneau de la seconde doële représentée au plan horisontal par le trapeze 1 p^1 p^2 2, & à l'élévation par 1 *e* 1 *e* 2 2; il en faudroit faire autant pour les autres doëles, si elles n'étoient pas égales comme elles sont dans le cas présent.

A l'égard des panneaux de lit, puisqu'ils sont tous égaux à ceux de l'imposte *a f g b* ou *d h i e*, il est inutile de les chercher, on verra dans l'exemple suivant la maniere de les trouver lorsqu'ils sont inégaux.

Il reste à faire voir comment on peut appliquer cette méthode aux voutes dont les faces sont inclinées aux plans verticaux, sur lesquels on doit faire l'élévation; comme par exemple s'il s'agissoit d'une voute *sur le coin* ou *dans l'angle*, dont le plan horisontal seroit *a m d*, *o* M *z*, ou composée de deux portions droites, comme *a m* & *o* M, ou de deux arcs de cercle, comme M *z* & *m d*.

Il faut, par le Chapitre IV. de ce IIIe. Livre, circonscrire à la Figure irréguliere du plan horisontal un trapeze *a f i e*, dont les côtés opposés *a e* & *f i* soient paralleles entr'eux, & opérer comme si la voute étoit réguliere, suivant ce que nous venons de dire, pour trouver les panneaux réguliers des lits & des doeles, & retrancher de leurs côtés ce que la projection horisontale du plan irrégulier retranche des parties du régulier, suivant la regle que nous avons donnée, page 359, (*Fig.* 250).

Ayant donc fait le panneau de doële de la voute conique réguliere 21, 22, 2, 1, (*Fig.* 284) pour le second voussoir, on élevera des perpendiculaires sur les points S, Q, R, T, où les projections des joints de lit 1 p^1, 2 p^2 sont coupées par celles des faces *o* M, *a m*, lesquelles perpendiculaires *q* Q, *s* S, *r* R, *t* T, couperont les profils VT & 2 ^{e} 2 aux points QS & RT qui donneront les excès VS, QT, 2 ^{e} T, R 2 des côtés du panneau de doële réguliere sur l'inscrite irréguliere. Ainsi on portera la longueur VS en S 21 de la Fig. 284, Q T en Q 1 de la même Figure, 2 R en 2 R, T 2e en T 22, & par les points trou-

trouvés STQR, on tirera des lignes droites ST, QR, qui formeront le trapezoïde QSTR, lequel ſera le panneau de doële du ſecond vouſſoir de la voute conique biaiſe ou dans un angle, ſuivant qu'elle eſt déſignée dans la projection horiſontale de la moitié *ao*M*m*, ou P*p*M*m*. Fig. 283. & 284.

On en feroit autant pour la voute ébraſée, qui ſeroit dans une tour ronde, dont la projection eſt déſignée par ſa moitié MY *dm*. La ſeule différence qu'il y auroit, c'eſt qu'au lieu des lignes droites ST, QR que nous avons tiré au panneau de doële, (*Fig.* 284) pour les faces antérieures & poſtérieures; il faudroit tirer des portions de ces courbes qui ne ſont pas planes, c'eſt-à-dire, qui ne peuvent être décrites dans un plan, deſquelles on pourroit approcher par la circonſcription d'un polygone dans le cercle de la projection de la tour ronde & creuſe; mais parce que nous devons donner ce trait dans le Livre ſuivant, nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette difficulté, il ne s'agit ici que de donner une méthode générale pour tous les polyedres, ſans entrer dans le développement des corps ronds cylindriques, ſphériques, ou coniques, conſidérés comme tels, mais ſeulement comme compris & enveloppés par un grand nombre de ſurfaces planes inſcrites dans les courbes convexes, ou circonſcrites aux convexes.

Second exemple des voutes coniques ſcalenes à double obliquité,

Et en termes de l'art,

Deſcente biaiſe ébraſée en canoniere.

Soit (*Fig.* 285) le ceintre de face antérieure à l'arrête de la doële GF*g*, & celui de la face poſtérieure IE9, avec leurs extrados AB*b*, & HDZ diviſés en leurs vouſſoirs LR34 & PS78, projettés ſur la même ſurface verticale, ce que nous pouvons ſuppoſer comme fait & donné ſuivant l'énoncé du Problême; mais parce que la conſtruction de cette projection eſt la même que celle de la ſolution du Problême pour trouver chaque ſurface des vouſſoirs en particulier, il eſt à propos de la mettre ici tout au long pour rendre la choſe plus facile à comprendre; parce que la conſtruction tient lieu d'explication. Fig. 285.

PL. 24. Fig. 285. Soit le trapeze *ahzy* le plan horisontal de la voute ; ÆX la projection de son axe ou ligne du milieu Cc^2 ; p^1, l^1 la projection horisontale du joint de lit LP ; S^2 R^2, celle du lit RS ; nous ne prendrons que cette moitié de voute pour éviter la multiplicité des lignes dans la Figure.

On commencera par tirer du point X une perpendiculaire XC sur A Æ z, & ayant porté sur la même AÆ la hauteur Æ c^2 de la descente ou montée ; c'est-à-dire, de la différence du niveau de la face antérieure AÆ, & de la postérieure H c^2; du point C pour centre & des intervalles CG, CA ou XG*p*, X*a*, on décrira les cercles concentriques GF*g* & AB*b*, l'un pour la doële, l'autre pour l'extrados de la face antérieure. Ensuite par le point c^2 ayant mené HZ parallele à A*b*, du point c^2 pour centre, & pour rayons les longueurs Æ*i*, Æ*h*, on décrira les deux cercles concentriques IE9, HDZ, l'un pour la doële, l'autre pour l'extrados de la face postérieure, laquelle sera ainsi projettée sur le même plan vertical que l'antérieure. Ensuite ayant divisé ces ceintres en nombre de voussoirs égaux, par exemple en 5, aux points LR 3 4, & PS 7 8, on joindra les points correspondans par des lignes droites, qui exprimeront sur l'élévation les joints de lit, telles sont GI pour celui de l'imposte, LP pour le premier au-dessus, & RS pour le second.

On tirera aussi à l'ordinaire les joints de tête L*m*, R*t*, de leur centre C, de même que P*q* & ST de leur centre c^2.

Cette préparation étant faite, il sera aisé de trouver tous les côtés des surfaces qui comprennent chaque voussoir.

Premierement, pour les panneaux de tête, il n'y a point de difficulté, ils se prendront sur les élévations. Par exemple, ceux du second voussoir seront les portions de couronnes de cercles *m*LR*t* pour la face antérieure, & *q*PST pour la face postérieure.

Secondement, pour les panneaux de lit, par exemple, pour le premier à l'imposte marqué au plan horisontal par le parallelogramme *ahi*G*p*, & à l'élévation par le parallelogramme AHIG, on commencera par en chercher la véritable longueur par le profil, comme nous l'avons dit à l'exemple précédent, parce que les côtés AH & GI de l'élévation ou projection verticale sont trop courts, puisqu'ils le sont encore plus que ceux de l'horisontale *ahi*G*p*, laquelle est plus racourcie que la des-

cente qu'elle repréſente. Pour y parvenir, on y élevera une verticale ÆE ſur la baſe horiſontale AÆ où l'on voudra. Nous faiſons ici ſervir la ligne du milieu de la face poſtérieure, enſuite menant des paralleles indéfinies à cette baſe par les points de diviſion des doëles LP, RS, qui couperont la verticale aux points 1, *p*, 2, *s*. *Fig. 285.*

On portera ſur les lignes provenant des joints inférieurs LR, comme L *l*, R *r*, les projections des joints de lit; ſçavoir, *i*G*p* en Æ*z*; p^1, l^1, en 1 *l*; S^2 R^2 en 2 *r*, & par les points trouvés *z*, *l*, *r*, on tirera les inclinées zc^2, *lp*, *rs*, qui ſeront les véritables longueurs des joints de lit. Si l'on avoit un grand nombre de ces joints, on pourroit trouver tous les points des baſes intermédiaires, en faiſant ſeulement Æ *z* égal à *i* G *p*, & E *e* égal à ÆX, en tirant la ligne *z e*, elle couperoit toutes les baſes aux points *l* & *r*, qui ſe trouveroient entre deux; ce qu'il eſt facile d'appercevoir par la ſeule inſpection du plan horiſontal, où elles ſont compriſes & terminées par deux lignes droites *i* Æ, G*p*X.

Après avoir trouvé par les profils, les lignes inclinées qui ſont égales aux joints de lit, il ne s'agit plus que de les adapter aux triangles rectangles, dont elles doivent être les hypotenuſes, pour trouver les angles qu'elles font avec les joints de tête.

On prolongera les joints de tête du petit ceintre du côté de ceux du grand ou au-dehors, comme P *q* en *n*, ou au-dedans comme TS en V, & par les points *m* & L, *t* & R des diviſions de la face antérieure, on tirera aux joints prolongés des perpendiculaires *m n*, LN, *t u*, RV qui formeront pluſieurs triangles rectangles, dont cette conſtruction donnera un côté dans ſa juſte meſure; ſçavoir, celui qui ſera ſur le joint de tête prolongé, les autres deux côtés demeurant raccourcis par la projection; mais parce qu'on a déja trouvé la valeur de l'hypotenuſe par le profil, on a de quoi achever les triangles que ceux de la projection repréſentent, comme on le verra dans les exemples.

Pour le premier joint de lit, qui eſt celui de l'impoſte, on tranſportera la ligne *i* A ou ſon égale IQ avec ſes diviſions H & *o* où l'on voudra, comme à la Figure 288, en *i h*, *o* Q, & l'on tirera les perpendiculaires indéfinies Q *x*, *o u* par les points *o* & Q, enſuite des points *h* & *i* pour centres, & de l'intervalle c^2z du profil, on fera deux arcs de cercle qui couperont ces

Fig. 285. & 288. perpendiculaires aux points x & u, par lesquels ayant tiré les lignes droites $x h$, ui & xu, on aura le parallelogramme $xhiu$ pour le premier lit de l'imposte, lequel est non-seulement plus grand que celui de la projection horisontale $ahiGp$, mais encore inégal dans ses angles qui sont un peu moins aigus, comme il paroît dans cette Figure, où celui de la projection horisontale est ponctuée en $h a^1 g^1 i$.

Le second & le troisieme panneau de lit se trouveront de même en changeant les triangles rectangles mnR, LNP, tuT, RVS, en d'autres triangles rectangles plus allongés sur les mêmes bases nR, NP, uT, VS, par le moyen des hypotenuses trouvées $p l$, Sr. Ainsi ayant transporté où l'on voudra la ligne Pn avec ses divisions N, q, comme à la Figure 286, on lui

Fig. 286. fera les perpendiculaires nM, NL, & des points q & p pour centres & de l'intervalle $p l$ pris au profil, on fera des arcs de cercle en M & en L qui couperont ces perpendiculaires aux points M & L, par lesquels on fera passer des lignes droites qui sont les côtés du parallelogramme MqpL, lequel sera égal à la surface du second lit marqué dans l'élévation par le parallelogramme racourci mqP L de la Figure 285.

Fig. 287. La Figure 287, fait aussi voir le troisieme lit formé sur la base VSuT transportée pour établir dessus un parallelogramme plus allongé que celui de l'élévation tTSR, suivant les mêmes regles de décomposition de la projection.

Il ne reste plus à présent qu'à trouver les surfaces des panneaux de doëles plates qui doivent passer par les cordes des arcs des divisions des ceintres de face antérieure & postérieure; ce qui se fera de la même maniere dont on s'est servi pour trouver les lits en abaissant des perpendiculaires sur ces cordes prolongées, s'il le faut, par les divisions du ceintre opposé.

Par exemple, pour trouver la doële plate du premier voussoir, marquée dans la projection horisontale par le trapeze Gpi $p^1 l^1$, & à l'élévation par le trapeze GIPL, ayant tiré la corde IP de l'arc postérieur IP, on abaissera du point L de la division de l'arc antérieur sur cette corde, la perpendiculaire LK. On transportera ensuite où l'on voudra la corde PI avec la division K, comme en $l^d kp^2$, au-dessus de la Fig. 288, & on élevera sur le point k la perpendiculaire indéfinie $k^2 l$; ensuite du point p^2 pour centre, & de l'intervalle $p l$ pris au profil, de

l'autre côté on décrira un arc qui coupera la perpendiculaire $k^2 l$ au point $^2 l$, ensuite des points $^2 l$ & l^d pour centres, & de l'intervalle de la corde LG & du joint de lit $c^2 z$, on fera une intersection d'arcs qui se couperont au point ^{2}G, duquel ayant tiré les lignes ^{2}G $^2 l$, ^{2}G l^d, on aura le trapezoïde ^{2}G $^2 l$, $^2 p l^d$, qui sera la surface de la doële plate du premier voussoir, laquelle doit couvrir la portion concave du cone GLPI, & toucher ses quatre angles. *Fig. 285. & 289.*

Pour avoir la seconde doële plate marquée au plan par p^1, S^2, R^2, l^1 & à l'élévation par le trapeze LRSP, on prolongera la corde SP vers x; & du point R on abaissera la perpendiculaire R x, ensuite ayant transporté à volonté la ligne S x avec sa division P, comme à la Figure précédente, on élevera sur l'extrêmité x une perpendiculaire indéfinie $x^2 r$, à laquelle on adaptera la ligne du joint de lit sr, prise au profil. Avec cette ligne prise pour rayon, & du point $^2 s$ pour centre on décrira un arc qui coupera $x^2 r$ au point $^2 r$, duquel comme centre & de l'intervalle de la corde RL, on fera un arc de cercle $^3 l y$; de même du point p^2 pour centre & de l'intervalle du joint de lit pris au profil en $p\,l$, on décrira un arc de cercle qui coupera le précédent $^3 l y$ au point $^3 l$, par lequel ayant tiré les lignes $^3 l\, ^2 r$, $^3 l p^2$, on aura le trapezoïde $^3 l\, ^2 r\, ^2 s\, p^2$, qui sera le panneau de doële plate, propre à couvrir la portion concave du cone que comprend le second voussoir, ainsi des autres.

Il faut observer que pour avoir les longueurs des joints de lit de l'autre moitié de voute FE $9g$, dont la projection horisontale est Æ 10 gp X, il faut faire de nouveaux profils, parce que les lignes 23 33; 24 34, 10 gp, & zy, que nous supposons être les projections des joints de lit, sont toutes inégales; & parce que leurs hauteurs seront toujours les mêmes que celles de l'autre moitié, si les lits correspondans sont de niveau, il suit qu'elles seront plus inclinées, & par conséquent plus courtes que celles qui leur correspondent dans l'autre moitié de la voute; ce qui est évident par la seule inspection du plan horisontal; puisque la ligne zy approchant plus de la perpendiculaire CX, que ah de l'autre imposte, elle sera plus courte, & toutes les projections des lits entre les deux impostes, seront inégales, plus courtes vers y, & plus longues vers a; ce qui n'arriveroit pas à la Fig. 283 où elles sont égales, à distances égales de l'axe du cone qui est droit.

Il faut remarquer que si les deux ceintres de faces opposées, n'étoient pas de même nature, que l'un fut circulaire & l'autre elliptique, ou l'un surbaissé & l'autre surhaussé, on ne pourroit trouver une doële plate, dont les quatre angles touchassent les quatre coins du voussoir, qui seroit portion de ce cone irrégulier; mais parce que nous ne traitons ici que des Figures régulieres, cette exception n'empêche pas que le Problême ne soit général, parce qu'alors la doële plate, au lieu d'être plane quadrilatere, seroit composée de deux triangles qui seroient dans différens plans; nous donnerons au Livre suivant la maniere de remédier à ces irrégularités.

DEMONSTRATION.

Il est visible par la construction de ce Problême que nous réduisons toutes les surfaces planes qui comprennent le solide appellé *voussoir*, en triangles, la plupart rectangles, dont nous trouvons un côté sur les élévations projettées & rassemblées sur un même plan vertical par le moyen de la perpendiculaire que nous abaissons d'un des angles de cette surface sur le côté opposé, prolongé s'il le faut. Nous avons trouvé l'hypotenuse suivant les regles du profil par un autre triangle rectangle, dont la projection horisontale nous donne un côté, la hauteur de l'extrêmité supérieure de la ligne inclinée donne l'autre; ayant les deux jambes d'un triangle rectangle on a facilement l'hypotenuse qui exprime la descente; or la même est commune à un autre triangle rectangle dont nous ne connoissons qu'un côté par ce Problême; sçavoir, la distance des points de division des joints de tête correspondant dans les faces antérieure & postérieure; mais parce qu'un côté & l'hypotenuse suffisent pour trouver le troisieme côté, dont l'angle droit détermine la position & l'hypotenuse la longueur, l'arc de cercle dont elle est le rayon est le *lieu* du sommet de l'angle qu'il doit faire avec son hypotenuse: enfin connoissant les côtés des deux triangles rectangles, & les distances de leurs hypotenuses paralleles, nous avons formé le quadrilatere compris entre les hypotenuses, qui est ordinairement pour les lits ou un parallelogramme ou un trapeze, & quelquefois un trapezoïde pour les doëles plates, où l'on a vû qu'une même hypotenuse nous sert à deux triangles, dont l'un est rectangle, & l'autre peut ne pas l'être; mais parce

que dans celui qui n'eſt pas rectangle nous connoiſſons tous les côtés, il eſt bien aiſé de le former.

On trouve donc les panneaux de lit par l'intervalle des hypoténuſes de deux triangles rectangles poſés ſur une même ligne de baſe, & les panneaux de doële par une ſuite de deux ou trois triangles, dont le premier eſt toujours rectangle par la conſtruction, de meme que le ſecond, lorſque la ſurface eſt diviſée en trois triangles, comme il peut arriver.

Si nous rappellons ici nos principes de projection, nous connoîtrons que toutes les lignes qui ſont paralleles à l'objet projetté ſont dans leurs juſtes meſures; ainſi les cordes des arcs de face GL & IP, LR PS, qui ſont dans des plans paralleles, ne ſont ni diminuées ni augmentées, donc elles peuvent être priſes ſur l'élévation. D'où il ſuit qu'à chaque doële on a toujours deux côtés à prendre ſur l'élévation, qui ſont les cordes des arcs de têtes; & deux ſur le profil, qui ſont les joints de lit. Mais comme ces quatre côtés peuvent faire entr'eux des angles différens, parce que la diagonale du trapeze n'eſt pas connue, on abaiſſe une perpendiculaire LK ſur le côté IP, pour en déterminer la poſition à l'égard de ſon oppoſé LG, par le moyen des deux triangles rectangles LKP & LKI, leſquels déterminant la poſition des points L & I donnent la diagonale LI de la doële, troiſieme côté du triangle LGI, que l'on ne connoiſſoit pas auparavant; donc la *doële plate* eſt exactement trouvée; *ce qu'il falloit faire & démontrer*. *Fig.* 285.

A l'égard des panneaux *de tête* il eſt clair qu'ils ne ſont en rien altérés ni racourcis, ni ralongés ſur l'élévation.

Il ne reſteroit plus qu'à trouver les panneaux de l'*extrados*, ſi l'on en avoit beſoin pour avoir les ſix ſurfaces du vouſſoir, mais il n'eſt pas néceſſaire pour l'exécution de les réduire à des ſurfaces planes; parce que par le moyen du contour des têtes, qui ſont les arcs A *m*, H *q* donnés ſur l'élévation, & leurs côtés *m q*, AH auſſi donnés par les panneaux de lit, on peut former les extrados convexes du premier coup, ſans s'y diſpoſer par des ſurfaces planes, qui ne pourroient être que des tangentes au cone ou au cylindre, dont les angles ſeroient hors du vouſſoir, bien loin de les y déterminer.

Ce Problême peut ſuffire à trouver toutes les ſurfaces planes des polyedres & de leurs diviſions par le moyen de l'élévation des deux faces projettées ſur un même plan; il eſt encore une

maniere plus ſimple où l'on peut ſe paſſer de la double projection des faces antérieure & poſtérieure.

PROBLEME XI.

La projection horiſontale d'un polyedre & de ſes diviſions étant donnée avec l'élévation de ſes faces, trouver toutes les ſurfaces dont chacune de ſes parties eſt enveloppée.

Ou en termes de l'art,

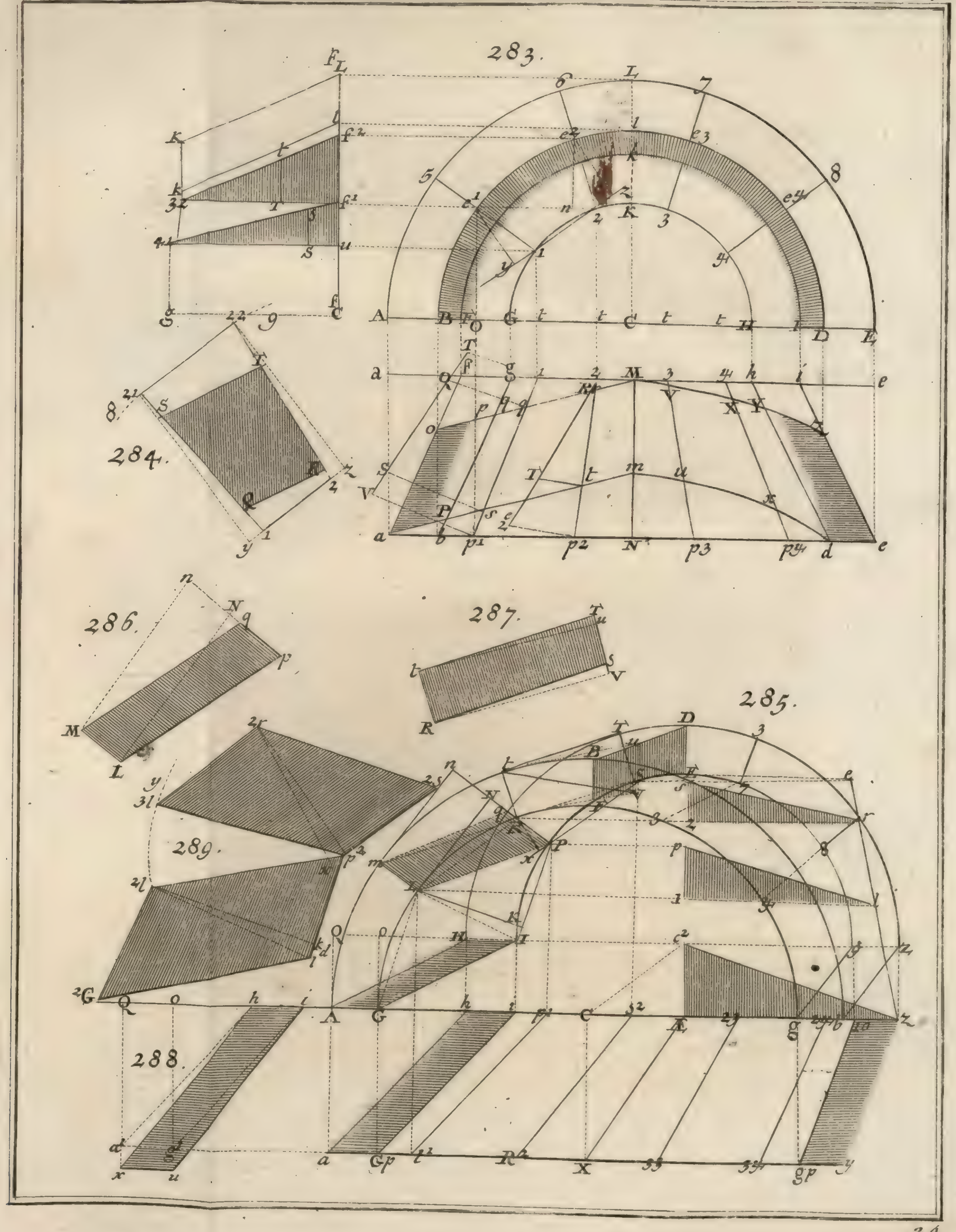
Le plan & l'élévation des têtes étant donnés, trouver les panneaux de tête, de lit & de doële plate de toutes ſortes de voutes.

PL. 25. Fig. 290. Nous ſuppoſons dans ce Problême comme dans le précédent, que toutes les voutes, quoique parties des corps ronds cylindriques, coniques ou ſphériques, ſont réduites par les doëles plates en polyedres, c'eſt-à-dire, les cylindres en priſmes, les cones en pyramides, & les ſpheres & ſphéroïdes en portions de pyramides tronquées. Cela ſuppoſé, tout l'art de ce Problême conſiſte à décompoſer la projection horiſontale en *réduiſant toutes les ſurfaces en triangles, & cherchant dans l'élévation des faces les hauteurs des lignes inclinées pour en trouver les véritables longueurs.*

Il n'eſt donc queſtion que de trouver les hypotenuſes des triangles rectangles, dont un des côtés eſt connu dans l'élévation, & l'autre à la projection horiſontale ou au profil des lignes projettées, ſoit qu'elles ſoient réelles ou ſimplement ſuppoſées pour ſervir de diagonales à des parallelogrammes ou à des trapezes ou trapezoïdes, dont on ne connoît pas les angles, ce qu'on entendra mieux par les exemples.

Premier exemple d'un berceau droit ou biais.

Soit ABFG la projection horiſontale d'un berceau biais, Fig. 290. dont A*h*B eſt le ceintre de face diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, & dont les projections des joints de lit ſont les lignes IK, ²*p* P, ³*p* P, LN. Pour trouver la premiere *doele plate,* dont la projection horiſontale eſt le parallelogramme AIKG, on le diviſera en deux triangles par une diagonale AK ou IG; il n'importe laquelle, on tranſportera enſuite une de ces diagonales


283.
284.
285.
286.
287.
288.
289.

nales comme IG en Ig ſur BA prolongé, pour former un triangle rectangle 1 IG, l'hypotenuſe 1 g ſera la vraie longueur de la diagonale de la premiere doële, dont la projection horiſontale eſt GI. Si au lieu de cette diagonale on avoit pris l'autre AK, on auroit pû tranſporter la longueur AK en Ik, la ligne k 1 auroit été la longueur réelle de la diagonale de la doële plate, dont AK eſt la projection, ou bien, au lieu de tranſporter AK en Ik on peut tranſporter A 1 en A 1 1 à angle droit ſur AK, & tirer la ligne 1 1 K, qui ſera celle qu'on cherche; mais il y a moins de commodité en cette maniere, parce qu'il faut faire un angle droit 1 1 AK, au lieu qu'en la précédente on en trouve un tout fait 1 Ig, qui eſt celui de l'aplomb 1 I ſur la baſe AB, qu'on eſt obligé de faire pour avoir la projection du point 1 & du joint de lit IK. Pl. 25. Fig. 290.

Une des deux diagonales de la doële plate étant trouvée, on a la ſurface de cette doële, parce qu'on a tous les côtés de chacun des triangles par leſquels on l'a diviſé par les diagonales; car la corde A 1 eſt le côté qui eſt dans le plan de la face, lequel n'eſt point changé dans l'élévation, & les côtés GA ou KI de la projection ne ſont pas altérés dans leurs meſures, parce que le joint de lit de la voute eſt parallele à IK, & que GA eſt celui de l'impoſte; donc on a les trois côtés de chacun des triangles, qui ſont les moitiés de la doële. Ainſi faiſant à part la ligne $i^2 g^2$ égale à la ligne 1g, ſi des points i^2 & g^2 pour centre & pour rayon des longueurs A 1 & AG, on fait une interſection d'arc de cercle en a & en k de part & d'autre de la diagonale $i^2 g^2$; on aura ces points a & k, par leſquels tirant les lignes ag^2, $a\,1^2$, kg^2, ki^2 on aura un parallelogramme qui ſera la ſurface de la doële plate dans toute ſon étendue, & en même-tems les angles que font ſes côtés. On peut ſe ſervir de la ligne K 1 1 pour rectifier l'opération, parce qu'elle doit être égale à la diagonale ak.

Si au lieu de la premiere doële on avoit voulu tracer la ſeconde, on auroit de même diviſé ſa projection KI 2 p P par une diagonale IP ou ou K 2 p, dont on auroit trouvé la véritable longueur en portant à angle droit ſur une de ſes extrêmités la longueur d 2, qui eſt la différence des hauteurs des diviſions des joints de lit 1 & 2, & l'hypotenuſe K^2 d auroit donné la véritable longueur de la diagonale de la ſeconde doële, ſur laquelle on auroit formé de part & d'autre deux triangles avec la

Fig. 290. corde 1 2, & le joint de lit KI, comme à l'exemple précédent, ce qui eſt clair de ſoi-même. Ou pour s'épargner la peine de faire un angle droit, on auroit profité de celui de l'aplomb 2 *d* 1 ſur la ligne 1 *d*, en tranſportant la longueur de la diagonale 2 *p* K en *d z*, la diſtance de *z* à *z* auroit donné la même longueur *z z* que K 2 *d*. Ou encore, par une maniere plus abrégée, pour trouver tout d'un coup la différence de niveau des deux points 1 & 2, & profiter de l'angle droit que fait l'*aplomb* 2 2 *p* ſur le diametre AB, il n'y a qu'à prendre le plus petit aplomb 1 I, & le tranſporter ſur le plus grand en 2 V, & la longueur de la diagonale 2 *p* K en 2 *p y*, la ligne *y* V ſera celle que l'on cherche; car il eſt viſible que les triangles *y* 2 *p* V & *z d* 2 ſont égaux entr'eux, de même que les triangles *z d* 2 & 2 *p* 2 *d* K; puiſque les jambes qui comprennent l'angle droit ſont égales par la conſtruction.

Les panneaux de lit ſe feront auſſi facilement par la même méthode. Premierement celui de l'impoſte eſt tout fait dans la projection horiſontale, parce qu'il eſt de lui-même horiſontal, c'eſt le parallelogramme BDEF: les autres lui feroient égaux ſi le berceau étoit droit, mais parce qu'on le ſuppoſe biais, quoiqu'ils ſoient tous compoſés de côtés égaux, ils ſont inégaux par leurs angles: ceux qui approchent le plus de la clef ſont toujours moins obliquangles.

Soit propoſé à faire le panneau du premier lit marqué à l'élévation par le joint de tête 4 *q*, & au plan par le parallelogramme NLOR, que l'on diviſera en deux triangles par une diagonale ON, laquelle repréſente celle du lit, qui eſt une ſurface inclinée à l'horiſon; par conſéquent cette diagonale eſt plus longue que ſa projection ON. Il en faut trouver la meſure, comme nous avons fait pour la doële, en portant ſur le plus grand à plomb *q* O, qui a ſervi à faire la projection, le petit 4 L de *q* en Q 3, enſuite ayant tranſporté la longueur ON en O *n*, on en tirerera *n* Q qui ſera la longueur effective de la diagonale NO.

Préſentement ſi l'on porte cette longueur *n* Q en quelqu'endroit à part comme à la Fig. 291, en $n^1 o^1$, & qu'on forme de part & d'autre deux triangles avec les côtés 4 *q* & RO, on aura le parallelogramme $n^1 7 l o^1 r$, qui ſera la ſurface du premier lit, dont les angles ſont déja moins aigus que ceux de l'impoſte; ainſi des points n^1 & o^1 pour centres, & de l'intervalle NL pour rayon, on fera les arcs 7 *l*, *r* 8, & des mêmes

centres, & de l'intervalle $4q$ on fera des arcs qui couperont les précédens aux points l & r, par lesquels tirant les lignes nr, ro, nl, lo, on aura le parallelogramme $n^1 7 l^1 r$, qui sera la surface du lit de dessus du premier rang de voussoirs, & celle du lit de dessous du second. On voit encore ici qu'au lieu de porter la longueur 4 L en qQ pour avoir la hauteur extérieure du joint de lit sur celui de la doële, on pouvoit faire $4o$ perpendiculaire sur qo & sur $o4$, prolongée en n^2, porter la longueur ON de la projection de O en n, on auroit eu l'hypotenuse n^2q égale à nQ. *Fig. 290. & 291.*

On voit aussi qu'au lieu de la diagonale ON on pouvoit tirer l'autre LR; & porter LR de O en r, la ligne rQ auroit donné la véritable longueur de cette diagonale, dont on pouvoit se servir comme de l'autre; il n'importe en quelque endroit qu'on fasse ces triangles rectangles, pourvû que leurs côtés soient des longueurs convenables, le plus ou le moins de facilité dans la construction décide des moyens. On a toujours un côté donné sur l'élévation, qui est le joint de tête $4q$ ou $3\ 6$, & l'autre à la projection NL ou OR.

Si les faces du berceau n'étoient pas paralleles entr'elles, comme si GY en étoit une, on pourroit toujours les supposer paralleles, & après avoir fait les panneaux on en retrancheroit les longueurs 9N d'un côté, & 10 R de l'autre, suivant les regles de la circonscription, & le panneau seroit réduit au trapeze 9LO 10, comme on a vû au premier exemple du Problême précédent; ce qui peut s'appliquer à une face courbe en la renfermant dans un polygone par sa projection horisontale.

Second exemple d'un berceau en descente.

La différence qu'il y a de ce second exemple au premier, consiste en deux choses.

Premierement en ce que la projection horisontale ne fournit point de mesure des joints de lit de la voute comme au berceau de niveau, parce que ces joints étant inclinés à l'horison, sont racourcis dans la projection, où ils sont représentés par une ligne horisontale; mais cette ligne fournit le moyen de trouver l'inclinée, en ce qu'elle est la base d'un triangle rectangle, dont l'autre jambe, qui est la hauteur de la descente, est donnée; par conséquent il est aisé de former le triangle rectan-

gle, qui eſt le profil de la deſcente, & de trouver ſon hypotenuſe, qui eſt la ligne inclinée que l'on cherche.

Fig. 293. Ainſi (*Fig.* 293) puiſque B*a*, KL & autres projections des joints de lit ſont trop courtes, on élevera à une extrêmité *a* une perpendiculaire *a* a², que l'on fera égale à la hauteur de la deſcente qu'on ſuppoſe être ici la ligne *a* A, & du point B par a² ayant tiré B a², cette ligne ſera la véritable longueur de tous les joints de lit, qu'on ſuppoſe dans cet exemple paralleles & égaux.

Si les projections des joints de lit n'étoient pas paralleles, comme il arrive dans les voutes coniques, dont nous avons donné des exemples au Problême précédent, il eſt viſible qu'il faudroit faire un profil pour chacun, parce qu'ils ſont tous inégaux, ſi le cone eſt ſcalene.

La ſeconde différence de cet exemple d'une voute en berceau biaiſe & en deſcente, eſt que les longueurs des diagonales ſont un peu plus difficiles à trouver, en ce que leur hauteur n'eſt pas égale, de ſorte qu'on ne peut tirer ces hypotenuſes de même ſommet ſur une même baſe, comme à l'exemple précédent d'un berceau de niveau; mais de deux ſommets différens, & pour la commodité de l'exécution, ſur deux différentes lignes de baſe.

Pour concevoir la raiſon de cettte différence, il faut faire attention que la ſurface de la doële d'un berceau horiſontal, étant diviſée en deux triangles par deux diagonales; chacune d'elles
Fig. 292. va de bas en haut, comme (*Fig.* 292) de *n* en *b*, & de *r* en *l* à hauteur égale *l b*, *n r*; mais que ſi cette ſurface eſt inclinée ſuivant ſes joints de lit, comme à la Fig. 296, la doële I *q* BA, on verra que les deux diagonales BI, A *q* ne ſont plus également inclinées à l'horiſon, celle qui part du point I le plus élevé deſcend plus qu'elle ne faiſoit de toute la quantité de la hauteur de la deſcente AB, & l'autre qui part du point A peut monter ou deſcendre ſuivant la différence qu'il y a entre la hauteur verticale ID de la ſurface, & la hauteur de la deſcente AD, ou être de niveau comme A *q*.

Si l'*aplomb* de la retombée marquée à la Fig. 293, par la ligne 2 D, eſt plus grand que la hauteur A *a* de la deſcente du berceau, la diagonale LQ (*Fig.* 293) ou AL (*Fig.* 294) au lieu de deſcendre du point A monte encore en L de la quantité *d* L; donc l'*aplomb* A 2 ou ſon égal *b* L excéde la deſcente A *a*;

mais si la descente Ae étoit plus grande que l'aplomb de retombéee 2 A, ou son égal Fg la diagonale LQ ou Ag, descendroit du point A de la différence g D de l'aplomb de la retombée 2 A & de la descente Ae. *Fig. 293. & 294.*

Pour prendre une idée nette de ces différences, nommons la hauteur Aa ou Ae de la descente a, celle de la retombée 2 A, b, leur différence, d; il est clair que la diagonale qui partant du sommet 2 vient au bas de la descente, a toujours pour unique hauteur $a+b$, ce qui est invariable; mais celle de l'autre diagonale qui part du point A sera variable suivant le rapport d'a à b, à son extrêmité opposée au point A; car lorsque a sera plus grand que b elle sera descendante, parce que la hauteur totale $a+b=2b+d$ est diminuée de $b+d=a$, qui est par la supposition plus grand que b, c'est-à-dire $a-d$; mais si a est plus petit que b, cette diagonale sera ascendante, parce que la hauteur totale $a+b$, qui est alors égale à $2a+d$ ne sera diminuée que de la hauteur a qui est moindre que b par la seconde supposition; il restera donc $a+d$ plus grand que a, cela supposé.

Soit (*Fig.* 293) le plan horisontal Ba IE du berceau en descente, avec la projection de ses joints de lit faite à l'ordinaire par les à plomb abaissés des divisions de son ceintre 1, 2, 3, 4. Soit la hauteur de la descente l'intervalle Aa pour former le panneau de doële, par exemple du second voussoir 1 2, dont la projection horisontale est le parallelogramme KL 2p Q, on le divisera en deux triangles par une diagonale LQ ou 2 p K il n'importe, une suffit; nous n'en mettons ici deux que pour faire voir qu'il n'est pas indifférent de prendre l'une ou l'autre pour en trouver la juste longueur. *Fig. 293.*

On commencera par chercher la valeur de la projection du joint de lit KL égale à Ba qui est trop courte, & qu'on trouvera en faisant la ligne a a[2] perpendiculaire sur aB & égale à la hauteur Aa, la ligne B a[2] sera déja un côté d'un des triangles que forment les diagonales LQ ou K 2p; ensuite on cherchera la valeur de l'autre côté L 2p ou son égal KQ, qui est aussi trop court, parce qu'il représente la corde 1 2 qui est inclinée à l'horison, & comme cette corde est dans sa juste mesure à l'élévation, elle sera le second côté de chacun de ces triangles. Il ne reste plus qu'à trouver le troisieme qui est la valeur d'une diagonale, laquelle n'est point inclinée suivant la

Fig. 293. pente a ² B, comme nous l'avons fait voir, mais l'une plus & l'autre moins; celle qui vient du point 2 plus haut que le point 1, eſt plus inclinée que la ligne B a ², & ſa hauteur eſt, comme nous l'avons dit, la ſomme de l'aplomb 2 D & de la deſcente ² *t* ² *p* = A *a*; il faut donc porter la hauteur 2 D en I ² *t* pour avoir cette ſomme I ² *p*, & la longueur de la diagonale ² *p* K, en ² *p k* & tirer la ligne 1 *k* qui ſera ſa juſte meſure.

Mais ſi l'on veut avoir la valeur de la diagonale LQ, qui a pour origine le point 1 projetté en L, lequel eſt plus bas que le point 2, il faudra porter la longueur 2 D de ² *p* en N, pour avoir la différence N ² *t* de l'*aplomb* 2 D & de la deſcente ² *t* ² *p*, & porter la longueur de la diagonale LQ de ² *t* en O, la ligne NO, hypotenuſe de ce triangle rectangle, ſera la valeur de la ligne LQ.

Pour s'épargner la peine de faire une ligne 1 D perpendiculaire ſur 2 D, qui donne la différence 2 D des hauteurs des points 1 & 2, il n'y a qu'à prendre avec le compas la hauteur 1 L & la porter en 2 N ſur l'aplomb le plus long, on aura tout d'un coup la différence N ² *p* = 2 D; parce que l'angle L ² *p* 2 eſt droit, 1, 2 = LN, côté du même parallelogramme, & 1 D = L ² *p*, donc N ² *p* = 2 D.

Par la même conſtruction on trouvera le panneau de lit marqué à l'élévation par le joint de tête 3 ² 3, & au plan horiſontal par le parallelogramme *s* R S *r*, dans lequel on tirera les diagonales R *r*, ou S *s*, une des deux ſuffit pour le diviſer en deux triangles, & on aura leur valeur par la même méthode qu'on a employé pour trouver celle de la doële. On examinera quelle eſt celle qui vient du point le plus élevé 2 3, qui a donné le point S pour ſa projection, d'où l'on conclurra que la diagonale S *s* eſt la plus grande, qui doit avoir pour hauteur la ſomme de l'*aplomb* 2 3 *d*, & de la hauteur OS de la deſcente, c'eſt pourquoi l'on portera 3 *d* en O *u*, la ligne S *u* ſera la hauteur de la diagonale S *s*; ainſi en portant S *s* en SV la ligne *u* V ſera ſa juſte meſure; pour la diagonale R *r*, il n'y a qu'à porter la hauteur 2 3 *d* en RT pour avoir ſa différence *y* T avec celle de la deſcente OS, laquelle différence eſt ici preſqu'inſenſible, de ſorte que la ligne R *r* eſt égale à la grandeur de projection, c'eſt-à-dire, que cette diagonale eſt horiſontale dans le panneau de lit, par conſéquent égale à la projection R *r*.

On peut ici, comme à l'article précédent, trouver la diffé-

rence 2 3 *d* tout d'un coup, en portant la plus petite hauteur d'aplomb 3 R en 2 3 O.

Les longueurs des diagonales, tant de la doële que du lit étant trouvées, on les transportera en quelqu'endroit à volonté, comme en K t^2 (*Fig.* 295) & des points K & t^2, comme centres & pour rayons les intervalles 1 2 & B a^2, de la Figure 293, on fera des interfections d'arcs de part & d'autre de la diagonale K t^2, qui donneront les points t^1 & *q*, par lesquels tirant les lignes K t^1, $t^2 t^1$, $q t^2$, *q* C on aura un parallelogramme égal à la surface de la doële plate. *Fig. 295. à gauche.*

De la même maniere ayant transporté la longueur V *u* en *s* SO (*Fig.* 295 *à droite*) on prendra la longueur du joint de tête 3 2 3, & du joint de lit B a^2 & de ces intervalles pour rayons & des points *s* SO pour centres, on fera des interfections d'arcs en RT & *r* 3, qui donneront les points RT & *r* 3, par lesquels tirant les lignes *r* 3 SO, $r^3 s^3$, RTSO, RT s^3 on aura un parallelogramme qui sera égal à celui de la surface du panneau de lit. *Fig. 295. à droite.*

Troisieme exemple d'une voute en canoniere en descente, qui est une conique scalene tronquée.

La différence de cet exemple au précédent consiste 1°. en ce que les projections des joints de lit étant toutes inégales, & plus courtes que les joints qui sont inclinés à l'horison, il faut trouver la valeur de chacune en particulier par un profil semblable à celui de l'imposte D *a* a^2, en élevant une perpendiculaire à une de leurs extrêmités égale à la hauteur de la descente *a* a^2, au lieu que dans l'exemple précédent un seul suffisoit pour tous. *Fig. 297.*

Secondement, en ce que les hauteurs des diagonales se trouvent encore différemment, quoique toujours suivant le même principe.

Soit donc (*Fig.* 297) le plan horisontal d'une descente en canoniere D *ab* E, avec les projections de tous ces joints de lit O *l*, P *n*, &c. soit A *a* la hauteur de la descente, A *h* B le ceintre de face de la partie postérieure ébrasée; DSE celui de la face antérieure, l'un & l'autre divisé en nombre égal de voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, desquels on a abaissé les aplomb 1 L, 2 N, & 1 O, 2 P, lesquels ont donné les projections des joints de lit *l* O, *n* P suivant l'usage ordinaire, & les trapezes

Fig. 297. D *a l* O, & O *l* *n* P pour projection des doëles. On les divisera en triangles par des diagonales *n* O *l* P (une seule suffit) & l'on en trouvera la valeur, à peu près comme dans l'exemple précédent, ayant égard à leur origine & à leur côté opposé pour trouver par le moyen de leur hauteur au-dessus du plan horisontal leur inclinaison & leur longueur. Ainsi pour avoir la véritable longueur de la diagonale *n* O, qui répond par le point *n* à la plus grande hauteur de l'aplomb 2 *n*, & par le point O, à la plus petite hauteur de l'aplomb 10 de la face antérieure, on ôtera la plus petite de la plus grande, & leur différence sera la hauteur d'une des extrêmités de cette diagonale au point *n*. Or il n'importe de prendre cette différence en haut ou en bas; si on la prend en bas en portant O 1 de *n* en 10, il faudra tirer une horisontale par ce point 10; mais si l'on porte O 1 sur le haut du point 2 au point I, la ligne *a b* servira d'horisontale toute tracée; de sorte que si l'on porte la longueur de la diagonale *n* O de *n* en K, & qu'on tire la ligne KI, cette ligne sera la valeur de la plus grande diagonale représentée au profil par la ligne 23 01, qui est trop courte par les raisons que nous avons donné en parlant des profils des cones, Chap. IV.

Cette ligne KI peut suffire pour trouver le panneau de la doële, dont la projection est O *l n* P; on la transportera où l'on
Fig. 298. voudra comme à la Figure 298, en 2 *n* 2°; puis du point 2 *n* pour centre & de l'intervalle de la corde 1, 2 de la Figure 297 pour rayon, on fera un arc de cercle L 5, & du point 2° & pour rayon l^2 O, valeur du joint de lit, dont la projection est *l* O, que l'on aura trouvé en faisant ll^2 égale à *l* L, & perpendiculaire à O 1; on aura le triangle 2° 1 L 2 *n* qui sera la valeur de celui de la doële O *l n*. On trouvera de la même maniere la valeur de l'autre triangle OP *n*, en faisant du centre 2° & de l'intervalle de la corde 1 2 du ceintre DSE l'arc 6 *p*, & du point 2 *n* pour centre & pour rayon la valeur de P *n* que l'on n'a pas mis dans cette Figure, on décrira un autre arc qui coupe le précédent en ^2p, le triangle 2° *p* 2 *n* sera la valeur de celui de la projection OP *n*.

Si au lieu de prendre la diagonale *n* O on avoit voulu prendre l'autre *l* P, on auroit pris la hauteur de l'*aplomb* 2 P du ceintre de face antérieure, & on l'auroit porté sur l'aplomb 1 L de l'autre ceintre A *h* B qui a donné la projection du point de l'extrêmité opposée de cette diagonale, & on auroit eu le point *i*; ensuite

ensuite portant la longueur *l*P de *l* en *k*, la ligne *i k* auroit donné sa valeur ou mesure, exprimée au profil par la ligne 14 p^2 qui étoit trop courte, parce que c'est un profil de cone. Si l'on porte cette longueur 2 P de bas en haut, de *l* en 2 *p*, on aura la hauteur de l'horisontale 2 P p^2 terminée au point p^2 du profil. *Fig. 297 & 289.*

Il faut remarquer que les longueurs des diagonales trouvées sont plus grandes que celles du profil 14 p^2, & 23 0 1, parce que n'étant pas paralleles au plan vertical de ce profil, elles y sont racourcies par la projection verticale; de sorte qu'un tel profil est inutile pour les mesures; on ne l'a fait que pour indiquer le rapport des lignes cherchées, & pour en faire voir l'inclinaison & la position, afin qu'on conçoive plus facilement les raisons de la construction.

Il n'est pas nécessaire d'expliquer la maniere de faire le panneau de lit, on s'y prendra de la même façon que pour la doële, en divisant sa projection QR*ts* en diagonales, dont on trouvera les longueurs réelles par le moyen de leur hauteur sur l'horison à l'extrêmité élevée, laquelle hauteur sera la différence de celle des retombées, par exemple du joint de tête 3 6, qui est V*t*, si l'on porte de *t* en *q* la longueur de la projection de la diagonale *t* Q, on aura pour sa valeur la ligne V *q*, de même que *ur* est celle de la ligne *s* R de la projection. Ces diagonales transportées à part, comme à la Fig. 299, avec les joints de tête 3 6, & la valeur des joints de lit *s* Q *t* R, donneront un parallelogramme *t* 6, R 6, Q 3, *s* 3, qui sera le lit du joint 3 6, de la même maniere qu'on a trouvé celui de la doële dans l'exemple précédent de la Fig. 293; avec cette seule différence qu'il faut faire un profil pour chaque projection de joint de lit Q *s* R *t*, parce que ces lignes étant la projection de lignes inégales, une seule hypotenuse ne peut servir pour tous les joints de lit, comme dans la Fig. 293, ce que nous avons déja fait remarquer, mais que nous n'avons pas fait à la Fig. 297, pour éviter la multiplicité des lignes.

Quatrieme exemple d'une voute sphérique réduite en polyedres par des doëles plates.

Nous avons fait voir, en parlant des développemens, que la sphere pouvoit être réduite en portions de cones tronqués, & ces cones en pyramides tronquées, de sorte qu'on pourroit

renvoyer le Lecteur à l'exemple précédent ; puisque si l'on suppose le demi-cercle B *h* E (*Fig.* 300) divisé en cinq parties aux points 1, 2, 3, 4, & qu'ayant tiré les cordes B 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 E l'on fasse mouvoir ce demi-cercle autour de son rayon C *h*, les cordes B 1, 1 2 produiront par leur révolution deux cones tronqués, dont la section par par l'axe du premier est le trapeze B 1 4 E, & le trapeze 1 4 3 2 celle du second ; & si ces trois cones tronqués inscrits dans la sphere sont réduits en pyramides tronquées, nous retombons dans le cas de l'exemple précedent, avec cette différence que celui-ci est plus facile & plus simple, parce que ces pyramides sont droites sur leurs bases, & que nous en supposons les axes en situation verticale ; au lieu qu'au précédent nous avons supposé l'axe incliné à l'horison.

Fig. 300.

Soit cependant pour une plus ample explication de la Fig. 300, le demi-cercle ACFS la projection d'une hemisphere, ou plutôt d'un quart de sphere, dont les cercles concentriques BME, GNL & IOK sont les projections des joints de lit de la doële réduite en portions de cones tronqués, dans lesquels on inscrira un poligone d'un nombre de côtés égal à celui de la quantité des voussoirs que l'on doit mettre à chaque rang, en faisant ces voussoirs égaux ou inégaux, il n'importe ; la régularité de ce polygone n'est pas nécessaire, parce qu'il doit enfin être réduit au cercle pour derniere opération.

Fig. 300.

Soit, par exemple, BGNM la projection d'une doële d'un voussoir du premier rang, l'ayant divisé par la diagonale GM en deux triangles, on cherchera la véritable longueur de cette diagonale, qui est plus courte que la ligne inclinée qu'elle représente. On portera, comme dans les exemples précédens, la longueur GM en G*m* sur l'horisontale AF au pied de la hauteur de l'aplomb 1 G, la ligne *m* 1 sera la longueur réelle, dont MG est la représentation. On peut donc former un trapeze *b g n m* (*Fig.* 302) qui sera égal à celui de la doële plate, dont la projection est BGNM (*Fig.* 302) parce qu'on a tous les côtés des deux triangles inégaux dans lesquels il a été divisé par la diagonale GM ; car les côtés égaux BG & MN sont donnés par la corde B 1 de l'élévation qu'ils représentent, & les cordes BM & GN sont données dans la projection de leur longueur naturelle, parce que ces cordes sont celles des cercles des joints de lit qu'on suppose horisontaux, par conséquent paralleles & égaux à ceux du plan horisontal de la projection, où ils sont rassemblés.

Ayant porté la longueur de la ligne *m* 1, de la Fig. 300, en quelqu'endroit à part comme en *g m* (*Fig.* 302), du point *g* pour centre & de l'intervalle de la corde GN de la Figure 300, on fera un arc de cercle vers *n*, & du point *m* pour centre & de l'intervalle de la corde B 1 de l'élévation pour rayon, on fera un autre arc de cercle *n* I, qui coupera le précédent au point *n*, par lequel tirant les lignes *ng*, *nm* on aura le plus petit des deux triangles *gn m* de la division du trapeze par la diagonale MG. La même corde B 1 sera le rayon d'un arc *b* 5 fait du centre *g*, & la corde MB de la Fig. 300, sera le rayon d'un autre arc fait du point *m* pour centre, lequel arc coupera le précédent *b* 5 au point *b*, qui sera le sommet du second & plus grand triangle *mbg*. *Fig.* 300. & 322.

On trouvera de même la surface de la doële d'un voussoir du second rang, dont la projection horisontale est le trapeze GION, en portant IN en I *n* sur l'horisontale AF, & la hauteur de la retombée 2 D en *i* I, la ligne *in* sera la longueur réelle, dont la diagonale IN est la projection ; de sorte que le trapeze GION deviendra plus allongé, comme on le voit à la Fig. 302 en *g* IO *n*.

Par la même méthode on trouvera les surfaces des lits que l'on pourroit aussi réduire à des trapezes rectilignes, si l'on vouloit tirer une tangente P*t* sur le milieu *t* de l'arc Q*q*, qui est la projection du joint de lit de l'extrados d'un voussoir, dont la projection seroit la portion de couronne de cercle LQ*qr*; mais cette circonscription est inutile pour l'exécution ; il suffit que le panneau de lit soit rectiligne de trois côtés QL, L*r*, *rq*; quoique son quatrieme côté *qt*Q soit une portion de cercle, il ne fait aucune difficulté pour l'usage de la coupe des pierres.

Ayant fait la projection du lit dont la ligne 4 14 de l'élévation représente exactement la largeur & l'inclinaison, on prendra avec le compas la longueur de l'aplomb 4 L qu'on portera sur le plus grand 14 Q en 14 *u*, & l'on portera la longueur Q *r* de la diagonale qu'on aura tiré dans la projection de Q en V, la ligne V *u* sera sa juste longueur, laquelle étant mise à part (*Fig.* 301) servira de base pour former les deux triangles du trapeze qui exprime la surface du lit, dont tous les côtés sont donnés. Les côtés Q *l* & *r q* sont égaux au joint de tête 4 14, le côté *lr* égal au côté L*r* de la projection horisontale, & le côté *Fig.* 301.

Q*q* égal auſſi à celui de la projection, ſoit qu'on le prenne par la corde de ſon arc, pour lui circonſcrire l'arc, ſoit qu'on le prenne par ſa tangete, ſoit qu'on le prenne par l'arc même, qu'il eſt aiſé de tracer du premier coup, en prenant ſur le côté Q*l* prolongé la longueur du rayon FC, & alors au lieu d'un trapeze rectiligne on aura un trapezoïde mixte *lrq*Q.

DEMONSTRATION.

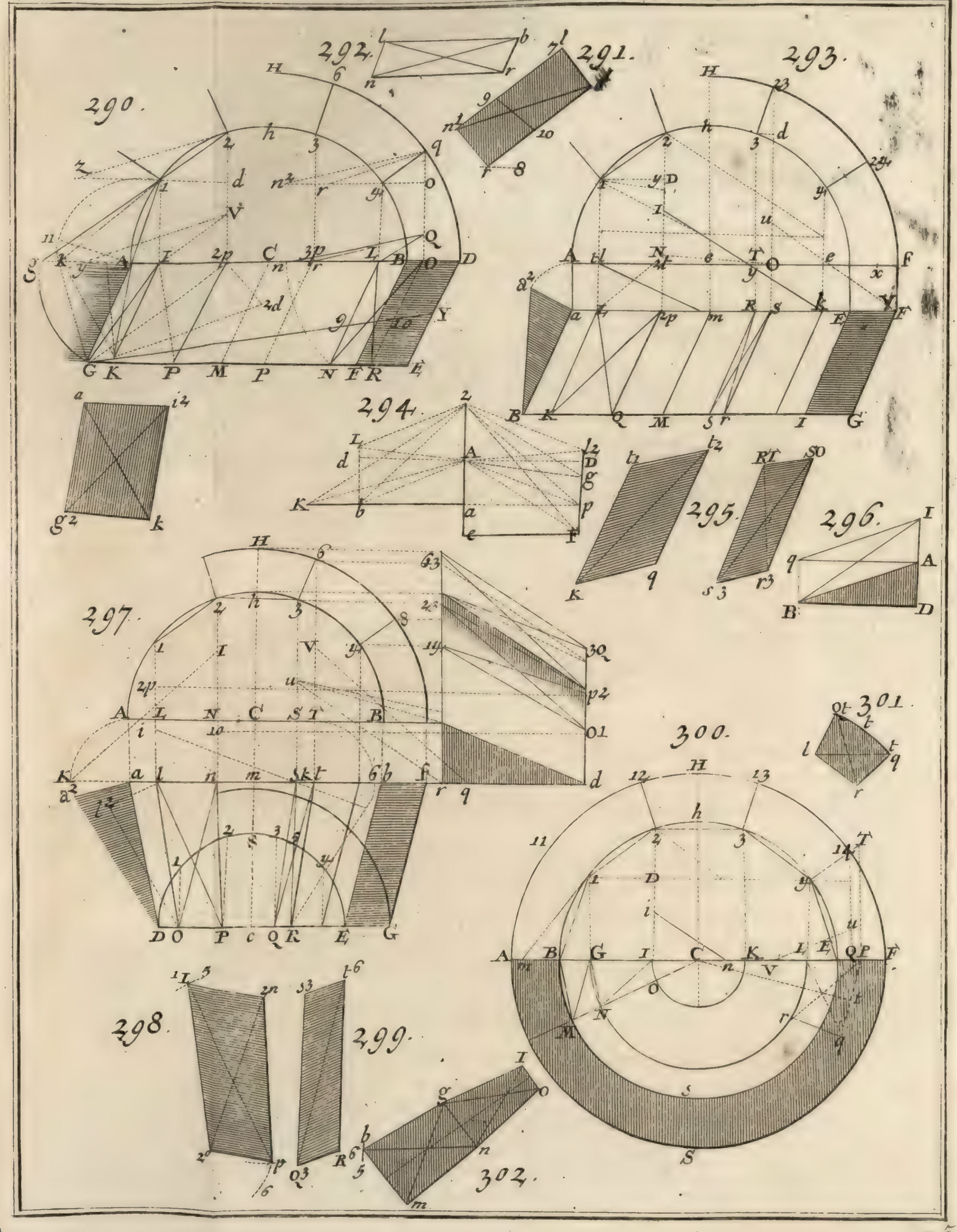
La conſtruction de ce Problême & les explications que nous y avons mêlé, portent leur démonſtration.

Premierement il eſt clair que toutes ſortes de figures rectilignes peuvent être réduites en triangles, & que les curvilignes peuvent être réduites en rectilignes par l'inſcription ou la circonſcription, par le moyen de quoi on peut, du moins par approximation, connoître leur excès ou leur défaut; mais toujours aſſez exactement pour la pratique.

Secondement il n'eſt pas moins clair qu'en trouvant la hauteur des lignes inclinées ſur un plan horiſontal, ſur lequel la projection les a racourcies, on ne fait que décompoſer cette projection; en ſorte que l'on remet les côtés & les angles du ſolide dans la ſituation où ils étoient avant qu'ils fuſſent projettés, & il eſt clair qu'on en trouve par ce moyen les juſtes longueurs. Or ayant les trois côtés d'un triangle, il eſt eſt évident qu'on a les angles de trapeze ou de telle autre ſurface que l'on voudra, dont il eſt partie; car un de ſes angles devient un de ceux de la figure quadriligne ou polygone qu'il compoſe ou par ſa repétition, comme il arrive dans les parallelogrammes, ou par ſa jonction avec celui d'un autre triangle mis de ſuite, car le tout eſt égal à ſes parties, donc cette méthode eſt applicable à toutes ſortes de ſurfaces planes; mais comme les courbes peuvent encore être inſcrites dans des polyedres, comme nous l'avons dit de la ſphere, il ſuit que cette méthode eſt univerſelle, & que l'ayant bien compriſe, on peut l'appliquer & trouver par ſon moyen toutes les ſurfaces dont les ſolides ſont enveloppés, ce qui étoit propoſé au Problême.

Remarque ſur l'uſage.

Non-ſeulement ce Problême peut ſervir à trouver les panneaux des lits & des doëles planes, mais encore ceux des lits & des doëles ou têtes gauches, en inſcrivant leur projection dans


290.
291.
292.
293.
294.
295.
296.
297.
298.
299.
300.
301.
302.

des triangles, comme aux vis St. Gilles & aux arrieres-vouſſures; car on peut toujours faire paſſer une ſurface plane par trois points. Cependant comme la diviſion des doëles donne des figures quadrilignes qu'il faudroit diviſer en deux par des diagonales, pour les réduire en triangles; il arriveroit qu'il faudroit encore trouver l'inclinaiſon que les plans de ces deux triangles feroient entr'eux, ſuppoſant que le quadriligne ſoit gauche, ce qui obligeroit à une ſeconde opération, qu'on peut s'épargner par des méthodes plus commodes & plus abrégées, que nous donnerons au quatrieme Livre, lorſqu'il s'agira des traits des voutes qui ont des lits ou des paremens de doële ou de tête gauches. Il ſuffit d'avoir établi une méthode générale & fondamentale. Il ne reſte plus qu'à trouver les angles des plans qui terminent & enferment les ſolides.

CHAPITRE V.

De la Goniographie, ou deſcription des angles.

En termes de l'Art,

Des moyens de trouver les biveaux.

IL ſemble que lorſqu'on a la figure & la juſte grandeur des ſurfaces qui comprennent un ſolide, il eſt inutile de chercher les angles qu'elles font entr'elles; puiſque leur aſſemblage dans l'ordre où elles doivent être, forme un ſolide d'une figure déterminée, dont les angles ne peuvent varier ſans le changement de quelques-unes de ſes ſurfaces; mais il faut conſidérer ici que notre objet n'eſt pas de raſſembler des ſurfaces pour en compoſer un ſolide; mais de diviſer un ſolide en parties qui ayent leurs ſurfaces égales à celles qu'on a trouvé par les regles & les Problêmes précédens, en retranchant d'une plus groſſe maſſe tout l'excès dont elle ſurpaſſe celui qu'on ſe propoſe de faire; & parce qu'il faut abattre, tailler & creuſer ſucceſſivement une ſurface par le moyen de ſa contigue, qui doit en déterminer la poſition; il ſuit qu'on ne peut leur donner l'inclinaiſon qu'elles doivent avoir entr'elles, ſans connoître les an-

gles de leurs plans pour approfondir plus ou moins la place du modele qu'on doit y appliquer, lequel regle les angles de leurs côtés, & pour trouver par leur situation celle d'une troisieme, quatrieme & cinquieme surface, dont elles sont les termes.

La seconde raison qui nous oblige à la recherche des angles des plans, c'est qu'on ne fait pas des panneaux pour toutes les surfaces qui comprennent un voussoir. On fait rarement ceux des extrados, & s'il s'agissoit d'opérer par la syntese, on ne pourroit se dispenser de les faire, lorsqu'ils sont composés de plusieurs surfaces, comme il arrive aux enfourchemens.

Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire d'expliquer ici ce que nous entendons par les angles des plans; la sixieme définition du onzieme Livre D'EUC. nous enseigne, que l'angle de rencontre de deux plans qui se coupent est mesuré par celui que font deux lignes droites, perpendiculaires à leur commune section, menées au même point; la raison nous fait sentir que c'est le moyen le plus simple de connoître leur inclinaison mutuelle; cependant comme cette regle est le fondement de l'usage qu'on doit faire de ces instrumens propres à copier & transporter les angles qu'on appelle beuveaux, ou selon moi, *biveaux*, du Latin *bivium*, un chemin fourchu, il ne sera pas inutile d'en faire une proposition générale, applicable aux surfaces courbes des corps réguliers, aussi-bien qu'aux droites.

Il faut remarquer qu'on ne doit pas confondre les *angles des plans* avec *les angles plans*; car quoique les angles d'inclinaison des plans soient dans des plans qui leur soient perpendiculaires, nous entendons par le mot *d'angle plan*, celui des côtés d'une surface plane, & par *angle des plans*, celui de deux surfaces.

LEMME.

L'angle d'inclinaison de deux surfaces quelconques, planes ou courbes, mesuré par des lignes obliques à leur commune section, est plus aigu que celui qui est mesuré par des perpendiculaires à cette commune section, menées à un même point.

PL. 26. Fig. 303. Soient deux surfaces planes ABCD, BFED, qui sont inclinées entr'elles, dont la commune section est la ligne droite BD; si d'un point *h* pris sur cette ligne on lui tire deux perpendiculaires; sçavoir, *g h* dans un plan, & *i h* dans l'autre, & que

d'un autre point *k* pris sur la même ligne, on tire aux points *g* & *i* les lignes *kgki*; je dis que l'angle *ghi* est plus grand que l'angle *gki*.

DÉMONSTRATION.

A cause des angles droits en *h*, les lignes *ik* & *kg*, qui sont les hypotenuses des triangles rectangles *ihk* & *ghk* sont plus grandes que les côtés *gh* & *hi*; donc si l'on applique sur un même plan les deux angles *gki* & *ghi*, qui sont ici dans différens plans, le sommet *h* tombera au-dessous du sommet K; & si l'on tire une ligne *gi* pour base commune de ces deux triangles *ghi*, *gki*; on reconnoîtra (par la 21 prop. du premier Livre d'EUCL.) que l'angle *gki* est plus aigu que l'angle *ghi*; *ce qu'il falloit démontrer* premierement pour les sections des surfaces planes. *Fig.* 303.

Secondement si les surfaces sont, l'une plane l'autre courbe, ou toutes deux courbes des courbures régulieres des spheres, cones & cylindres; il sera encore vrai que les lignes courbes qui seront dans des plans perpendiculaires à la commune section, c'est-à-dire à une tangente de la courbe formée par cette section, seront plus courbes que celles qui s'éloignent de ce point d'attouchement.

Soit pour exemple une portion de zone de sphere K*b*GH*d*L, qui est coupée par un plan IFGK, telle qu'est la rencontre d'une doële avec son lit. Il est clair que si par le point *b* de la commune section des surfaces courbe & plane, on mene la tangente *b*T, & qu'on lui mene les perpendiculaires *b*a & *bd*, dont l'une *b* a soit dans le plan du lit, & dont l'autre *bd* soit la corde de l'arc *bmd*, portion de la sphere, le plan qui passera par *bmd*, passera par le centre de la sphere; & si l'on prend un autre point comme E dans la section du lit & de la doële, & que l'on tire E*d*, le plan qui passera par E*d* ne passera pas par le centre de la sphere. Or dans le cercle de toutes les lignes qui sont tirées d'un point hors du centre à la circonférence la plus courte est celle qui étant prolongée passe par le centre, de même dans la sphere, l'arc le plus court entre deux cercles paralleles, est celui du cercle majeur, dont le plan passe par le centre de la sphere & les poles de ces cercles, c'est-à-dire, qui coupe à angle droit leurs plans. *Fig.* 304.

Fig. 304. Pour concevoir cette vérité, ſoit prolongée la ligne droite a *b* en C, puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la tangente *b* T, elle paſſera par le centre C de la ſection circulaire K *b* G; & ſi du point *d*, que je ſuppoſe à la ſurface de la ſphere, on tire ſur la ligne a *b* C, la perpendiculaire *d* D égale à la hauteur du point *d* ſur le plan FGKI de la ſection plane de la ſphere, & du point D une ligne au point E, il eſt clair (par la 15 du IIIᵉ. Liv. d'Euc.) que la ligne D *b* qui paſſe par le centre C ſera plus courte que DE qui eſt dans le même plan, & ne paſſe pas par le centre. Il ſe formera donc deux triangles rectangles perpendiculaires au plan de la ſection; ſçavoir, *b d* D, E *a* D, qui ont pour côté commun *d* D; & puiſque le côté ED eſt plus grand que *d b*, l'hypotenuſe *d* E ſera auſſi plus grande que *d b*; donc l'angle a *b d* ſera plus grand que a ED (par l'Article précédent). Or l'arc *b m d* étant dans un plan perpendiculaire au plan FGKI, ſection de la ſphere, & paſſant par ſon centre, paſſera auſſi par le pole, & ſera portion d'un cercle majeur, laquelle ſera plus petite que celle du cercle mineur E *n d*, comme nous le démontrerons au quatrieme Livre; donc l'angle mixte a *b m d* eſt plus grand que l'angle mixte a E *n d*; *ce qu'il falloit démontrer.*

Cete démonſtration pourra s'appliquer aux autres ſections coniques, où il eſt démontré *de maximis & minimis*, que la perpendiculaire au point d'attouchement d'une tangente eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer d'un point donné à ſon contour, parce qu'une telle ligne eſt un *minimum.*

De-là on peut inférer, que non-ſeulement aux angles mixtes, mais encore aux curvilignes, formés par la rencontre de deux ſurfaces courbes, il faut prendre la meſure de l'ouverture des branches du biveau perpendiculairement à la tangente commune de l'une & de l'autre.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là que l'art de former les biveaux ou modeles des angles des ſurfaces qui ſe rencontrent, conſiſte à trouver une ſous-tendante aux perpendiculaires menées ſur chaque ſurface à la ligne droite ou courbe de leur interſection, ce qui eſt aiſé dans les angles rentrans, mais qui ne ſe peut dans les angles ſaillans, que par le moyen de quelqu'inſtrument, ou en prolongeant

geant ces perpendiculaires, par le moyen de quelques regles ou cordeaux.

L'inſtrument propre à cet uſage eſt compoſé de deux branches mobiles, qui ſont aſſemblées à leur extrêmité par un pivot & une charniere, dont le frottement eſt aſſez rude pour qu'elles demeurent immobiles à l'ouverture où on les a mis; on l'appelle *ſauterelle*, ou *fauſſe équerre*, ou *compas d'appareilleur*, comme on verra à la premiere planche du quatrieme Livre; mais parce qu'on a beſoin de prendre des angles mixtes ou curvilignes, & qu'avec cet inſtrument on ne peut prendre que les angles rectilignes, ou ceux des cordes des ſurfaces curvilignes concaves, & point du tout des convexes, on eſt obligé de faire un autre inſtrument pour chaque angle de cette eſpece, qu'on appelle *beuveau* ou plutôt *biveau*.

Comme il y a plus de difficulté à former des angles mixtes & curvilignes que des rectilignes, qui ſont aiſément déterminés par la connoiſſance de leurs ſinus ou de leurs ſous-tendantes, on doit toujours commencer par les angles rectilignes des ſurfaces planes ſuppoſées au-devant des courbes, comme ſont les doëles plates.

PROBLEME XII.

Trois angles plans qui forment un angle ſolide étant donnés, trouver les angles d'inclinaiſon de ces plans entr'eux.

Ou en termes de l'Art pour la Coupe des Pierres

Trois panneaux étant donnés, trouver les biveaux de leurs aſſemblages.

On peut réſoudre Méchaniquement ce Problême, en joignant les trois angles ou panneaux donnés, enſorte qu'ils forment l'angle ſolide, & en prenant avec la ſauterelle ou récipiangle les angles des plans, obſervant qu'il faut que les branches de la ſauterelle ſoient poſées ſuivant des lignes perpendiculaires à l'interſection des plans ſi elle eſt en ligne droite, ou à ſa tangente en un point où l'on meſure l'angle, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir d'une équerre pour en placer un côté ſur l'interſection, & faire ſervir l'autre à régler la poſition de la branche de la ſauterelle ſur chaque ſurface.

Mais ces opérations ne sont bonnes que pour des Ouvriers ; l'esprit n'y trouve pas la même satisfaction que dans les Géométriques, ni la même sûreté & commodité.

Fig. 305. & 306. Soient donc (*Fig.* 305) les trois plans AB, AC, AD qu'il faut rassembler, en sorte qu'ils fassent un angle solide en A. Il faut trouver l'angle d'inclinaison du plan AD avec le plan AC, & celui du même plan AD avec le plan AB.

On décrira sur une même surface plane les trois angles plans qui doivent former le solide, & on les rangera de maniere qu'ils soient contigus par les côtés AL & AK. Des points E & F pris sur les autres côtés à volonté ou à distance égale du point A, on tirera sur les côtés AL & AK prolongés, s'il le faut, les perpendiculaires EG, FH, qu'on prolongera jusqu'à leur point de rencontre en I, duquel pour centre & de l'intervalle HF pour rayon, on tracera un arc en K, qui coupera en ce point K le côté AH prolongé ; je dis que si par les points I & K on mene la ligne IK, l'angle HIK sera égal à celui de l'inclinaison des plans AC, AD entr'eux.

De même que si du point I pour centre & de l'intervalle GE, on fait un arc de cercle qui coupe AG prolongée en L, & que l'on tire la ligne IL, l'angle LIG sera égal à celui de l'inclinaison mutuelle des plans AB, AD.

DEMONSTRATION.

Supposons que les plans AC AB se meuvent autour des lignes AK, AL comme des couvercles de boëtes sur leurs charnieres, jusqu'à ce que les lignes AF, AE se rassemblent en une seule qui seroit en l'air, mais que nous représentons dans la Figure par une ligne AM, le plan AD restant immobile, les lignes MG, MH, qui seroient perpendiculaires aux intersections AL, AK seroient les mêmes qui étoient auparavant en EG & HF ; soit enfin tirée la ligne MI.

Puisque la ligne LG (*Fig.* 305) ou LG (*Fig.* 306) est perpendiculaire à la ligne GM qui est en l'air, & à GI qui est dans le plan, elle sera perpendiculaire au plan du triangle MGI (par la 4e. du XIe. d'Euc.) & réciproquement on démontrera de la même maniere que le plan du triangle MIH est perpendiculaire au plan AD, d'où il suit (par la 19. du XIe. d'Euc.) que la ligne MI sera perpendiculaire au plan AD, & que le triangle

MIH ſera rectangle en I, quoiqu'il ne le ſoit pas dans la figure, où l'on ne peut le repréſenter exactement, parce que la ligne IM eſt en l'air hors du plan du papier. Donc l'angle MHI eſt celui de l'inclinaiſon des plans AD, AC, auquel l'angle HIK a été fait égal par la conſtruction; car l'on a fait HI perpendiculaire ſur AK pour avoir un angle droit en H, & IK = HF = HM; donc les triangles MIH ſuppoſé en l'air, & IHK ſont égaux en tout, puiſqu'ils ſont rectangles l'un en H l'autre en I, que le côté IH eſt commun aux deux, & que HK eſt égal à IM; donc l'angle MHI eſt égal à l'angle HIK, c'eſt-à-dire, à celui de l'inclinaiſon des plans AD, AC; *ce qu'il falloit démontrer*.

On démontrera de même que l'angle GIL eſt égal à l'angle MGI, qui eſt celui de l'inclinaiſon des plans AB, AD. Les mêmes lettres dont on a marqué les lignes de la Figure 306, font voir l'application de ce Problême à un vouſſoir de voute en berceau biaiſe, répeté à la Fig. 307 avec des ombres, pour en mieux exprimer la figure. *Fig. 306. & 307.*

Il faut remarquer qu'il peut arriver que le point I tombe hors du plan AD, ce qui ne change en rien la démonſtration, comme on peut le voir dans la Fig. 306.

Seconde maniere en réduiſant les plans donnés en triangles pour en former des pyramides.

La maniere précédente de réſoudre le Problême eſt la plus ſimple, car elle ne ſuppoſe que des angles plans donnés, quoique dans la Figure on ait deſſiné des parallelogrammes. On a pû remarquer que nous n'avons fait attention qu'à un de leurs angles. Celle-ci ne ſuppoſe rien de plus que les baſes; mais elle ſe fait un peu différemment ſans le ſecours des triangles rectangles, dont le ſommet de l'angle droit tombe hors des côtés des angles donnés en cherchant les baſes triangulaires des pyramides. C'eſt pourquoi nous repréſentons ici quatre triangles pour les quatre ſurfaces qui l'enveloppent.

Soient les trois triangles ABC, AEC, EDC donnés, qui ſont autant de ſurfaces d'une pyramide triangulaire, leſquelles étant jointes enſemble, forment un angle ſolide en C. Il faut pour trouver les angles que ces plans font entr'eux, commencer par chercher le quatrieme triangle, qui eſt la baſe, ou une *Fig. 308.*

Fig. 308. surface de la pyramide, lequel triangle est formé par les côtés de chacun des trois autres opposés au sommet C, tels sont dans cet exemple BA, AE, ED, desquelles on formera un triangle AEb^d, qu'on rangera ensuite de AEC sur le même plan.

Cette préparation étant faite en façon de développement, on pourra chercher les angles de tels plans qu'on voudra. Supposons premierement qu'on demande celui que les plans AEC, CED font entr'eux. On prendra un point G à volonté sur le côté commun EC, par lequel on lui tirera une perpendiculaire FH, qui coupera AE en F, & ED en H. On portera la distance EH de E en *h* sur le côté Eb^d, puis ayant tiré *h*F, on aura trois lignes *h*F, FG, GH, avec lesquelles on fera un triangle, prenant si l'on veut FG pour base. Du point F pour centre & de l'intervalle F *h* pour rayon on fera un arc vers *x*, & du point G pour centre & GH pour rayon, on en fera un autre aussi vers *x*, qui coupera le précédent au point *x*, l'angle FG *x* sera celui des plans AEC, CED.

Présentement si l'on veut trouver celui des plans AEC, ACB, on prendra sur le côté commun AC un point *i* à volonté, par lequel on menera sur AC la perpendiculaire KL. On portera la distance AK sur AB, en A *k* sur A *b d*, puis on tirera *k*L. On formera un triangle avec les trois lignes K *i*, *i* L, L *k*, l'angle *y i* K, sera celui que l'on cherche.

Il est visible que pour trouver le troisieme angle des plans AEC, AE b^d, il faut tirer sur le côté commun AE une perpendiculaire *m* O, faire EM égal E *m*, & un triangle *m n z* avec les trois lignes *m n*, *n* O, OM l'angle *m n z* sera le proposé.

Application à la pratique.

Quoique les panneaux triangulaires ne soient pas fort communs dans la Coupe des pierres, il s'en trouve cependant dans les naissances des enfourchemens & aux doëles des trompes; mais parce que les angles trop aigus se cassent facilement, on les émousse pour creuser le sommet du cone dans une seule pierre qui rassemble tous les angles des panneaux de doële triangulaire, que l'on réduit par ce moyen à des trapezes; mais ce qu'on ne fait pas en œuvre, on doit le faire dans l'épure, parce qu'on retranche du panneau triangulaire ce que l'on juge à propos à chaque côté de l'angle aigu qu'on veut supprimer.

L'opération en eſt plus ſimple & plus facile que ſi on cherchoit d'abord un trapeze.

Soit, par exemple (*Fig. 309*) un vouſſoir de trompe conique, tel qu'on le voit deſſiné avec des ombres à la Figure 310, dont les panneaux de tête T, de doële plate D, & des lits L & L ſont donnés, on demande les angles qu'ils doivent faire entr'eux, afin qu'on en puiſſe prendre les ouvertures avec la fauſſe équerre, & s'en ſervir pour abbattre la pierre qu'il faut enlever pour y appliquer les panneaux donnés. *Fig. 309.*

On commencera par réduire en triangles toutes les figures des panneaux donnés, qui ſont ici très-différentes; car celui de la doële eſt triangulaire, ceux des lits ſont des trapezes rectilignes, & celui de la tête eſt un trapezoïde mixte.

Ayant arrangé de ſuite les panneaux donnés, enſorte que ceux dont on cherche les biveaux ayent un côté commun, on les diviſera en triangles par des diagonales, comme celui de tête ABDC par les lignes AD, BC, ceux de lit à aCSX, BD*s x*, par les lignes a S, B*s*.

Préſentement ſuppoſons qu'on demande le biveau de lit & de doële. On prendra ſur le côté commun CS un point G à volonté, par lequel on lui tirera la perpendiculaire FH, puis du point S pour centre & de l'intervalle S a pour rayon, on fera un arc a E; & du point D pour centre & de l'intervalle DA pour rayon, on décrira un autre arc AE, qui coupera le précédent au point E, d'où on tirera au point S la ligne ES.

Enſuite du même point S pour centre, & de l'intervalle SF pour rayon, on décrira un arc F*f*; qui coupera la ligne ES au point *f*, duquel comme centre & de l'intervalle FG, on décrira un arc vers *g*, & du point H pour centre & de la longueur HG pour rayon, on en décrira un autre qui coupera le précédent au point *g*, les lignes *gf* & *g*H formeront l'angle du biveau demandé *fg* H.

Suppoſons en ſecond lieu qu'on demande le biveau de doële CDS & de tête CABD, ayant tiré par un point N, pris à volonté ſur le côté commun CD, une perpendiculaire P*n*, on opérera comme nous venons de faire.

Du point D pour centre & DS pour rayon, on décrira un arc SO, & par le point P un autre P*q*, enſuite du point A pour centre & la diagonale a S pour rayon, on décrira un arc *u* O qui coupera le précédent au point O, d'où l'on tirera au point D

Fig. 309. la ligne OD, qui coupera au point q l'arc Pq. Si du point q pour centre & de la longueur PN pour rayon on fait un arc vers y, & que du point n pour centre & de l'intervalle Nn pour rayon on en faſſe un autre qui coupera le précédent au point y, les lignes ny & qy tirées à ce point y, donneront l'ouverture de l'angle des plans de tête & de doële plate.

Enfin ſi l'on demande le biveau de tête & de lit, ayant aſſemblé ces deux ſurfaces ACDB & xsDB ſur le joint de tête BD dans un même plan, on lui tirera par un point m, prs à volonté ſur ce côté commun, la perpendiculaire IK, puis du point B pour centre & la diagonale Bs pour rayon, on fera un arc se, & du point C pour centre, & de l'intervalle CS pour rayon, on en décrira un autre qui coupera le précédent au point e, d'où l'on tirera la ligne eB, puis du point B pour centre & de l'intervalle BK où la ligne IK coupe la diagonale Bs, on fera un arc Kk, qui donnera ſur Be le point k, duquel pour centre & pour rayon mK on décrira un arc vers z, & du point I pour centre & de l'intervalle Im pour rayon on en tracera un autre qui coupera le précédent au point z, où l'on menera les lignes Iz, kz, l'angle Izk ſera le biveau de tête & de lit qu'on avoit demandé.

DÉMONSTRATION.

Il ſemble qu'il y a quelque différence dans les conſtructions que nous venons de propoſer aux Figures 308 & 309 ; mais ſi l'on y fait bien attention on verra qu'elle n'eſt qu'apparente ; ainſi la démonſtration de l'une ſert pour l'autre.

Fig. 308. Si l'on imagine (*Fig.* 308) que le triangle ACE reſtant immobile les deux autres ABC, ECD ſe meuvent au tour de leurs côtés AC & CE, comme ſur des charnieres juſqu'à ce que les points B & D ſe réuniſſent, en ſorte que les lignes CB & CD ſe confondent en une, il ſe formera de ces trois triangles ou plans un angle ſolide en C, & une pyramide triangulaire fermée par un quatrieme triangle, égal à celui qu'on a marqué en AEb^d, qui a ſes trois côtés égaux à chacun des autres triangles, avec leſquels il forme la pyramide. Or il eſt clair que par le mouvement du plan CDE ſur le côté CE, la ligne droite FH ſe plie en G ſans changer de ſituation à l'égard de CE, juſqu'à ce que le plan ACB rencontre celui où elle eſt, lorſqu'ils ſe réu-

niſſent ſur le côté CD, alors le point H tombera ſur le côté E b^d, où les points B & D ſe réuniſſent en b^d, & le point H en h ; c'eſt pourquoi on a fait la longueur E h égale à EH ; ainſi ſuppoſant un plan qui coupe la pyramide perpendiculairement au côté CE par le point G, il coupera le triangle EA b^d par la ligne hF, qui eſt la ſous-tendante de l'angle des plans AEC, DEC repréſentée par la ligne F x ſon égale ; donc l'angle FG x eſt bien trouvé par cette conſtruction ; *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 308.

Préſentement ſi on examine la conſtruction qui donne les biveaux d'un vouſſoir de trompe à la Fig. 309, on reconnoîtra qu'elle eſt dans le fond parfaitement la même que la précédente, quoique avec quelque petit changement; car on y a trois triangles donnés en développement ſur un plan; ſçavoir, a CS portion d'un panneau de lit; DCS panneau de doële plate entiere, & DCA portion du panneau de tête, leſquelles trois ſurfaces doivent, dans l'exécution, former un angle ſolide en C; par conſéquent il faut les plier de maniere que l'intervalle AC a que laiſſe le développement ſoit ſupprimé, joignant le point A au point a, en ſorte que les deux lignes CA C a ſe confondent en une, ce qu'on ne peut faire qu'en faiſant mouvoir les triangles DCA & SC a ſur les côtés CD & CS, le panneau de doële SCD reſtant immobile ; c'eſt pourquoi des points D & S pour centre, on a fait mouvoir les lignes DA & S a, leſquelles ſe rencontrant en E, prennent la ſituation des côtés d'un quatrieme triangle SED, qui ferme la pyramide formée par les trois ſurfaces données ; mais dans les différentes circonſtances, on change la ſituation de ce triangle à l'égard des ſurfaces données. Pour les biveaux de doële & de lit, on le met dans la ſituation SED ; pour ceux de tête & de doële, à la ſituation DOA, & pour les biveaux de tête & de lit à la ſituation C e B, où il faut remarquer qu'il a toujours un côté commun avec une de ces ſurfaces dont on cherche l'angle qu'elle fait avec ſa contigue.

Remarque ſur l'uſage.

On ſçait qu'il n'y a pas de maniere plus générale & plus ſimple pour trouver les angles plans des figures rectilignes, que de les diviſer en triangles, qui ſont les premiers élémens des ſurfaces, puiſqu'on ne peut enfermer un eſpace à moins de trois lignes. Par une ſemblable raiſon il n'y a pas de maniere plus gé-

nérale pour connoître les angles ſolides que font les anges plans dans des ſurfaces qui ſe rençontrent, que de réduire les corps en pyramides triangulaires ; car les tétraedres réguliers ou irréguliers ſont leur derniere réduction, ou ſi l'on veut leurs premiers élémens ; puiſqu'on ne peut enfermer un eſpace de corps à moins de quatre ſurfaces triangulaires, & que toute pyramide de baſe polygone d'un nombre de côtés au-deſſus du triangle, pourra en contenir autant de triangulaires que ſa baſe contiendra de triangles ; ainſi on peut dire que ce Problême eſt général pour trouver les angles des plans de tous les corps imaginables compris par des ſurfaces planes, comme on le verra par les applications que nous en ferons aux traits des voutes dans le quatrieme Livre.

A l'égard des angles ſolides formés par des ſurfaces courbes, qui font entr'elles des angles curvilignes ou mixtes, qu'on ne peut meſurer immédiatement, mais ſeulement par les cordes de leurs arcs ; il eſt clair que la même méthode doit encore avoir lieu, puiſqu'on peut faire paſſer des ſurfaces planes par ces cordes, & inſcrire ou circonſcrire des pyramides de ſurfaces planes triangulaires à des pyramides triangulaires de ſurfaces courbes on mixtes. C'eſt même une néceſſité ; car puiſque nous ne parvenons à la connoiſſance des lignes courbes que par le ſecours des droites, nous ne parvenons auſſi à la formation des ſurfaces courbes que par la médiation des planes.

PROBLEME XIII.

Ayant deux angles rectilignes ASB, DSP *perpendiculaires entr'eux, qui ont leur ſommet* S *commun & un côté de l'un* SP *dans le plan de l'autre* ASB, *trouver l'angle des deux plans qui peuvent paſſer par leurs côtés* AS, DS & BS, DS.

Fig. 311. Soit (*Fig.* 311) le triangle ASB, dans le plan duquel eſt la ligne PS, ſection d'un autre triangle PSD qui lui eſt perpendiculaire, lequel eſt repréſenté ici en racourci de perſpective, parce qu'il eſt en l'air ſur PS ; ayant fait PE perpendiculaire à PS & égale à PD, & tiré SE, on fera EC perpendiculaire ſur ES, qui coupera SP prolongée en C, par C on tirera FG perpendiculaire à SC, qui coupera SA prolongée en F, & SB en G. On portera la longueur CE en C*e* ſur SC prolongée, & l'on

l'on tirera les lignes F *e*, G *e*. L'angle F *e* G est celui que l'on cherche. Pl. 26. Fig. 311.

DEMONSTRATION.

Par la construction, les triangles FC *e*, GC *e* qui sont dans le plan FSG, sont égaux aux deux FCD & GCD qui sont en l'air, dans un plan perpendiculaire au plan CDS (par la 4[e]. du XI[e]. d'EUCL.) à cause que GC est perpendiculaire aux deux CS, CD ou CE, & parce que la ligne GE est perpendiculaire à ES, c'est-à-dire, dans la représentation en l'air, CD à DS, elle l'est à la commune section des plans. Or puisque SC est perpendiculaire à FG, & SD à DC, elle l'est (par la 4[e]. du XI[e]. d'EUCL. & la 11[e]. du XI[e].) à toutes celles qui sont dans le même plan passant au point D; par conséquent à DF & DG, (par la déf. 6 du XI[e]. d'EUCL.) donc l'angle FDG est celui des plans, ou son égal F *e* G; *ce qu'il falloit démontrer*.

Je donnerai ci-après l'usage de ce Problême.

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de trouver l'angle d'un plan incliné avec un vertical, dont on a la projection sur un côté de l'angle horisontal, & la plus grande hauteur de l'incliné, ou l'angle de son intersection avec le vertical, & le côté de l'horisontal, parce que ce cas n'est que la moitié du précédent, je veux dire, une partie. Ainsi au lieu de chercher l'angle des plans FDS, GDS, on ne cherche que celui du plan GDS incliné avec le vertical PDS, auquel cas il est visible que l'angle cherché est l'angle G *e* C.

Soit, par exemple, donnée la ligne OS pour section d'un plan incliné avec l'horison, la ligne OH pour section de ce plan avec un vertical OH *p*, dont la base O *p* est dans le même plan que OS; on demande l'angle de ce plan incliné avec le vertical. Du point H, pris à volonté dans la ligne d'interfection OH, on lui menera une perpendiculaire HC qui coupera l'horisontale O *p*, prolongée en C, par où on tirera sur OC la perpendiculaire CS, qui coupera OS au point S. On portera la longueur CH en C *h*, sur OC prolongée, & l'on tirera S *h*; l'angle S *h* C est celui que l'on cherche, comme il est évident par ce qui vient d'être démontré de la figure précédente, en pre- Fig. 312.

nant le point O de cette figure pour le point S de la précédente, & le point S de celle-ci pour le point G de l'autre.

De la situation des angles des plans, à l'égard de l'horison.

LEMME.

Un angle rectiligne en situation quelconque, est égal à la somme, ou au supplément à deux droits, des angles que ses côtés prolongés font avec une ligne horisontale ou une verticale.

Fig. 313. Soient (*Fig.* 313) deux lignes AD, DK, qui se coupent en D, ou G*e*, *e*V, si l'on tire par E une horisontale EO & une verticale VE, je dis que l'angle ADK est égal à la somme des angles AEK du côté AD prolongé & DKE.

La démonstration se présente à la seule inspection de la figure, où l'on voit que l'angle ADK est extérieur à l'égard du triangle DKE; donc il est égal aux deux intérieurs opposés, de même que G*e* T à l'égard du triangle *e* ET.

Par la même raison, cet angle ADK est égal au supplément à deux droits des angles que ses côtés prolongés font avec l'horison EO; car l'angle ADK est égal à son opposé au sommet ODE, qui est le supplément à deux droits des angles à l'horison EOD OED.

COROLLAIRE I.

D'où il suit que l'angle que fait un joint de tête AD, avec une doële plate OD est le supplément à deux droits des angles que la doële & les joints prolongés au-delà de son sommet font avec une ligne aplomb VT, & que le même angle ADO de doële & de joint de tête, est égal à la somme de deux angles DEO, DOE, que ses côtés prolongés font avec une ligne de niveau.

COROLLAIRE II.

Fig. 314. De-là il suit encore que l'angle d'une doële plate avec l'horison, donne facilement l'angle de cette doële avec un *aplomb*, car il n'y a qu'à lui ajouter l'angle droit *h* OP, on aura un angle obtus DOP égal à son alterne ODV de *l'aplomb* avec la doële, parce que la verticale EV est parallele à OP.

Et par l'inverse si l'on a l'angle ODE de l'aplomb avec la

doële, on aura l'angle OD r = DO n de la doële avec l'horiſon, en y ajoutant l'angle droit.

Remarque ſur l'uſage.

Les angles des doëles avec les *aplombs*, ou avec les lignes de niveau, particulierement ces derniers, facilitent beaucoup les opérations des traits, parce qu'un ſeul plan horiſontal AC eſt équivalent à pluſieurs BG, DF, E*e*, qui lui ſont néceſſairement paralleles. *Fig.* 315.

Il n'en eſt pas de même des plans verticaux, qui peuvent être tournés différemment, les uns au Midi, les autres au Levant, &c. ainſi le plan horiſontal dont la ligne AC eſt le profil, ſert pour régler l'inclinaiſon des joints de tête & des doëles, comme ſes paralleles BG, DF, & y rapporter leurs parties par des *aplomb*, comme LF en *l*C, KG en *d*C, &c. Cette ligne AC ſert auſſi à y tranſporter les angles des doëles des différens vouſſoirs avec l'horiſon, comme EDF, DBG en faiſant *ed* parallele à ED & *db* parallele à DB; mais à cauſe que les plans verticaux *h*C, E*l*, &c. peuvent avoir des directions variables, nous en faiſons moins d'uſage que des horiſontaux, comme on le verra par les pratiques ſuivantes.

Application des propoſitions précèdentes à la conſtruction des voutes, pour trouver les biveaux des ſurfaces des vouſſoirs ſuppoſées planes, comme de la doële plate avec ſes lits, ou de la même doële avec ſes têtes.

Le moyen le plus ſimple de trouver les angles d'inclinaiſon des plans inclinés entr'eux, eſt de les conſidérer comme coupans un plan horiſontal ou un plan vertical, vrai ou ſuppoſé; parce que dans les ouvrages d'Architecture on n'a point de regle de conduite plus ſûre que celle du *plomb*, qui donne la poſition verticale, & celle du *niveau*, qui donne l'horiſontale. Or nous avons démontré au Théorême précédent, qu'un angle en ſituation quelconque étoit égal à la ſomme de ceux que ſes côtés forment avec une ligne horiſontale ou une verticale, ou à leur ſupplément à deux droits, lorſque les deux côtés étoient prolongés par le ſommet; donc par le moyen de la prolongation des côtés on peut parvenir à la connoiſſance des angles des

plans des voussoirs, & les placer dans leur situation naturelle à l'égard de l'horison; en voici des exemples qui fournissent une méthode générale pour les biveaux de doële & de lit, & de doële & de tête.

Fig. 317. Premierement, si une voute est conique, comme une trompe droite dont l'axe est de niveau, il est visible que son plan BSA peut être pris pour un horisontal, dans lequel il y a un point S qui est le sommet du cone, où toutes les surfaces de la trompe tant doëles que lits, doivent passer.

Secondement, que si la base B*h*A est circulaire, tous les plans des lits qui passent par les joints de tête 5 1, 6 2, se coupent aussi au point C, de même qu'au point S; ainsi leur intersection commune est dans l'axe, qui est l'horisontale CS.

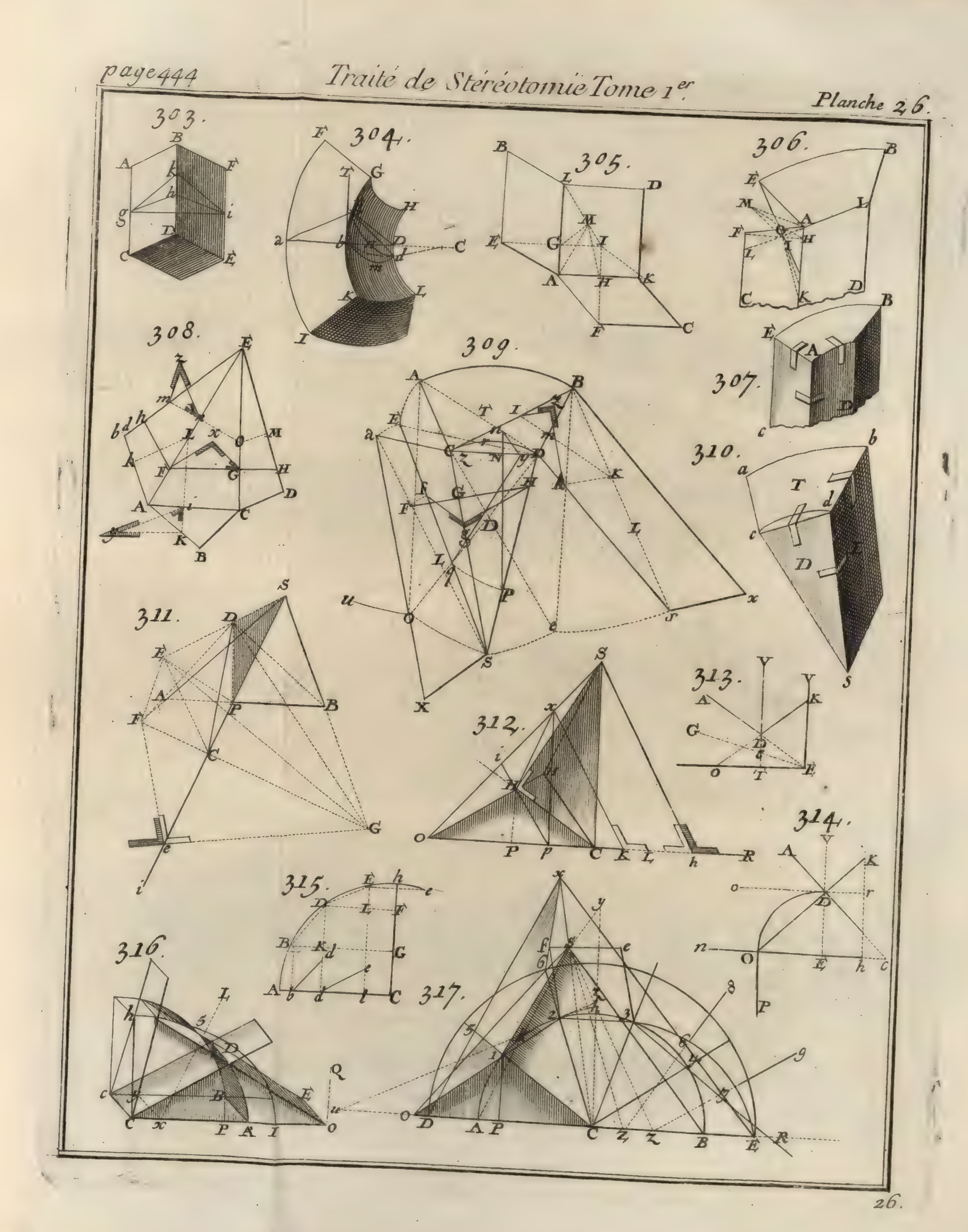
Troisiemement, que si la corde de la doële 2 1 est prolongée jusqu'à la rencontre de l'horisontale BA en O, la doële plate qui passera par cette corde & par le point S, coupera le plan horisontal suivant une ligne SO.

Comme il peut arriver que la corde 2 1 étant peu inclinée à l'horisontale BA, donneroit un point O hors du plan du dessein, ce qui seroit incommode; telle seroit, par exemple, 2 *k* plus encore *h* 2, si le voussoir étoit étroit près de la clef; on peut, pour plus de commodité, au lieu de la section horisontale, chercher celle qui se feroit avec un plan vertical C*h*, sans rien changer au fond de la construction; puisqu'au lieu de l'angle 2*u*C on auroit seulement son complement 2*z*C.

Enfin si la corde de la doële devient horisontale, comme celle de la clef 2 3, puisqu'elle doit passer comme toutes les autres par le sommet S, il est clair qu'en tirant par ce point S une ligne *fe* parallele à BA, on aura la section de cette doële avec l'horison.

J'ai dit que l'axe étoit la section commune de tous les lits avec l'horison, j'entends lorsque le ceintre est circulaire; mais s'il étoit elliptique, & les joints de tête 8 6 : 9 7 perpendiculaires à cette courbe 6 7 E, leurs sections ne seroient plus réunies, parce que les joints de tête prolongés couperoient l'horisontale BA aux points Z *z*, & comme les lits passeroient cependant encore par le point S, les sections de lits avec l'horison seroient les lignes *z* S, ZS.

Présentement si l'on cherche les sections des doëles plates d'un berceau avec l'horison; il est visible que si ce berceau est


303.
304.
305.
306.
307.
308.
309.
310.
311.
312.
313.
314.
315.
316.
317.

droit sur sa face, ce seront des perpendiculaires menées à la ligne de face, comme (*Fig.* 316) la ligne OQ sur OC; mais si les berceaux sont biais, la section de chaque doële avec l'horison sera parallele au piédroit, telle est OE à l'égard du piédroit AB. *Fig. 316.*

Quant aux sections des lits avec l'horison, il en sera comme des coniques, si le ceintre est circulaire elles se réuniront à l'axe C*c*; & si le ceintre est elliptique, ce seront des paralleles à l'axe, comme *xy* provenant du joint L 5 prolongé en *x* pour l'arc elliptique *h* 5 I.

A l'égard des doëles plates des clefs, il est visible qu'elles ne peuvent couper l'horison, puisqu'elles lui sont paralleles.

Il nous reste à trouver les sections des doëles plates des berceaux en descente avec l'horison; on peut le faire de deux manieres.

Premierement par le profil; soit, par exemple, le plan horisontal de la descente, ou seulement sa moitié ACDB, son profil CHKR, sur lequel le point F marque la hauteur du joint I de la doële plate I 2. Ayant tiré FE qui coupera l'horisontale OC prolongée en X, on portera la distance CX sur la projection horisontale de ce joint PI, de P en S, & l'on menera par le point O la ligne OS, qui est la section de cette doële plate avec l'horison. *Pl. 27. Fig. 318.*

Secondement, on peut faire une supposition que le berceau, au lieu d'être incliné, soit horisontal, que la ligne RC*q* est une horisontale, à l'égard de laquelle la face HC est inclinée en surplomb. Alors il ne s'agit que de changer le ceintre, par exemple le circulaire, dont le rayon est CH en un elliptique surbaissé HV *u* T, dont le petit demi-axe est *q* H, & le grand axe le double de CH, ce qui est assez clair après ce que nous avons dit des sections des cylindres, mais que nous expliquerons plus au long dans le quatrieme Livre, où nous parlerons des descentes, Tome II, Chap. V. Voici la pratique pour tous les cas.

PROBLEME XIV.

Trouver les biveaux de toutes sortes de voutes sans former le ceintre de l'arc-droit.

Premierement ceux de lit & de doële.

La projection horisontale du joint de lit & l'élévation de la face étant donnée.

Premier cas pour les voutes en berceau de niveau.

Fig. 319. Soit le parallelogramme ABED, le plan horisontal d'un berceau biais, dont le ceintre de face est le demi-cercle AHB, & la ligne PN la projection du joint de lit passant par le point 2 de ce ceintre; on cherche l'angle des plans de la doële plate, qui passe par la corde 1 2, & par le joint de tête 2 6.

On prolongera la corde 2 1, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'horisontale AB au point O, par où on menera OS parallele à PN, ou ce qui est la même chose à l'axe CM; ensuite par le point P, projection du point 2, on élevera sur PN la perpendiculaire PR, qui coupera OS en R; & on la prolongera vers Q jusqu'à ce qu'elle coupe l'axe MC prolongé en Q. On prolongera aussi NP pour porter la hauteur de la retombée P 2 en P 2^x. On tirera du point R la ligne R 2^x, & du point Q la ligne Q $2^x q$, l'angle R $2^x q$ sera celui du biveau que l'on cherche.

Second cas pour les berceaux en descente.

Fig. 318. Nous avons dit qu'on peut les considérer comme de niveau, supposant la ligne *q*R horisontale, au lieu de la ligne ON; cependant on peut encore les considérer comme inclinés à l'horison.

Soit le parallelogramme ACDB la moitié du plan horisontal d'une descente droite, dont CHKR est le profil, AI 2 H la moitié de l'élévation, P *l* la projection horisontale du joint de lit, qui passe par le joint de tête 2 6, & *f*L la projection verticale ou son profil qui coupe l'horisontale ON au point *x*. On portera la distance C*x* sur la projection du joint de lit de P en

S; puis ayant prolongé la corde de l'arc de tête 2 I jusqu'à ce qu'elle rencontre au point O, l'horisontale CA prolongée, on tirera par le point S l'indéfinie SOY, qui sera la section du plan de la doële plate 2 I prolongée, & du plan de l'horison passant par la naissance du ceintre de face en AC. Fig. 318.

Ensuite on portera la hauteur de la retombée P 2 en P 2 *g*, d'où l'on tirera au point S la ligne 2 *g* S, à laquelle on fera la perpendiculaire 2 *g* Q qui coupera SP prolongée en Q. Sur la même SP prolongée, & par ce point Q on fera une perpendiculaire Y*y*, qui coupera SO en Y, & l'axe DC en *y*. On portera la longueur 2 Q *g* de Q en G par où on tirera les lignes YG & *y* GI, l'angle YGI est celui du biveau que l'on cherche.

Secondement pour les voutes coniques.

La construction sera tout-à-fait la même que la précédente. Fig. 320.

Soit le triangle ASB, le plan horisontal d'une trompe, dont le ceintre de face est l'arc A *h* B, & la ligne PS la projection horisontale du joint de lit passant par le point 2 & l'axe CS. On prolongera la corde 2 1 du 2[e]. voussoir, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'horisontale BA prolongée en O, & l'on tirera OS, qui sera la section de la doële plate prolongée avec le plan horisontal qui passera par AB, & le sommet S de la trompe qu'on suppose dans le même.

On élevera ensuite au point P, projection du point 2, la perpendiculaire PX, égale à P 2, sur la ligne PS; & ayant tiré XS, on fera au point X la perpendiculaire XQ sur XS, qui coupera SP prolongée en Q, & par ce point Q ayant fait sur la même SQ la perpendiculaire *o* R qui coupera SO en *o*, & l'axe SC en R, on portera la longueur QX en Q *x*, & des points *o* & R on tirera *o x* & R *x* V, l'angle *o x* V sera celui du biveau que l'on cherche, qui est celui du plan de la doële plate passant par 2 1 du second voussoir, avec celui du second lit passant par le joint de tête 2 5 de l'élévation.

Si cette voute conique étoit en descente par son axe, on trouveroit, comme aux berceaux en descente, un autre point S, par le moyen du profil, qui ne seroit pas alors le sommet du cone.

Application aux voutes sphériques & sphéroïdes.

Suivant ce que nous avons dit en parlant du développe-

ment, on peut réduire les spheres & les sphéroïdes en plusieurs zones de cones tronqués, inscrits dans celles de la sphere, d'où il suit que l'on peut trouver les biveaux de ces parties coniques de la même maniere que pour les cones entiers, les réduisant par les doëles plates en pyramides tronquées; & par conséquent que cette méthode convient aussi-bien aux voutes sphériques & sphéroïdes, qu'aux trompes & autres voutes coniques.

Troisiemement, pour les angles saillans ou rentrans faits par la rencontre de deux berceaux.

Premier cas des doëles plates égales ou inégales, qui ont leurs naissances de niveau entr'elles, & se coupent en arrête saillante, ou en angle rentrant comme aux arcs de cloître.

Fig. 321. Soit l'arc EAB le ceintre de l'arrête d'enfourchement, & la ligne EC sa projection horisontale. Soit AB la corde de l'arrête des seconds voussoirs, dont *m* M ou son égale a *b* est la projection, & les lignes a D, a *d* celles de la section du plan horisontal, qu'on suppose passer par le point A, comme au profil AG, lesquelles font l'angle horisontal D a *d* parallele à celui des murs de piédroits de la voute. Il est clair que cet angle peut être pris pour la base d'une pyramide tout-à-fait semblable à celles des exemples précédens de la Figure 308, Planc. 26, puisqu'elle est formée par les plans de doëles & de lit, par conséquent on peut en trouver les angles de la même maniere; & comme l'application en est si facile qu'on peut la faire de soi-même, je vais, pour un peu de variété, donner une autre construction, qui est cependant la même renversée.

Par le point B sommet de l'arrête, on tirera l'horisontale PBO parallele à EC, sur laquelle par le point A on menera la perpendiculaire AP qui coupera HO en P, par où on tirera sur la corde AB la perpendiculaire PQ, dont on portera la longueur du point *b* de la projection a *b* de la corde AB en *q*, pour tirer de ce point en D & *d* les lignes *q* D, *q d* qui comprendront l'angle D *q d* du biveau que l'on cherche.

S'il s'étoit agi des premiers voussoirs, dont la corde de l'arrête est la ligne EA, on auroit mené par le point A la ligne *h* G, puis par le point E la perpendiculaire E *p*, & par le point *p* la ligne *p x* perpendiculaire sur EA, laquelle différe peu en longueur

longueur de la ligne *p* A ; ce qui fait voir que l'angle *m x m* différe peu à la naiſſance de l'angle *m e m*. *Fig. 321.*

On peut prendre ſur *h* G tout autre point que *p* ſi l'on veut, par exemple *h*; alors il faudroit abaiſſer la perpendiculaire *h i* ſur a *e* prolongée, & mener par le point *i* des paralleles *i* A, *i* K aux lignes a D, a *d*, qui couperont la perpendiculaire *m m* prolongée aux points A & K; puis on portera *h* F qui eſt la perpendiculaire ſur la corde EA de a en *y*, l'angle K*y* A ſera celui que l'on cherche.

Pour montrer que cette conſtruction revient à la même fin que les précédentes, par la méthode générale dont elle n'eſt qu'une modification, j'en ai mis la figure au-deſſous, répetant les projections du même profil EAB *h*; ſçavoir *n* N = a *b*, l'angle V *n u* = D *a d*. On élevera au point N la perpendiculaire NS égale à la hauteur BG de la retombée du profil : on menera *n* S, & ST perpendiculaire à *n* S, qui coupera *n x* au point T, par où on menera la perpendiculaire *u* V qui coupera les ſections de la doële avec l'horiſon aux points *u*, V. On portera la longueur TS en TY, ou T*y*; du point Y ou *y*, on tirera les lignes Y *u*, YV ou *y u*, *y* V, l'angle *u* Y V ou *u y* V eſt celui du biveau que l'on cherche, par le Problême précédent.

Quatriemement, pour les angles ſaillans ou rentrans formés par des doëles plates dont les naiſſances ne ſont pas de niveau mais l'une de niveau & l'autre rampante ; tel eſt l'enfourchement d'un berceau de deſcente qui en rencontre un autre de niveau.

Pour réſoudre ce cas il faut chercher la ſection de la doële rampante avec le plan horiſontal, qui paſſe par la naiſſance horiſontale de l'autre.

Soit (*Fig.* 323) le parallelogramme ACDB la projection horiſontale de deux portions de doëles plates ACD, ADB, qui ſe coupent ſuivant une ligne AD, en ſorte cependant que la naiſſance de l'une AC eſt de niveau, & la naiſſance AB de l'autre en deſcente ſuivant un angle donné BAG. *Fig. 323.*

On élevera ſur la projection de l'arrête AD la perpendiculaire DH égale à la hauteur de la retombée, qu'on ſuppoſe connue par le profil de cette arrête, & l'on tirera AH qui repré-

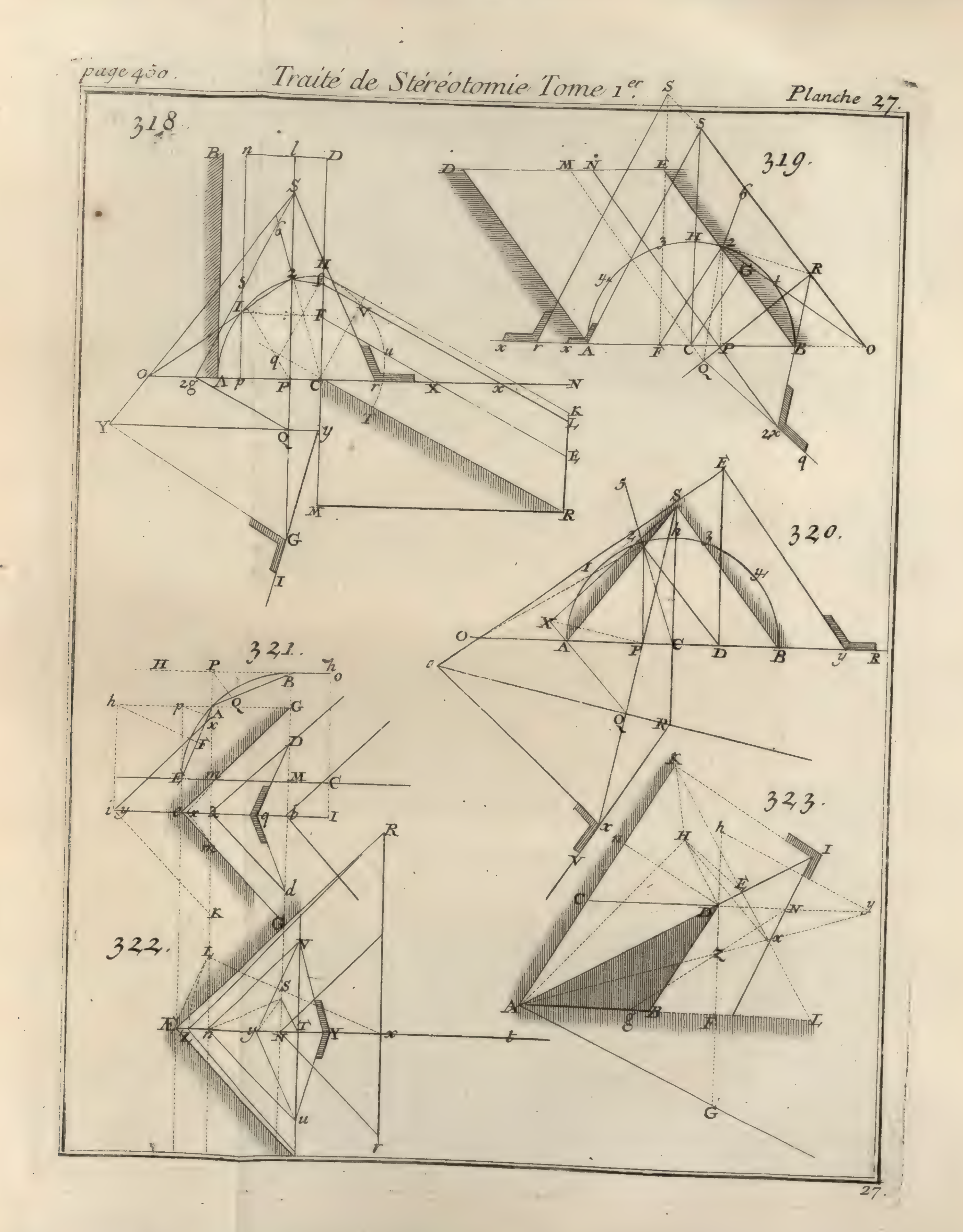
Fig. 323. ſentera l'inclinaiſon de l'arrête. Sur CD prolongée on portera la même hauteur DH en DN; du même point D on menera une perpendiculaire ſur AB prolongée qui la coupera en F, & le profil de deſcente AG en G. On portera FG ſur FA en F*g*; enſuite par les points trouvés *g* & N, on tirera la droite *g* N qui coupera DG au point *z*, la ligne menée du point A par *z* ſera la ſection de la doële en deſcente avec l'horiſon qui paſſe par les points A & C: il ne s'agit plus préſentement que de conſtruire le Problême comme à l'ordinaire.

On peut encore trouver cette ſection d'une autre maniere, en portant la hauteur de la retombée DH perpendiculairement ſur CD en D*h*, & faiſant l'angle D*hy* égal au complément de celui de la deſcente BAG, ou ce qui eſt la même choſe, tirant *hy* parallele à AG juſqu'à ce qu'elle rencontre CD prolongée en *y*; la ligne A*y* ſera la même ſection de la doële en deſcente avec l'horiſon qui paſſe par la naiſſance de celle de niveau; ainſi on pourra conſtruire le Problême comme les précédens.

On fera HE perpendiculaire ſur AH, qui coupera AD prolongée en E, par où on tirera la perpendiculaire KL, qui coupera les ſections de l'horiſon AC, A*z*, prolongées, en K & en *x*. On portera la longueur EH en EI ſur AD prolongée, on tirera les lignes KI & I*x*, l'angle KI*x* eſt celui du biveau que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Toutes ces conſtructions ſe rapportent ſi facilement au Problême précédent, qu'il n'eſt pas néceſſaire de les démontrer. Cette derniere ſeulement demande quelque explication. Si l'on ſuppoſe la ligne AG dans un plan vertical ſous AF, il eſt clair que le point G tombera ſous le point F. Si l'on ſuppoſe auſſi DH, ou ſon égale DN élevée verticalement ſur l'horiſontal ADF, le point N tombera ſur le point D au-deſſus de l'horiſon. Il eſt donc viſible que ſi de ce point N on tire une ligne au point *g* poſé à angle droit avec la ligne horiſontale DF, & à diſtance du point F égale à FG, on aura ſur le plan horiſontal l'expreſſion des deux triangles ſemblables DN*z* au-deſſus de l'horiſon & F*g z* au-deſſous, qui les diviſe en *z*. Donc la ligne A*z* eſt la ſection de l'horiſon; car ſi on les fait mouvoir ſur FD comme ſur une charniere, juſqu'à ce qu'elles ſoient en ſituation verticale, la ligne N*g* exprimera la pente du plan ADB, la-


318.
319.
320.
321.
322.
323.

quelle se plonge sous l'horison qui passe par AC au point *z*; *ce qu'il falloit trouver.* *Fig.323.*

La démonstration de la seconde maniere est encore plus simple; car puisque *hy* est parallele à AG (par la construction) les triangles rectangles AFG, *yh*D sont semblables, & à cause des paralleles AF, D*y* semblablement posées à l'égard du plan incliné ADB, quoique tournés en sens contraire, on aura FG : D*h* : : AF : D*y*, c'est-à-dire, que l'abaissement sous l'horison est à la hauteur au-dessus, comme le commencement de la descente au-dessous est au commencement de la montée au-dessus, ce qu'exprime la ligne tirée d'un point A de l'horison à l'autre *y*, *qu'il falloit trouver.*





EXPLICATION DES TERMES

Les plus usités pour la Coupe des pierres,

Rangés par ordre Alphabétique.

A.

A*Batue*, c'est la distance horisontale de la naissance d'un arc à la perpendiculaire, qui tombe d'une division de cet arc ou de son extrêmité supérieure sur son diametre horisontal. Ce terme n'est plus guere en usage; on se sert de celui de *retombée*. Voyez Retombée.

Amaigrir. Voyez Démaigrir.

Annulaires, j'appelle ainsi les voutes dont la figure imite les anneaux en tout ou en partie, telles sont les voutes *sur le noyau*. Voyez Noyau.

Anse de panier. Voyez Berceau & ceintre.

Appareilleur, c'est le conducteur d'un bâtiment qui préside à l'appareil, c'est-à-dire aux mesures, à l'arrangement & à l'assortiment des pierres, qui les trace de la grandeur & figure dont elles doivent être, pour diriger les Tailleurs de pierre qui les taillent; c'est pourquoi il doit sçavoir la coupe des pierres, pour exécuter les desseins des Architectes dans les bâtimens civils, & des Ingénieurs dans les Fortifications.

Arc est une portion de ligne courbe à laquelle on donne différens noms suivant sa figure & ses usages.

Arc droit est celui dont la corde est perpendiculaire au joint de lit d'une voute lorsque ce joint est droit, ou à sa tangente au point de rencontre lorsqu'il est courbe; c'est ainsi que l'entend le pere DERAND, qui confond l'arc droit avec le biveau; mais pour mieux expliquer ce mot:

L'Arc droit proprement dit est la section d'une voute perpendiculairement à son axe & à ses côtés, ou aux tangentes à ses côtés.

D'où il suit 1°. qu'il n'y a point d'arc droit proprement dit aux voutes coniques, parce qu'un plan ne peut être perpendiculaire à leurs axes & à leurs côtés qui sont convergens.

2°. Qu'il y a des arcs droits aux voutes sphériques, parce que leurs tangentes sont paralleles à leurs diametres.

3°. Qu'il y a aussi des arcs droits dans les annulaires & dans les vis où les tangentes sont perpendiculaires à leurs diametres, parce que la tangente du côté est parallele à celle de leur axe courbe dans la section perpendiculaire à cette tangente.

Arc-rampant, c'est une ligne courbe, dont les deux extrêmités prises aux appuis de leurs naissances, qu'on appelle *impostes*, ne sont pas de niveau, & dont les diametres conjugués ne sont pas à l'équerre, c'est-à-dire, dont l'aplomb de la clef est oblique à la ligne de rampe des impostes; telles sont les arcades qu'on fait sous les rampes des escaliers & des terrasses en descente; ce qui fait que ces sortes d'arcs ne peuvent jamais être d'une seule portion de cercle, mais de quelqu'autre section conique ou de spirale.

Arc de cloitre, on appelle ainsi une voute composée de deux, trois, quatre, ou plusieurs portions de berceaux, qui se rencontrent en angle rentrant dans leur concavité, en sorte que leurs côtés forment le contour de la voute en polygone. Tels sont, par exemple, les petites voutes ou chapiteaux des guerites à pans. Si les berceaux cylindriques se rencontroient au contraire en angle rentrant sur leur convéxité, ou ce qui est la même, chose en angle saillant sur la concavité, la voute changeroit de nom, elle s'appelleroit *voute d'arrête*.

Arc doubleau est un arcade en saillie sur la doële d'une voute qu'elle traverse à angle droit, de sorte qu'elle lui fait en cet endroit une espece de *doublure*, soit pour la renforcer, soit pour cacher quelque arrête de rencontre, comme aux voutes Gothiques, ou pour faire une liaison d'un pilastre ou d'une perche à son opposée.

Lorsque ces arcs ne sont pas perpendiculaires à la direction de la voute, mais en diagonale, on les appelle *Ogives* ou *Augives*; on n'en voit de cette espece que dans l'Architecture Gothique.

Arcade, eſt une voute de peu de profondeur en portion de berceau.

Arche eſt à peu près la même choſe : mais ce terme ſemble conſacré ſeulement aux ponts.

Arceau eſt une petite arche ſur un ruiſſeau ou ſur un ravin.

Architecture, dans le mauvais jargon des Ouvriers, qui a paſſé depuis peu aux Architectes, ſignifie ſouvent une moulure. Ainſi on lit dans le devis imprimé pour la conſtruction des bâtimens civils du Roi, à Paris, *une corniche avec ſes Architectures*, pour dire avec ſes moulures.

Arrête, c'eſt l'angle ſaillant que font deux ſurfaces droites ou courbes d'une pierre quelconque ; lorſque les ſurfaces concaves d'une voute ſe rencontrent en angle ſaillant, on l'appelle *voute d'arrête.*

Arriere-vouſſure, c'eſt une ſorte de petite voute, dont le nom exprime la poſition, parce qu'elle ne ſe met que derriere l'ouverture d'une baye de porte ou de fenêtre, dans l'épaiſſeur du mur, au-dedans de la feuillure du tableau des piédroits. Son uſage eſt de former une fermeture en platebande, ou en plein ceintre, ou ſeulement bombée.

Celles qui ſont en platebande à la feuillure du linteau & en demi-cercle par derriere, s'appellent *Arriere-vouſſure de Saint-Antoine.*

Celles au contraire qui ſont en plein ceintre à la feuillure & en plate-bande par derriere, s'appellent *Arriere-vouſſure de Montpellier.*

Lorſque dans la premiere eſpece l'arc intérieur eſt beaucoup moindre que le demi-cercle, l'arriere-vouſſure s'appelle *reglée & bombée.*

Dans le même cas pour la ſeconde eſpece, il n'y a pas de nom particulier, on peut l'appeller *Bombée en avant & reglée en arriere*, par l'inverſe de la précédente.

Lorſque l'arriere vouſſure eſt en plein ceintre ſur le devant, & ſeulement bombée en arriere, on l'appelle *arriere vouſſure de Marſeille.*

B.

Balevre du Latin *Bis labra*, qui a deux levres, eſt l'excédent d'une arrête ſur celle de la pierre contigue ; c'eſt auſſi l'éclat d'une arrête qui s'eſt caſſée, lorſque les joints ſont trop ſerrés.

Bandeau, ornement tout uni en ſaillie, comme une bande plate ſur le nud d'un mur, autour d'une baye de porte ou de fenêtre. Si ce bandeau eſt orné de moulures, il s'appelle *Chambranle.*

Bander une arcade ou une platebande, c'eſt arranger les vouſſoirs ou les claveaux ſur leurs ceintres & les ſerrer par des coins.

Berceau, par analogie au couvert qu'on a coutume de mettre ſur les berceaux des enfans, eſt une voute cylindrique quelconque, dont la courbure peut être de différente eſpece; lorſqu'elle eſt circulaire, enſorte que ſon contour ſoit un demi-cercle complet, on l'apelle *plein ceintre.*

Si, ſuppoſant la largeur égale, la hauteur eſt moindre, on l'appelle *en anſe de panier* ou *ſurbaiſſé.*

Si la hauteur excéde le demi-cercle, on l'appelle *Surhauſſé* ou *Surmonté.*

Si ſes naiſſances ne ſont pas de niveau, il s'appelle *rampant.*

Un berceau à l'égard de la direction de ſes faces s'appelle *droit*, lorſque la face eſt perpendiculaire à la direction, & *biais* lorſqu'elle eſt oblique.

Beveau ou *Bauveau* ou *Buveau*; ce dernier eſt le terme du P. DERAND, les Ouvriers qui diſent Biviau ou *Biveau*, conſervent mieux l'étimologie du mot *Bivium*, chemin fourchu. En effet, c'eſt le modele de l'ouverture d'un angle quelconque, rectiligne, curviligne, ou le plus ſouvent mixte, pour former l'angle d'inclinaiſon de deux ſurfaces qui ſe rencontrent. Lorſqu'elles ſont planes, on ſe ſert pour Biveau d'une Sauterelle ou d'une fauſſe équerre à branches mobiles; lorſqu'une des deux ſurfaces eſt courbe ou toutes les deux, le Biveau eſt un inſtrument de bois fait exprès en forme d'équerre ſtable, je veux dire, dont les branches ne s'ouvrent ni ne ſe ferment.

Nous avons dit ci-devant que le P. DERAND confond ſouvent le *Biveau* avec l'*arc droit.*

Biais, c'eſt l'obliquité d'une face à l'égard de la direction d'une voute, ou d'un jambage à l'égard d'un paſſage.

Biais paſſé, on appelle ainſi une voute en berceau biaiſe par-devant & par derriere, dont les joints de lit ne ſont pas paralleles aux côtés du paſſage, comme dans les voutes ordinaires biaiſes, mais dont la direction tend à des diviſions de

voussoirs inégaux, en situation inverse du devant au-derriere, c'est-à-dire, de l'entrée à la sortie, de sorte que les joints de lit à la doële ne doivent pas être droits, comme les font les Auteurs qui ont Traité de la Coupe des pierres.

Bombé ou *Bombement* se dit d'un arc peu élevé au-dessus de sa corde, ou du moins beaucoup moindre que le demi-cercle.

Lorsqu'au lieu de s'élever, l'arc s'abaisse au-dessous de sa corde, on l'appelle *bombé en contre-bas*, comme il arrive aux platebandes mal faites.

Bornoyer ou *borneier*, c'est regarder avec un œil en fermant l'autre, comme si l'on étoit borgne, pour mieux distinguer les défauts d'alignement ou la différence de direction des côtés d'une pierre, & voir si une surface est plane, ou de combien elle est gauche.

Branches d'Ogives; ce sont les arcs des nervures des voutes Gothiques, qui font saillie sur le nœud de ces voutes dans l'intervalle des croisées entre les piliers.

Branches de voussoir. Voyez Enfourchement.

Branches de biveau ou de sauterelle sont les côtés des instrumens, le P. DERAND les appelle les *doigts*, D'AVILER, *les bras*.

Bras de biveau. Voyez Doigts.

Buter, c'est appuyer les *Reins* d'une voute par quelque contrefort ou arc-boutant.

C.

Calibre, dans la coupe des bois, signifie un modele fait de planche, contourné suivant une ligne courbe qui doit déterminer le contour d'une surface qu'on se propose de faire. Dans les ouvrages de plâtre c'est un profil de corniche, fait avec une planche de cuivre ou de bois pour diriger les moulures en le trainant en ligne droite perpendiculairement à la direction de la corniche, cet instrument est une espece de cerche.

Calotte est une portion de voute sphérique ou sphéroïde qu'on fait au milieu des voutes & plafonds pour les élever en cet endroit.

Canoniere est un vieux mot qui signifioit ce que nous appellons aujourd'hui *embrasure* à mettre du canon, c'est une voute conique. Voyez voute en canoniere.

Carton

Carton, feuille de carton contournée ſuivant un profil, qui peut être fait ſur une autre matiere, comme du fer-blanc, ſans changer de nom.

Ceintre ou *cintre*, l'un & l'autre eſt uſité & vient de la même étimologie *cinctus*, de *cingere* environner, ou de *ceindre* & ceinture. Ce mot a deux ſignifications, l'une pour la charpente, l'autre pour le contour de la voute qui a été formée ſur la charpente. Dans la charpenterie il ſignifie ces aſſemblages de pieces de bois qui ſoutiennent les ais & doſſes ſur leſquels on conſtruit une voute avec des briques ou du moilon, ou des pierres de taille, juſqu'à ce qu'étant fermée elle puiſſe ſe ſoutenir ſans ce ſecours.

Si le plancher qui ſert de forme à la voute eſt plat, la Charpenterie qui le ſoutient ne s'appelle plus ceintre, mais *étayement.*

Dans le langage de la Coupe des pierres, il ſignifie le contour arrondi de la partie intérieure d'une voute pris en un endroit déterminé : ou perpendiculairement à ſa direction, alors il s'appelle *l'arc droit*, ou obliquement à l'arrête d'une face biaiſe, alors il s'appelle *ceintre de face*, ou *arc de face.*

Celui de ces deux ceintres qu'on a le premier en vûe pour tracer la voute, s'appelle *ceintre primitif.*

Celui qui réſulte de cette premiere déterminaiſon s'appelle *cintre ſecondaire.*

Par la nature des ſections cylindriques dans les voutes biaiſes, ces deux ceintres ſont de même hauteur, mais d'inégale largeur & contour ; ſi l'un eſt circulaire l'autre eſt elliptique, & ſi l'un & l'autre ſont elliptiques, l'un eſt plus allongé que l'autre, & leurs diviſions en vouſſoirs ſont proportionnelles, celles du ſecondaire ſont aſſujetties à celles du primitif.

Les ceintres conſidérés dans la figure de leur contour ont auſſi différens noms, celui qui eſt en demi-cercle complet, s'appelle *plein ceintre.* Celui qui étant ſuppoſé de largeur égale, ne s'éleve pas à même hauteur que le demi-cercle, s'appelle *en anſe de panier*, ou *ſurbaiſſé.* Celui qui dans la même ſuppoſition s'éleve au-deſſus du demi-cercle, s'appelle *ſurhauſſé*, ou *ſurmonté.*

Celui qui eſt d'un arc de cercle beaucoup moindre que ſa moitié, comme du quart ou du ſixieme, s'appelle *bombé.*

Cerce ou *Cherche*, l'un & l'autre eſt uſité, quelques-uns, parmi leſquels eſt Felibien, diſent *cerche*; je ſuis leur exemple par

plusieurs raisons. 1°. Pour allier les deux premiers mots les plus usités. 2°. Pour éviter la dureté de la prononciation & l'équivoque de *cherche*. 3°. Pour conserver dans l'écriture l'étimologie de ce mot, suivant le sentiment de d'Aviler, qui le fait venir de l'Italien *Cerchio*. Je dis dans l'écriture, parce que dans la prononciation *C* se prononce comme *tch* en François, & *ch* comme un *K*; il faudroit dire *tcherque*; quoiqu'il en soit, c'est le modele d'un contour courbe découpé sur une planche de volice mince, ou autre matiere, pour diriger le relief ou la cavité d'une pierre qu'on creuse, en le présentant par dehors pour voir ce qu'il faut enlever; d'où il suit que son contour doit être le contraire de celui de la pierre, sçavoir convexe pour une pierre concave, & concave pour une pierre convexe. Les *Calibres* dont nous avons parlé, sont souvent des especes de *Cerches*.

Claveau du Latin *Clavis*, une clef, est un voussoir à doële plate, qu'on appelle ainsi parce qu'il se met de niveau, comme les milieux des clefs des autres voutes s'il s'agit d'un plafond, ou en pente de surplomb, lorsqu'il s'agit d'une platebande rampante, ou d'une trompe plate.

Clausoir du Latin *claudere*, fermer, est une pierre quelconque, qui acheve une voute ou un mur en fermant & bouchant le dernier espace qui restoit vuide.

Clef par analogie à son usage de fermer une voute, est le dernier rang de voussoirs que l'on pose au sommet de la voute pour appuyer ceux des côtés & la bander; lorsque la clef excéde le parement, on l'appelle *clef saillante*; lorsqu'elle excéde la hauteur d'un bandeau, on l'appelle *clef passante*; lorsque la pierre qui est à l'intersection des nervures d'une voute Gothique s'abaisse au-dessous en façon de cul-de-lampe, on l'appelle *clef pendante*. Il en est des bizarres qu'on appelle *Guimberges*.

Collet, c'est la partie la plus étroite d'une marche tournante du côté du noyau, s'il y en a un, ou sur le vuide du milieu, s'il n'y en a point.

Commissure en vieux François, usité par le P. Derand, du Latin *Commissura*, signifie un joint: il n'est plus en usage.

Compas d'appareilleur, est un instrument de fer ou de cuivre, fait à-peu-près comme un compas ordinaire, excepté que ses branches sont droites & plates comme celles du récipiangle

appellé *fausse équerre*, pour prendre l'ouverture des angles rectilignes & les transporter sur la pierre ; il a de plus qu'un simple récipiangle des pointes destinées à prendre des mesures de longueur & tracer des arcs comme les autres compas.

Compas à verge est un instrument pour tracer de grands arcs de cercle qu'on ne peut faire avec les compas d'Appareilleurs. Il consiste en une longue regle qu'on fait passer au travers de deux morceaux de bois ou de fer, qu'on appelle *poupées*, qui peuvent s'approcher ou s'éloigner comme l'on veut, & être fixées par le moyen des vis. Chacune de ces poupées est terminée à un bout par une pointe de fer qui sert l'une à fixer au centre, l'autre à tracer l'arc ; cet instrument vaut mieux qu'un cordeau, parce qu'il ne peut ni se rallonger ni se racourcir dès qu'il est une fois reglé à la longueur.

Compas à ellipse ou *à ovale*, autre instrument composé du compas à verge & de deux poupées de plus, qu'on fait mouvoir dans une coulisse pratiquée dans une figure de croix pour une ellipse entiere, ou de T pour tracer une demi-ellipse sur des arcs donnés. Voyez sa description pag. 165, & pl. 10. Fig. 117.

Contre-clef, c'est un voussoir joignant la clef à droite ou à gauche.

Coquille, par analogie à certaines coquilles de mer, est une voute en quart de sphere ouverte, dont le pole est au milieu du fond, sur l'imposte duquel s'élevent des rangs de voussoirs qui s'élargissent comme les côtés des coquilles jusqu'à la face, elle sert à couvrir les Niches.

On appelle aussi *Coquille* le parement inférieur des marches d'un escalier tournant délardées sans ressaut, ou avec des petits ressauts. C'est une surface *hélicoïde*.

Coude. Voyez *Jarret*.

Coupe, la coupe d'une pierre est la direction d'un lit ou d'un joint perpendiculaire à la surface droite ou courbe de la doële ou de la tête d'un voussoir, mais oblique au plafond dans les platebandes.

Couper, signifie ordinairement ôter d'une pierre plus qu'il ne convient à la place qu'elle doit occuper, de sorte que c'est la gâter en la rendant défectueuse ou inutile. La couper à propos c'est la *tailler*.

Couper du trait, c'eſt faire un modele en petit avec de la craye ; ou du plâtre, du bois ou autre choſe facile à couper, pour voir la figure des vouſſoirs, & s'inſtruire dans l'application du trait de l'épure ſur la pierre par le moyen des inſtrumens, comme *cerches*, *panneaux*, *biveaux & équerres* dont on ſe ſert en grand.

Courbe, ſubſtantif, ſignifie une ligne courbe : il y en a deux eſpeces, les unes *planes*, les autres à *double courbure*. Les courbes planes ſont celles qu'on peut exactement tracer ſur un plan, leſquelles ſe réduiſent pour l'uſage de la Coupe des pierres aux ſections coniques & aux ſpirales.

Les Courbes à double courbure ſont celles qu'on ne peut tracer ſur une ſurface plane qu'en racourci, par le moyen de la projection ; telles ſont la plupart des arrêtes des angles des enfourchemens des voutes qui ſe rencontrent dans certaines circonſtances.

Couſſinet, par analogie aux couſſins, ſur leſquels on s'appuye pour ne pas ſe bleſſer, eſt le premier vouſſoir d'une voute en arcade qui a un lit de niveau, & celui de deſſus en coupe en pente, pour recevoir les ſuivans auſquels il ſert d'appui.

Corne de vache, eſpece de voute en cone tronqué, dont la direction des lits ne paſſe pas au ſommet du cone.

Cul-de-four ſignifie une voute ſphérique ou ſphéroïde de quelque ceintre qu'elle ſoit, ſurhauſſé ou en plein ceintre, quoique les cul-de-four dont elle tire ſon nom ſoient très-ſurbaiſſés. L'arrangement de leurs vouſſoirs peut varier & leur donner différens noms, comme en *pendentif*, en plan de *voute d'arrête*, &c.

D.

Débillarder, c'eſt pour la coupe des bois, enlever une partie en eſpece de priſme triangulaire, ou approchant, compriſe entre des lignes qui enferment une ſurface gauche.

Déceintrer, c'eſt démonter les ceintres de charpente quand la voute eſt faite & les joints bien fichés.

Dégauchir, c'eſt former une ſurface plane en déterminant ſes extrêmités par le moyen de deux regles qu'on regarde l'une par l'autre en fermant un œil pour voir ſi elles ne ſe croiſent point, faiſant en ſorte que l'une ainſi regardée couvre l'autre exactement, ſans quoi elles ne ſont pas dans un même plan, mais ſur une ſurface gauche.

Délardement, c'eſt pour les pierres la même choſe que le débillardement pour le bois, il ſe dit particulierement de l'amaigriſſement que l'on fait au-deſſous des marches pour former l'intrados d'une rampe ou d'une coquille d'eſcalier tournant.

Délit, c'eſt une eſpece de diviſion naturelle qui ſe trouve dans les pierres, par couche, comme aux feuilles d'un livre ; ainſi *poſer en délit*, c'eſt donner à une pierre une ſituation différente de celle qu'elle avoit dans la carriere d'où on l'a tirée. C'eſt une mal-façon de poſer les claveaux ou vouſſoirs autrement que de lit en joint, comme ſi l'on chargeoit un livre ſur la tranche, il eſt évident que le poids feroit effort pour écarter les feuilles, au lieu qu'il les appuye les unes ſur les autres lorſqu'on le charge ſur la joue.

Il y a des pierres ſi maſſives qu'elles n'ont ni lit ni délit, tels ſont la plupart des marbres qu'on peut poſer comme l'on veut, & preſque toutes celles de la côte du Nord de Bretagne.

Démaigrir ou *Amaigrir* une pierre, c'eſt en ôter pour rendre l'angle que font deux ſurfaces, plus aigu ou moins obtus.

Dérobement, c'eſt la maniere de tailler une pierre ſans le ſecours des panneaux par le moyen des hauteurs & profondeurs qui déterminent les bornes de ce qu'il en faut retrancher, comme ſi l'on dépouilloit la figure imaginée de ce qui la couvre. C'eſt dans ce ſens qu'on dit dérober des feves. Le P. Dechalles n'a pas connu l'origine de ce mot lorſqu'il l'a traduit *per ſuffurationem*, il falloit dire, *per ſpoliationem.*

Deſcente, on appelle ainſi toutes les voutes inclinées à l'horiſon.

Développement, c'eſt l'extenſion des ſurfaces qui enveloppent un vouſſoir ou une voute, dont les parties contigues ſont rangées de ſuite ſur une ſurface plane. Le développement dans une épure ordinaire eſt l'extenſion de la doële, ſur les diviſions de laquelle on ajoute les figures des panneaux de lit.

Quelques Ouvriers peu inſtruits, comme Blanchard, dans ſon Traité de la Coupe des bois, entendent par le mot de développement, la ligne courbe, & quelquefois l'angle naturel qui eſt repréſenté en racourci dans la projection.

Ainſi il dit qu'*un* tel *angle* eſt le *développement d'une* telle *ligne* qui en eſt le profil ou la projection horiſontale.

Doële ou *douelle* du Latin *Dolium*, un tonneau, ſignifie le parement intérieur d'une voute ou d'un vouſſoir creux, comme la doële d'un tonneau; on l'appelle auſſi *intrados*.

La ſurface plane qui paſſe par la corde de l'arc d'une doële, s'appelle *Doële plate*, c'eſt une préparation à la formation d'une doële concave.

Doigt de biveau, ſignifie ſelon le P. DERAND, une de ſes branches (page 15): Daviler l'appelle *Bras*, & moi *Branche*.

Dreſſer une pierre, c'eſt l'équarrir ou la diſpoſer à recevoir le trait.

Droit, par un D majuſcule, ſignifie perpendiculaire, qui eſt oppoſé au biais. Ainſi on dit un arc droit, quoique cet arc ſoit courbe, parce qu'on veut dire que ſon plan eſt perpendiculaire à la direction d'un berceau. On dit une porte droite ou un berceau droit, une deſcente droite, pour ſignifier que ſa direction n'eſt pas oblique à ſon entrée horiſontalement.

E.

Ebraſement ſignifie l'élargiſſement des côtés ou jambages d'une porte ou d'une voute; tels ſont les bayes des fenêtres & abajours qui s'élargiſſent en dedans.

Echaſſe, c'eſt une regle de bois un peu large, dont les appareilleurs ſe ſervent pour y marquer les lignes de hauteur de retombée & d'épaiſſeur dont ils ont beſoin pour les porter commodément dans le chantier, où ils voyent les pierres qui leur conviennent, & peuvent en donner les meſures.

Elévation, c'eſt la repréſentation d'un corps deſſiné ſuivant ſes meſures verticales & horiſontales extérieurement apparentes, ſans égard à la profondeur.

Enfourchement, c'eſt l'angle formé par la rencontre de deux doëles de voutes qui ſe rencontrent, où les vouſſoirs qui les lient ont deux branches comme une fourche, dont l'une eſt dans une voute, & l'autre dans la contigue.

Entrecoupe, intervalle vuide de deux voutes qui ſont l'une ſur l'autre, enſorte que la doële de la ſupérieure prend naiſſance ſur l'extrados de l'inférieure, qui eſt quelquefois ouverte comme au dôme des Invalides, à Paris, où la calote ſe détache des côtés de la tour du Dôme.

On fait ſouvent des entrecoupes pour ſuppléer à la charpente

d'un dôme, en élevant une voute pour la décoration extérieure, au-dessus de la premiere qui paroîtroit trop écrasée au-dehors, comme à S. Pierre de Rome, & en plusieurs Eglises d'Italie.

Epure, apparemment du verbe *épurer* mettre au net, est le dessein d'une voute tracé sur une muraille ou sur un plancher, de la grandeur dont elle doit être exécutée, pour y prendre les mesures nécessaires à la construction des voussoirs.

Un pareil dessein pour la charpente change de nom, il s'appelle *Etelon*.

Equarrir une pierre ou une piece de bois, c'est lui faire des surfaces à l'équerre l'une à l'autre.

Equarrissement, tailler par équarrissement, est une maniere de tailler les pierres sans le secours des *panneaux*, les ayant seulement préparées, en les équarrissant, à y appliquer les mesures des hauteurs & des profondeurs qu'on a trouvé dans le dessein de l'épure pour chaque voussoir; on l'appelle aussi *par dérobement*, comme nous l'avons dit à ce mot.

Etayement, plancher pour soutenir les voutes en *plafond*; il tient lieu du ceintre dans les voutes concaves.

Extrados, du Latin *extra*, dehors, c'est la surface extérieure d'une voute, lorsqu'elle est réguliere comme l'*intrados*, soit qu'elle lui soit parallele ou non. La plupart des voutes des Ponts antiques étoient *extradossés* d'égale épaisseur.

F.

Fausse coupe, c'est la direction d'un joint de tête oblique à l'arc du ceintre, auquel il doit être perpendiculaire pour être en bonne coupe dans les voutes concaves.

Mais si la voute est plate, comme aux *Platebandes*, ce doit être tout le contraire, la bonne coupe doit être oblique au plafond, pour que les claveaux soient faits plus larges par le haut que par le bas; car si les joints sont perpendiculaires à la platebande, les clavaux deviennent d'une égale épaisseur. Alors ils sont en *fausse coupe*, parce qu'ils ne peuvent se soutenir que par le moyen des barres de fer q'on leur donne pour support, ou par une bonne coupe cachée sous la face au-dedans à quelques pouces d'épaisseur, comme on en voit aux portes du vieux Louvre, à Paris.

Fausse équerre, s'entend ordinairement du compas d'appareilleur; quoiqu'il signifie en général un récipiangle, c'est-à-dire, un instrument propre à mesurer l'ouverture d'un angle; ceux de bois s'appellent *Sauterelle*.

Fermer une voute, c'est y mettre le dernier rang de voussoirs, qu'on appelle collectivement *la clef*, par la même métaphore; le dernier voussoir s'appelle *Clausoir*, du Latin *claudere*, fermer.

Formeret. Voyez *Nerf*, il signifie aussi quelquefois le ceintre de jonction d'une voute à un mur; Voyez le P. DERAND, pag. 404.

Foulée, c'est un giron de marche, ainsi appellé, parce que c'est la partie qu'on foule aux pieds.

G.

Gauche, signifie toute surface qui n'a pas quatre angles dans un même plan, en sorte qu'étant regardée en profil, les côtés opposés se croisent; telle est une portion de la surface d'une vis & de la plupart des arrieres voussures. Ce terme est de tous les Arts, tant de Maçonnerie que de Charpenterie & Menuiserie; dans celui-ci Blanchard l'applique aussi à la ligne courbe à double courbure, qui est sur une surface.

Gras, signifie un excès d'épaisseur de pierre ou de bois, ou d'ouverture d'angle plus grand qu'il n'est néceſſaire pour le lieu où la pierre, ou bien le morceau de bois, doit être placé: le défaut opposé s'appelle *maigre*.

H.

Hélice, du Grec *Eliso, circumvolvo*, est une ligne courbe qui tourne autour d'un axe en s'élevant, comme la vis autour de son noyau. Voyez la Fig. 25 de la seconde Planche.

I.

Jarret, imperfection d'une direction de ligne ou surface, qui fait une sinuosité ou un angle. Le jarret saillant s'appelle *Coude*, le rentrant s'appelle *pli*. Une ligne droite fait un jarret avec une ligne courbe, lorsque leur jonction ne se fait pas au point d'attouchement.

Jauger, c'est appliquer une mesure d'épaisseur ou de largeur vers

vers les bouts d'une pierre pour en faire les arrêtes ou les surfaces opposées paralleles.

Jauger une pierre, signifie souvent la même chose que la *retourner*. Voyez *retourner*.

Imposte du Latin *impositum*, mis dessus, est le rang ou plutôt le Lit de pierre sur lequel on établit la naissance de la voute ou le *Coussinet*. *Imposte* signifie aussi cet ornement de moulures qui couronne un piédroit sous la naissance d'une arcade, lequel sert de base à un autre ornement ceintré, appellé *Archivôlte*.

Intrados. Voyez *Doële*.

Joint a différentes significations, c'est 1°. L'intervalle plein ou vuide qui reste entre deux pierres contigues; dans ce sens on dit *petit joint*, *grand joint*. 2°. Il se prend pour la ligne de division des ceintres en voussoirs; ainsi on dit *joint en coupe*, *joint quarré*, *joint de tête*, *joint de lit*, *joint de doële*. Il faut remarquer que quoique les joints de lit soient des divisions longitudinales de la doële, on n'entend par *joints de doële* que les joints transversaux. 3°. Le mot de *joint* signifie aussi quelquefois la surface d'une pierre inclinée & cachée dans une voute; mais alors au lieu de dire *joint en lit*, il faut dire *Lit en joint*.

L.

Layer du Latin *levigare*, polir, c'est tailler la pierre avec une espece de hache *brételée*, c'est-à-dire dentée en façon de scie, qu'on appelle *laye*, laquelle rend la surface unie quoique rayée de petits sillons uniformes qui lui donnent une apparence agréable.

Lierne, c'est une des nervures des voutes Gothiques, qui lie le nerf appellé *Tierceron* avec celui de la diagonale qu'on appelle *Ogive*.

Ligne, ce mot en Architecture a plusieurs significations; pour notre sujet elles se réduisent à la verticale appellée *à plomb*, à l'horisontale de *Niveau*, & à l'inclinée en *Talud*.

Limon, du Latin *limus*, tourné de travers, signifie la pierre ou piece de bois qui termine & soutient les marches d'une Rampe, sur laquelle on pose une balustrade de pierre ou de fer pour servir d'appui à ceux qui montent. Cette piece est droite dans les rampes droites & gauches, par ses surfaces supérieure & inférieure, dans les parties tournantes des escaliers.

Lit, par analogie au lit ſur lequel on ſe couche, ſe dit 1°. de la ſituation naturelle de la pierre dans la carriere. 2°. de la ſurface ſur laquelle on poſe une pierre, ſoit activement, ſoit paſſivement ; celle ſur laquelle elle s'appuye s'appelle *lit de deſſous* ; celle ſur laquelle une autre pierre s'appuye s'appelle *lit de deſſus* ; lorſque ces ſurfaces ſont inclinées à l'horiſon, comme dans les vouſſoirs & claveaux, on les appelle *lit en joint*.

Lunette, portion de voute percée dans une autre, dans laquelle elle forme une eſpece de figure de croiſſant de Lune d'où elle tire ſon nom.

M.

Maigre, par analogie à la maigreur des animaux, ſe dit des pierres dont les angles ſont plus aigus ou moins obtus qu'ils ne doivent être, de ſorte qu'elles n'occupent pas entierement la place à laquelle elles ſont deſtinées.

Marche ſignifie un degré, ſa partie horiſontale s'appelle *Giron*, de l'Italien *girare* tourner ; parce que la plupart des anciens eſcaliers étoient tournans : la partie verticale en parement s'appelle *Contremarche* ; lorſque le giron eſt d'inégale largeur, la partie la plus étroite s'appelle le *Collet*, & la plus large la *Queue*.

N.

Nerf ou *Nervure*, par analogie aux nerfs des animaux, eſt une arcade de pierre en ſaillie ſur le nud des voutes Gothiques, pour en appuyer & orner les angles ſaillans par des moulures, & fortifier les pendentifs, comme les nerfs font la force des animaux. Un des plus beaux morceaux que j'aye vû en ce genre, eſt la voute de l'Egliſe de *Velen* ou *Bethleem* à Liſbonne, où les nervures ſont de marbre travaillées, entrelaſſées & exécutées avec beaucoup d'art. On donne differens noms aux nervures par rapport à leur ſituation.

Les nerfs qui traverſent une voute diagonalement s'appellent croiſées *d'Ogives*, ceux qui la traverſent perpendiculairement s'appellent *arcs doubleaux*, ceux qui la traverſent obliquement entre les arcs doubleaux & les ogives, s'appellent *Liernes* & *Tiercerons* ; ceux qui en ſuivent la direction en traverſant d'un pilier à l'autre, s'appellent *Formerets*.

Noyau, c'eſt le milieu d'un eſcalier à vis ou d'une voute tournante de niveau, qu'on appelle pour cela voute *ſur le noyau*, ou tournante, & de plus rampante, qu'on appelle *vis-Saint-Giles*; le noyau ſuit ordinairement la figure du lieu dans lequel il eſt : ſi c'eſt dans une tour ronde, il eſt un pilier rond, il eſt quarré ſi la tour eſt quarrée.

O.

Ogivé ou *Augive*, ſignifie chez le P. DERAND, les voutes Gothiques en *tiers point*. Ce mot, ſelon ma conjecture, vient de l'Allemand *Aug*, qui ſignifie l'œil; parce que les arcs des cercles des ceintres de voutes Gothiques font des angles curvilignes, ſemblables à ceux des coins de l'œil, quoique dans une poſition différente.

D'Aviler reſſerre la ſignification de ce terme aux croiſées d'ogives, mais mal-à-propos, car anciennement on diſoit indifféremment voute *d'Ogive*, voute *Moderne* ou en *Tiers-point*.

P.

Panache, c'eſt une voute en ſaillie ouverte par-devant, comme les Trompes, élevée ſur un ou deux angles rentrans pour porter en l'air une portion de tour creuſe; c'eſt ainſi que les Dômes des Egliſes modernes ſont portés ſur quatre panaches, élevés ſur les angles de la croiſée de la Nef avec les bras de la croix.

Lorſque le Panache eſt établi ſur un ſeul angle, ſa figure eſt ordinairement un triangle ſphérique terminé par trois arcs, dont deux ſont verticaux en quart de cercle ou d'ellipſe, & le troiſieme horiſontal qui ſert de baſe à la Tour.

Lorſque le panache eſt ſur un pan coupé, c'eſt une ſurface concave quadrilatere irréguliere.

Ce nom peut venir du Latin *pandatio* & de *pandare* qui ſignifie ſelon Vitruve (l. 6. Chap. 11.) courber ſous le faix.

On ne doit pas confondre avec d'Aviler les noms de Panache & de pendentif, ce ſont des choſes différentes. Voyez *Pendentif*.

Panneau, de la même étimologie *pando*, eſt le modele d'une des ſurfaces d'un vouſſoir taillé ſur du bois, du carton ou autre matiere mince, pour être appliqué ſur la pierre, & ſervir à tracer le contour d'un *Lit*, d'une *Doële*, ou d'une *Tête*; c'eſt

leur usage qui leur donne les noms de *Panneau de lit*, &c.

Panneau flexible est celui qui est fait sur du carton, du fer-blanc, ou avec une lame de plomb pour pouvoir être plié & appliqué sur une surface concave ou convexe, cylindrique ou conique.

Parallele en un ridicule jargon d'Ouvrier, signifie quelquefois *dans un même plan*; ainsi Blanchard, dans son Traité de la Coupe des bois, imprimé à Paris en 1726, dit qu'une *courbe est parallele à une perpendiculaire droite, à une horisontale & à un angle*. Voyez pag. 73, & par-tout ailleurs où il est question de la même expression.

Parement, surface apparente.

Pendant, petit voussoir des voutes Gothiques sans coupe, fait à l'équerre.

Pendentif, ou plutôt Pandantifs de *Pandare*, plier sous le faix, est une espece de panache qui est le quart d'une demi croisée de voute Gothique, compris entre l'Ogive & le Formeret.

Plan, selon les Géometres, signifie une surface plane infiniment prolongée, si l'on veut; c'est dans ce sens qu'on dit que les bases des corps séparés sont dans un même plan. Lorsque l'on dit qu'une telle ligne est dans le plan horisontal ou dans un plan vertical, c'est la même chose que de dire, dans le langage des arts, de *niveau* ou *aplomb*.

Ce qui n'est, ni de niveau ni à plomb, sera dit *Incliné à l'horison*, & en terme de l'art, en *talud*, en *glacis*, ou en *descente*.

Plan, en terme d'Architecture, signifie la projection d'un corps sur une surface horisontale, & quelquefois sur une surface inclinée, alors il s'appelle *plan suivant la rampe*.

On l'appelle *plan Geométral* ou *Ichnographie*, lorsqu'il n'exprime que les distances horisontales, & *plan relevé*, lorsqu'on y ajoute une élévation pour mieux exprimer ce qu'on veut représenter, sans s'embarasser des mesures de hauteur, comme on voit un grand plan de Paris.

Le plan horisontal que nous appellons toujours *projection horisontale*, par les raisons que nous en avons donné au troisieme Livre, est le premier dessein nécessaire pour la Coupe des pierres.

Platebande, c'est pour la Coupe des pierres une voute droite & plane, de niveau ou rampante, qui sert de linteau & de fer-

meture à une porte, à une fenêtre ou à toute autre baye, comme l'architrave ſur les entrecolonnemens. Les pierres qui en ſont les parties s'appellent *Claveaux* & non pas *vouſſoirs* comme aux autres voutes. La longueur de la platebande entre ſes piédroits, s'appelle *Portée*, c'eſt le genre de voute qui a plus de pouſſée, c'eſt-à-dire, qui fait le plus d'effort pour renverſer ſes piédroits; parce que les pierres y ſont dans la ſituation la plus forcée.

Plomée, ſelon le P. DERAND, par corruption de *plombé*, eſt une ligne tirée à plomb.

Plumée, eſt une excavation faite dans la pierre, au marteau, ou avec le ciſeau, ſuivant une cerche ou une regle en quelque poſition qu'elle ſoit, à plomb, ou de niveau ou inclinée. Ce nom vient apparemment de la reſſemblance de la découverte que l'on fait de la peau d'un oiſeau en ôtant la plume.

Porte, c'eſt une baye qui prend le nom, 1°. du mur dans lequel elle eſt percée, comme *Porte en tour ronde*, ſi elle eſt convexe; *Porte en tour creuſe*, ſi elle eſt concave. 2°. De l'endroit où elle eſt placée, dans un angle rentrant, c'eſt une *porte dans l'angle*, dans un ſaillant, c'eſt une *porte ſur le coin*. 3°. De la direction, comme *porte droite*, qui eſt perpendiculaire à ſa direction, *Biaiſe*, ſi elle lui eſt oblique, *Ebraſée*, ſi ſes piédroits s'ouvrent en dehors, comme aux Egliſes Gothiques de Notre-Dame de Paris, de Rheims, &c.

Portée, intervalle de deux piédroits dans une platebande.

Pouſſée, c'eſt l'effort que fait une voute pour écarter ſes piédroits, lequel eſt d'autant plus grand que la courbure approche de la ligne droite; ainſi le ceintre en anſe de panier ſurbaiſſé pouſſe plus que le plein ceintre; celui-ci plus que le ſurbaiſſé; celui-ci plus que le *Tiers-points* Gothique c'eſt ſans doute par cette raiſon que les anciennes Egliſes ſont la plupart en *Tiers-point*, cette conſtruction d'ailleurs donnant la facilité d'employer de très-petits vouſſoirs qui coutoient peu de tranſport.

Q.

Quarrément, ſignifie à angle droit, à l'équerre.

Quartier a pluſieurs ſignifications. Il ſe prend pour une pierre de taille d'une certaine groſſeur. Il ſignifie auſſi le quart du

tour d'un escalier, alors on ajoute *Quartier tournant.* Si cette partie est arrondie & saillante hors d'un mur, on l'appelle *Quartier de vis suspendue*, qui n'est soutenue en l'air que par l'artifice de la coupe des pierres.

R.

Racheter, c'est joindre sans interruption deux surfaces de voutes différentes par des angles saillans ou rentrans, ou par d'autres surfaces intermédiaires qui fassent une transition agréable de l'une à l'autre.

Racordement, se dit de la réunion de deux surfaces, pour qu'elles paroissent continues, ou que leur joction (si elles font un angle entr'elles) fasse un arrête en ligne droite, ou d'une courbure de ceintre réguliere & uniforme; on dit pour le verbe, *Racorder.*

Ragréer, c'est enlever avec les outils convenables, les bosses ou balevres qui se trouvent dans les paremens & dans les joints pour les rendre unis, propres & agréables à la vûe.

Ralongée se dit d'une ligne courbe à laquelle on donne plus d'extension sur un diametre ou une corde qu'elle n'en avoit, sans changer sa profondeur. On dit *Cherche ralongée.*

Rampant. Voyez *Arc rampant.*

Rampe, inclinaison à l'horison d'une ligne ou d'une surface droite ou courbe, avec degrés, ou sans degrés.

Reculement, se dit ordinairement de la distance d'une ligne verticale à une ligne inclinée, comme de l'aplomb au talud, ou de l'écartement d'une ligne courbe à l'égard de la tangente, comme à une porte en tour ronde ou creuse à l'égard de sa corde ou d'une parallele.

Reins de voute, c'est la partie vuide ou pleine qui est entre la moitié d'un arc & son piedroit, depuis la naissance jusques vers le sommet. Les reins des voutes Gothiques sont vuides.

Remenée, terme peu usité, qui vient de l'Italien *Remenato*; ce n'est selon d'Aviler qu'une sorte d'arriere-voussure; mais sa propre signification est notre *bombé* d'un grand arc de cercle moindre que la moitié, comme il est clairement expliqué au premier Livre de Palladio Ch. 24 à REMENATO, *che cosi chiamano i volti che sono di portione di Cerchio & non arrivano à semicircolo*, & preuve qu'il ne l'entend pas seulement d'une ar-

riere vouſſure, c'eſt qu'il l'applique à la partie d'une voute ſphérique ſur un quarré, laquelle eſt au-deſſus des pendentifs.

Renfondrement, terme de Menuiſerie, ſuivant Blanchard, au lieu de *Renfoncement*.

Repaire du Latin *reperire*, retrouver, c'eſt une marque que l'on fait ſur une pierre pour reconnoître une diviſion ou un trait dont on a beſoin pour tailler. Ainſi on dit *Repairer*, au lieu de marquer un point ou une ligne.

Reprendre, c'eſt refaire une partie de vouſſoir qui excéde l'étendue qu'elle doit avoir.

Retombée, c'eſt la même ligne qu'on appelloit anciennement *abbatue*, dont nous avons parlé : c'eſt l'intervalle du niveau entre la naiſſance inférieure d'un arc, & l'aplomb abaiſſé de ſon extrêmité ſupérieure.

On appelle *premieres retombées*, les vouſſoirs de la naiſſance d'une voute, qui ont des lits ſi peu inclinés, qu'ils ne gliſſent pas, & ſe ſoutiennent les uns ſur les autres, ſans le ſecours des ceintres de Charpente, tels ſont les cinq ou ſix premieres aſſiettes des vouſſoirs des arcades d'un grand diametre, quelquefois plus.

Retondre une pierre, c'eſt enlever une légere épaiſſeur dans toute une ſurface pour la perfectionner : c'eſt une eſpece de ragrément.

Retour d'équerre, c'eſt un angle droit : on dit ſe *retourner d'équerre* pour faire une ligne ou une ſurface perpendiculaire à une autre.

Retourner une pierre, c'eſt la jauger ou lui faire une ſurface parallele ou à-peu-près à un lit ou à un parement donné.

S.

Sauterelle, inſtrument compoſé de deux regles de bois aſſemblées par un bout, comme la tête d'un compas, pour être mobiles & propres à prendre l'ouverture de toutes ſortes d'angles rectilignes droits, aigus ou obtus. C'eſt un *récipiangle* pour tranſporter ſur la pierre ou ſur le bois l'angle d'une encoignure ou d'un trait de l'épure, plus uſité dans la Coupe des bois que dans celle des pierres, où l'on ſe ſert pour la même fin du compas d'Appareilleur, qui eſt une eſpece de ſauterelle à laquelle on a ajouté des pointes pour ſervir de fauſ-

fe équerre & de compas fuivant les occurrences.

Simbleau, ou plutôt *Cingleau*, par corruption du Latin *Cingulum*, un cordon, eft le cordeau qui fert à tracer les arcs de cercle d'une étendue plus grande que les branches des plus grands compas, foit à branches foit à verges. Les meilleurs fingleaux font des chaînettes qui ne font pas fujettes à s'alonger comme les cordes.

On appelle auffi fimbleau une perche immobile par un de fes bouts qui fert à tracer un grand arc de cercle.

Singliots, font les deux *foyers* d'une ellipfe où l'on attache les bouts d'un cordeau égal au grand axe, pour tracer cette courbe par le mouvement continu, qu'on appelle le *Trait du Jardinier*.

Sommier, par analogie au fommet, c'eft la premiere pierre d'une platebande qui porte à plein au fommet du *piédroit* où elle forme le premier lit en joint, & l'appui de la butée des claveaux de chaque côté, pour les tenir fufpendus fur le vuide de la baye, d'où ils ne peuvent s'échaper qu'en écartant les fommiers. La coupe ou inclinaifon de leur lit en joint fur l'horifon, eft ordinairement de 60 degrés, parce qu'on a coutume de la tirer du fommet d'un triangle équilatéral.

Surbaiffer, c'eft n'élever une courbure de ceintre qu'au-deffous du demi-cercle, c'eft-à-dire, faire un ceintre elliptique, ou en ovale, dont le grand axe foit horifontal.

Surhauffer, c'eft au contraire élever le ceintre au-deffus du demi-cercle, ou faire une ovale dont le grand axe foit à plomb par le milieu de la clef.

Surplomber, c'eft faire pencher une ligne ou une furface à angle aigu avec l'horifon.

T.

Taluder, c'eft au contraire faire un angle obtus avec l'horifon.

Talud, *Talus* ou *Talut*, le premier paroît plus naturel, fi l'on doit dire taluder fuivant l'ufage, car on ne dit jamais *talufer*; & quoique d'Aviler dife *taluter*, je ne l'entend point dire parmi les Artiftes; M. Gautier, Directeur des Ponts & Chauffées, a écrit comme nous *talud*, dans fes Traités des Ponts & des Chemins, ce mot vient du Latin *Talus*, qui fignifie le talon.

C'eft l'inclinaifon d'une ligne ou d'une furface au-delà de l'a plomb

plomb en angle obtus, tout au plus jusqu'à l'angle de 135 degrés; car dès que la surface est plus inclinée, cette inclinaison s'appelle en *Glacis*.

Tambour est une pierre ronde en portion de cylindre qui est une partie de fust de colonne ou de pilier, qu'on n'a pû faire d'une piece faute de pierre assez grande. Ce mot vient de la figure de la caisse dont on se sert dans les troupes pour faire le bruit du signal de marche, d'assemblée ou d'autre manœuvre, parce qu'on l'appelloit anciennement *Tambour*, au lieu qu'aujourd'hui ce nom a passé à l'homme qui frappe dessus pour en tirer le son.

Tas de charge, c'est une saillie de pierres, dont les lits avançant les uns sur les autres, font l'effet d'une voute, de sorte qu'il faut des pierres longues pour balancer la partie qui est sans appui; mais ce genre d'ouvrage n'est bon qu'en petit, ou seulement pour les premieres pierres de la naissance d'une voute.

Tasser se dit de l'affaissement d'une voute, dont la charge fait diminuer la hauteur & resserrer les joints.

Tasté, ligne tastée est celle qu'on trace à la main pour voir l'effet d'une courbure.

Tierceron, c'est un nerf des voutes d'ogives, situé entre le formeret ou arc doubleau & celui d'ogive en diagonale.

Tour ronde ne signifie pas toujours une tour, mais tout parement convexe de mur cylindrique ou conique; *Tour creuse* est le concave.

Tracer à la main, c'est déterminer à vûe d'œil le contour d'une ligne courbe, ou en suivant plusieurs points donnés par intervalle, ou en corrigeant seulement par le goût du dessein une ligne courbe qui ne satisfait pas la vûe, comme une doucine composée d'arcs de cercle mal assemblés, doit être encore tracée à la main.

Lorsqu'on a plusieurs points donnés pour une ligne courbe, il convient mieux de se sevir d'une regle pliante que de tracer à la main: le contour en est plus net.

Traîner, c'est faire méchaniquement une ligne parallele à une autre ligne donnée, droite ou courbe, en trainant le compas ouvert de l'intervalle requis d'une ligne à l'autre, de maniere qu'une de ses pointes parcoure la ligne donnée, & que l'autre pointe ou plutôt la ligne qu'on peut imaginer passer par

ces deux poins, ſoit toujours perpendiculaire ou également inclinée à la ligne donnée, ou à ſa tangente, ſi elle eſt courbe. Les Menuiſiers, au lieu de compas, ſe ſervent pour cette opération d'un inſtrument qu'ils appellent *Truſquin*.

Trait, à l'égard de la Coupe des pierres, ſignifie en général tout deſſein qui conduit aux moyens néceſſaires pour parvenir à la formation d'une voute, ſoit plan, profil, élévation ou développement. Ce terme eſt plus étendu que celui d'*Epure*, en ce qu'il s'entend du deſſein en petit & en grand, au lieu que l'épure ne ſignifie que celui de grandeur naturelle ſans réduction.

On dit *couper du trait* pour exprimer l'étude que l'on fait avec de la craye, du platre ou autre matiere facile à couper, qu'on taille en petits vouſſoirs de la même maniere que ſi on exécutoit une voute en grand, pour apprendre à joindre la théorie à la pratique, & concevoir plus facilement l'effet des traits dont on s'eſt ſervi, ſoit auſſi pour ſentir le plus ou le moins de commodité des différentes manieres qu'on a inventé, en ſe ſervant des panneaux ou en taillant par équarriſſement.

Trait quarré, c'eſt ſuivant le langage des Ouvriers, la maniere de faire une perpendiculaire à une ligne donnée. Si cette ligne eſt courbe, comme un cercle ou une ellipſe, la perpendiculaire à ſa tangente s'appelle *trait quarré ſur la ligne courbe*, & *au bout de la ligne courbe* lorſqu'elle l'eſt à une de ſes extrêmités.

Trompe, c'eſt, ordinairement une voute de la figure d'une moitié de cone qui ſe préſente par ſa baſe, comme le *pavillon* d'une trompette ou cor-de-chaſſe, qui eſt cette eſpece d'entonnoir par où ſort le bruit du ſon, & parce qu'anciennement cet inſtrument s'appelloit Trompe, on a donné le même nom à la voute qui en imite une partie. Cette étimologie eſt naturelle, & montre la puérilité de l'imagination de ceux qui diſent avec d'Aviler, que ce nom vient de ce que la voute *trompe* & ſurprend ceux qui la regardent ſans connoiſſance de l'artifice de ſon appareil.

On appelle auſſi du même nom des petites voutes en portion de ſphere qu'on fait aux angles ſaillans pour en émouſſer le pied, & ſoutenir le haut en l'air. Alors on les appelle *Trompe en Niche*.

Il y a différentes ſortes de trompes, dont les noms viennent

ou de leurs ſituations ou de leurs figures.

A l'égard de la figure, il en eſt, comme je viens de dire, de coniques & de ſphériques.

La conique Droite s'appelle *Trompe fondamentale*, chez le P. DERAND.

La ſphérique s'appelle *Trompe en niche.*

Lorſque la face de l'une ou de l'autre eſt convexe, on l'appelle *Trompe en tour ronde*, ſi elle eſt concave, *Trompe en tour creuſe*, ſi la face eſt briſée en pluſieurs ſuperficies planes, on l'appelle *Trompe à pan*, ſi les impoſtes ſont d'inégale hauteur on l'appelle *Trompe rampante*, ſi la face eſt ondée & les impoſtes rampantes, on l'appelle *Trompe d'Anet.*

A l'égard de la ſituation, ſi elle eſt dans un angle ſaillant, on l'appelle *Trompe ſur le Coin*, ſi elle eſt dans un angle rentrant, *Trompe dans l'Angle.*

Trompillon, c'eſt la naiſſance du milieu d'une trompe, qui eſt au ſommet du cone dans les coniques, ou au pole de la ſphere dans les ſphériques; c'eſt une pierre d'une ſeule piece, qu'on eſt forcé de faire ainſi pour occuper la place de pluſieurs extrêmités de vouſſoirs en pointe, qui ſeroient tellement aigus, qu'on ne pourroit les tailler & les poſer ſans riſque de les caſſer.

On appelle auſſi *Trompillons* les petites trompes faites de pluſieurs pieces ſous les quartiers tournans de certains eſcaliers.

V.

Vis d'eſcalier, c'eſt un arrangement de marches, de degrés au tour d'un pilier qu'on appelle le *Noyau* de la vis; quelquefois le noyau de la vis eſt ſupprimé, les marches alors ne ſont ſoutenues que par leur queüe dans le mur de la Tour, & en partie ſur celles qui ſont de ſuite dès le bas; alors on l'appelle *Vis à jour.*

Si l'eſcalier à vis dans une tour ronde eſt vouté en berceau tournant & rampant, on l'appelle *Vis-Saint-Giles ronde.*

Si la tour eſt quarrée, le noyau étant auſſi quarré, chaque côté étant vouté en berceau irrégulier d'une figure en quelque façon torſe, on l'appelle *vis-Saint-Giles quarrée.*

Vouſſoir, c'eſt une pierre qui fait partie d'une voute concave, de quelque figure qu'elle ſoit, cylindrique, conique, ſphérique

ou annulaire : ſon étimologie vient apparamment du mot Latin *volutus*, tourné en rond.

Les vouſſoirs qui ferment la naiſſance d'une voute, s'appellent *Couſſinets*, ceux qui ſont à ſon ſommet s'appellent *Clefs*.

Lorſqu'ils ſont terminés en haut par une partie qui déborde leur queue, on les appelle *vouſſoirs a croſſettes*.

Lorſqu'ils ſe diviſent en deux parties pour lier deux voutes, qui font un angle ſaillant ou rentrant, on les appelle *vouſſoirs à branches*.

Lorſqu'un vouſſoir eſt ſuivi d'un autre en continuation, on l'appelle *vouſſoir ſans fin*; tels ſont ceux des arches du Pont Royal à Paris.

Vouſſure ſignifie toute ſorte de courbure en voute, mais particulierement ces portions de voute qui ſervent de baſe aux plafonds à la mode.

Les vouſſures qui ſont au-dedans d'une baye de porte ou de fenêtre derriere la fermeture s'appellent *arriere-vouſſures* ; il en eſt de différentes figures, comme nous l'avons dit à ce mot.

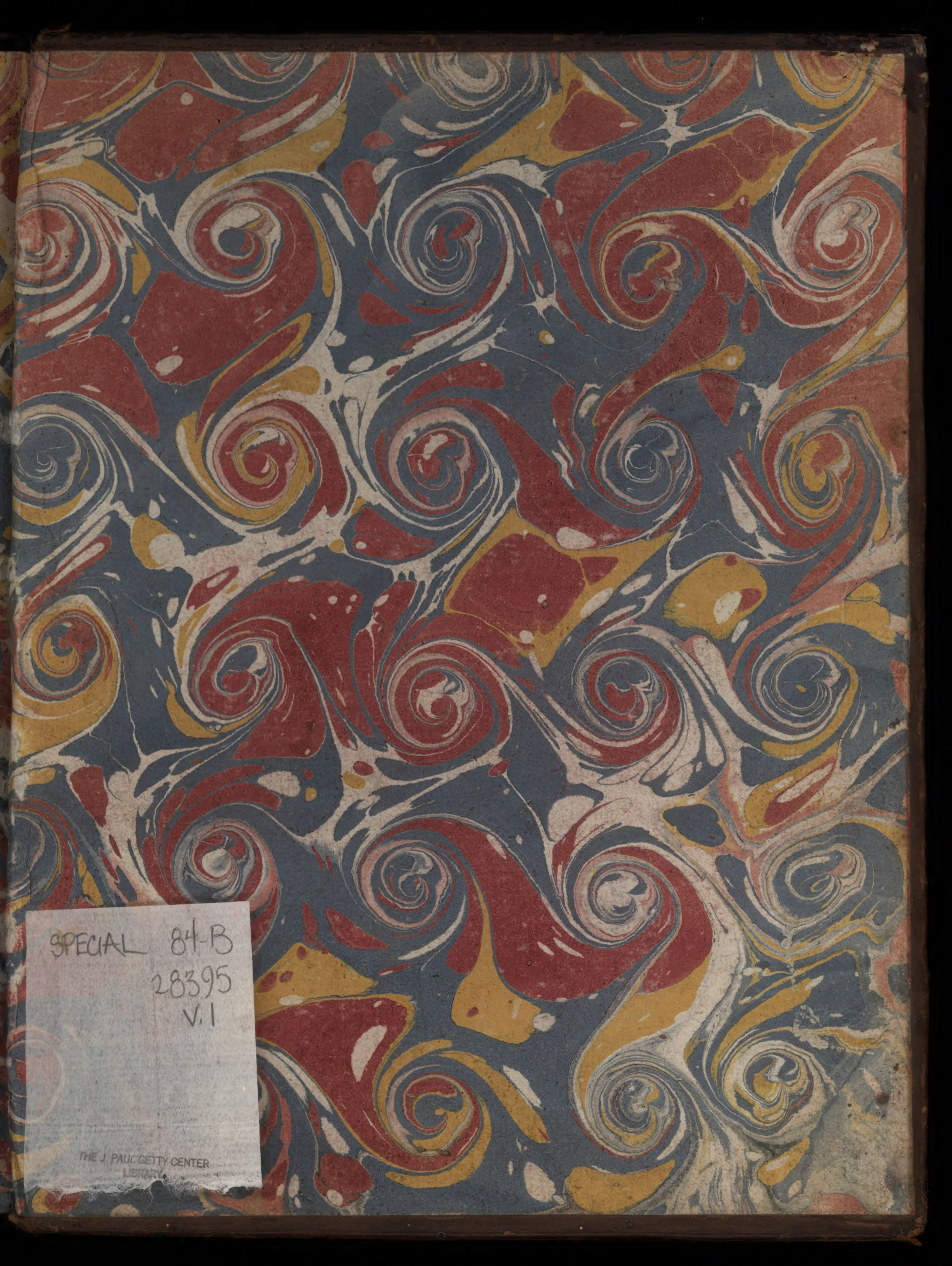
Voute, du Latin *Volutum*, tourné en rond, ſignifie toute ſorte de couverture de maçonnerie ou de pierre de taille qui ſe ſoutient en l'air entre ſes piédroits, par l'arrangement & la figure des parties qui la compoſent.

Les voutes propres à couvrir de grands appartemens, s'appellent *Maîtreſſes voutes* pour les diſtinguer de celles qui ne peuvent ſervir qu'à couvrir de petites parties, comme les trompes, les arrieres-vouſſures & les niches.

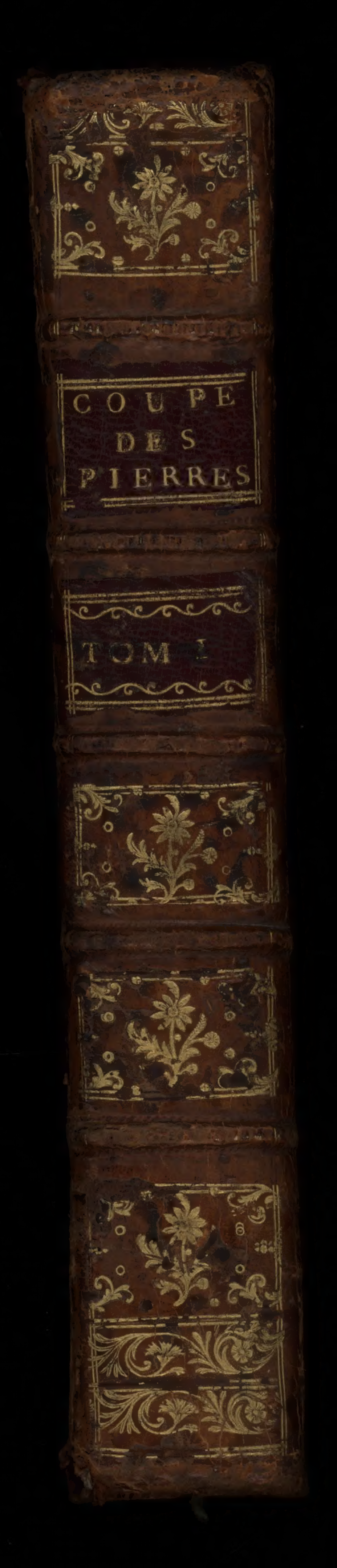
Quoique les voutes puiſſent être variées d'une infinité de façons, on peut les reduire en ſept ou huit eſpeces; ſçavoir, en planes, cylindriques, coniques, ſphériques, annullaires, hélicoïdes, mixtes & irrégulieres. C'eſt dans cet ordre qu'on les a rangé dans le Livre Quatrieme de cet Ouvrage, où l'on donne la maniere de les faire.

FIN.




SPECIAL 84-B
28395
V.1
THE J. PAUL GETTY CENTER
LIBRARY




COUPE
DES
PIERRES
TOM I